05

समान्तर श्रेढ़ी
(Arithmetic Progression)

5.01 प्रस्तावना

प्रकृति में हम अपने आस–पास की कई वस्तुओं को उनके एक निश्चित ढ़ंग में दिखने के कारण पहचानते है। ये वस्तुऐं अपने निश्चित प्रतिरूप का अनुसरण करती है। जैसे मधुमक्खी के छत्ते में छिद्रों का बनना। इस प्रकार के निश्चित प्रतिरूप को प्रदर्शित करता है।

घर या दुकानों में लगी स्टील की सीढ़ी में भी एक निश्चित लम्बाई की पाइप रोड एक निश्चित अन्तराल पर लगी होती है। गणितीय भाषा में हम कहेंगे कि प्रतिरूपों में एक नियत मात्रा में संख्या बढ़ती या घटती चली जाती है। एवं एक के बाद दूसरे, तीसरे, चौथे क्रमों में परस्पर एक निश्चित सम्बन्ध होता है। संख्याओं के एक निश्चित नियमानुसार क्रम को अनुक्रम (Sequence) कहते हैं। उदाहरणार्थ–संख्याओं के निम्नलिखित अनुक्रमों पर अपना ध्यान केन्द्रित करते हैं–

(i) 2, 4, 6, 8, 10,...

(ii) $8, 5, 2, -1, -4, \ldots$

(iii)

प्रतिरूप (i) में प्रत्येक संख्या अपनी आगे वाली संख्या से 2 कम है। अर्थात् किसी संख्याओं में 2 जोड़े तो क्रम की अगली संख्या प्राप्त होती है।

प्रतिरूप (ii) में अगली संख्या पूर्व संख्या में से 3 घटाने पर प्राप्त हो रही है। इसी प्रकार (iii) प्रतिरूप में सभी क्रमिक संख्याऐं 3 की बढ़ती घातों में दर्शाई गई है।

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट हैं कि सभी प्रतिरूप एक निश्चित नियम/नियमों का अनुसरण करते हैं। इस अध्याय में हम इसी तरह के एक प्रतिरूप का अध्ययन करेंगे। जिसमें उत्तरोत्तर पद (term) अपने से पहले पदों (terms) में एक निश्चित संख्या जोड़ने पर प्राप्त किये जाते हैं। यहाँ हम इस प्रतिरूप के व्यापक पद (n^{th} term) एवं क्रमागत पदों के योग ज्ञात करने की विधियों के बारे में पढ़ेंगे।

5.02 समान्तर श्रेढ़ी

हम सर्वप्रथम संख्याओं के निम्न अनुक्रमों पर विचार करते हैं।

(i) $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4 \ldots$

(ii) $100, 70, 40, 10, \ldots$

(iii) $-5, -3, -1, 1, \ldots$

उपरोक्त अनुक्रमों में प्रथम पद छोड़कर सभी पद एक निश्चित संख्या (धनात्मक या ऋणात्मक) को पिछले पद वाली संख्या में जोड़ कर प्राप्त किये जा सकते हैं। इस प्रकार उक्त अनुक्रमों में संख्याऐ समान्तर श्रेढ़ी (Arithmetic progression) में लिखी हुई है।

अतः समान्तर श्रेढ़ी में अनुक्रम के प्रत्येक पद और उसके पूर्ववर्ती पद का अन्तर हमेशा समान रहता है। यह निश्चित संख्या (अन्तर) समान्तर श्रेढ़ी का सार्वअन्तर (Common difference) कहलाता है।

माना किसी अनुक्रम के पद से व्यक्त किये जाते हैं। अब यदि ये समान्तर श्रेढ़ी में है तो प्रथम पद को छोड़कर प्रत्येक पद उसके पूर्ववर्ती पद का अन्तर निश्चित संख्या होती है। अर्थात् प्रथम पद को छोड़कर प्रत्येक पद पिछले पद में सार्व अन्तर जोड़ने पर प्राप्त होता है। सार्वअन्तर को यहाँ d माना जाए तों

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + d$$

अतः $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = d$ व्यापक रूप में $a_n - a_{n-1} = d$ जहाँ $n = 1, 2, 3, ...$ यहाँ हम यह कह सकते हैं कि यदि अनुक्रम का प्रथम पद a है और सार्व अन्तर d है तो समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$a, a+d, a+2d, a+3d, ..., a+(n-1)d, ...$$

उपर्युक्त तथ्यों को हम निम्न उदाहरणों से स्पष्ट रूप से समझ सकते है।

उदाहरण-1. निम्नलिखित समान्तर श्रेढ़ी के लिए प्रथम पद एवं सार्व अन्तर लिखिए।

$$-5, -1, 3, 7, ...$$

हलः दी गई समान्तर श्रेढ़ी की व्यापक रूप से तुलना करने पर, स्पष्ट है कि यहाँ प्रथम पद

तथा सार्व अन्तर = क्रमागत दो पदों का अन्तर

अर्थात् $-5-(-1)=4$, $3-(1)=4$

उदाहरण-2. संख्याओं की निम्नलिखित अनुक्रमों के लिए समान्तर श्रेढ़ी की जाँच कीजिए।

(i) $4, 10, 16, 22, ...$

(ii) $-2, 2, -2, 2, -2, ...$

हलः (i) प्रथम अनुक्रम $4, 10, 16, 22, ...$ की समानतर श्रृढ़ी होने की जाँच के लिए हम सार्वअन्तर ज्ञात करते हैं। अर्थात्

$$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$

$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$

$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

अर्थात् प्रत्येक बार अन्तर '6' प्राप्त हो रहा है अतः यह अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी है तथा इसका सार्वअन्तर '6' है।

(ii) अनुक्रम $-2, 2, -2, 2, -2, ...$ की जाँच के लिए सार्वअन्तर ज्ञात करते हैं–

$$a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 4$$

$$a_3 - a_2 = -2 - (2) = 0$$

$$a_4 - a_3 = 2 - (-2) = 4$$

अर्थात् प्रत्येक बार अन्तर समान प्राप्त नही हो रहा हैं अतः यह सूची समान्तर श्रेढ़ी नहीं है।

उदाहरण-3. निम्न समान्तर श्रेढ़ीयों के सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए तथा उनके अगले चार पद भी लिखिए–

(i) $0, -3, -6, -9, ...$

(ii) $-1, \frac{-5}{6}, \frac{-2}{3}, ...$

हलः (i) माना समान्तर श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, ...$ है। अतः यहाँ

$$a_2 - a_1 = -3 - 0 = -3$$

$$a_3 - a_2 = -6 - (-3) = -3$$

$$a_4 - a_3 = -9 - (-6) = -3$$

स्पष्ट है कि दो क्रमागत पदों में अन्तर –3' समान है। अतः सार्वअन्तर $'d' = -3$ अतः अगले चार पद निम्नप्रकार होंगे–

$$a_5 = a_4 + d = -9 + (-3) = -12$$

$$a_6 = a_5 + d = -12 + (-3) = -15$$

$$a_7 = a_6 + d = -15 + (-3) = -18$$

$$a_8 = a_7 + d = -18 + (-3) = -21$$

(ii) माना समान्तर श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, ...$ द्वारा व्यक्त की जाती है तब यहाँ

$$a_2 - a_1 = \frac{-5}{6} - (-1) = \frac{1}{6}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{-2}{3} - \frac{(-5)}{6} = \frac{-4+5}{6} = \frac{1}{6}$$

स्पष्ट है कि दो क्रमागत पदों में अन्तर '$\frac{1}{6}$' समान है। अतः सार्वअन्तर, $d = \frac{1}{6}$

इस प्रकार अगले चार पद निम्न होंगे।

$$a_4 = a_3 + d = \frac{-2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-4+1}{6} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$a_5 = a_4 + d = \frac{-1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$a_6 = a_5 + d = \frac{-1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-2+1}{6} = \frac{-1}{6}$$

$$a_7 = a_6 + d = \frac{-1}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

प्रश्नमाला 5.1

1. निम्नलिखित समान्तर श्रेढ़ी के लिए प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d ज्ञात कीजिए–

(i) $6, 9, 12, 15, ...$ (ii) $-7, -9, -11, -13, ...$

(iii) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, ...$ (iv) $1, -2, -5, -8, ...$

(v) $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, ...$ (vi) $3, 1, -1, -3, ...$

(vii) $3, -2, -7, -12, ...$

2. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के लिए प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d निम्नानुसार दिया हुआ है, तो उस श्रेढ़ी के प्रथम चार पद लिखिए।

(i) $a = -1, \quad d = \frac{1}{2}$ (ii) $a = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{4}{3}$

(iii) $a = 0.6, \quad d = 1.1$ (iv) $a = 4, \quad d = -3$

(v) $a = 11, \quad d = -4$ (vi) $a = -1.25, \quad d = -0.25$

(vii) $a = 20, \quad d = \frac{-3}{4}$

3. संख्याआं की निम्न लिखित सूचियों के लिए समान्तर श्रेढ़ी की जाँच कीजिए। यदि इनमें कोई समान्तर श्रेढ़ी है तो इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए तथा इसके अगले चार पद भी लिखिए।

(i) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, ...$ (ii) $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, ...$

(iii) $a, a^2, a^3, a^4, ...$ (iv) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, ...$

(v) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, ...$ (vi) $a, 2a, 3a, 4a, ...$

(vii) $0.2, 0.22, 0.222, ...$ (viii) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, ...$

5.03 समान्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद या 'व्यापक पद'

पिछले अनुच्छेद में हमने समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद a एवं सार्वअन्तर d द्वारा समान्तर श्रेढ़ी के क्रमिक पदों को ज्ञात करने के बारे में पढ़ा। यहाँ हम निम्न उदारहण पर विचार करते है।

माना किसी कर्मचारी का मूल मासिक वेतन ₹ 10000 है तथा उसे ₹ 300 की वार्षिक वेतन वृद्धि दी जा रही है। तो उसका वेतन 20 वें वर्ष में कितना हो जायेगा, यह पता लगाने के लिए हम प्रथम पाँच वर्ष की वेतन प्राप्ति की गणना करते हैं–

	प्रथम वर्ष में प्राप्त मासिक वेतन	= ₹10,000
	द्वितीय वर्ष में प्राप्त मासिक वेतन होगा	= ₹ (10000 + 300)
अर्थात्	दूसरे वर्ष में वेतन	= ₹10,300
इस प्रकार,	तृतीय वर्ष में मासिक वेतन	= ₹(10300+300)
		= ₹ (10,000 + 300 + 300)
		= ₹ [10,000 + 2300]
अर्थात्	तीसरे वर्ष में वेतन	= ₹ (10,000 + (3–1)300)
		= ₹ 10600
अतः	चतुर्थ वर्ष में मासिक वेतन	= ₹ (10600300)
		= ₹ (10,000 + 300 + 300 + 300)
		= ₹ [10,000 + 3300]
अर्थात्	चौथे वर्ष में वेतन	= ₹ (10,000 + (4–1)300)
		= ₹10,900
इसी प्रकार,	पाँचवे वर्ष में वेतन	= ₹ (10,900 + 300)
		= ₹ (10,000 + 300 + 300 + 300 + 300)
		= ₹ (10,000 + 4300)
		= ₹ (10,000+(5–1)300)
		= ₹ 11,200

यहाँ हम वार्षिक वेतन के पाँच वर्षों के आँकडों को निम्न अनुक्रम में लिखते है,

10000, 10300, 10600, 10900, 11200 . . .

यह अनुक्रम एक समान्तर श्रेढ़ी है क्योंकि इसके क्रमिक पदों में सार्वअन्तर 300 है। उपरोक्त चर्चा से स्पष्ट है कि हम पिछले वर्ष के वेतन में रु. 300 जोडकर वांछित वर्ष के वेतन की गणना कर सकते है।

वेतन गणना के उक्त प्रतिरूप से स्पष्ट है कि कर्मचारी का 20 वें वर्ष में वेतन निम्न प्रकार होगा

= ₹ 19 वें वर्ष का वेतन + ₹ 300

= ₹ (10,000 + (300 + 300 + ... + 300) + 300)

= ₹ (10,000 + (20–1)300)

अर्थात्, 20वें वर्ष में वेतन = ₹ 15700

अतः स्पष्ट है कि जिस प्रकार हमने दूसरे, तीसरे, चौथे, पाँचवे एवं अन्त में 20 वें वर्ष में कर्मचारी का वेतन प्राप्त किया हैं, व्यापक रूप में हम इसे निम्न संबन्ध द्वारा लिख सकते है।

20वें वर्ष के लिए वेतन प्रथम (मूल) वेतन + (20–1) × वार्षिक वेतन वृद्धि

इस उदाहरण से हम व्यापक रूप में यह प्रतिपादित कर सकते हैं कि यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है तो उसका nवाँ पद (व्यापक पद) a_n निम्न प्रकार लिखा जा सकता है– $a_n = a + (n-1)d$

मान लीजिए समान्तर श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \cdots$ के रूप में है तथा इसका $a_1 = a$ प्रथम पद तथा सार्वअन्तर d है तब,

दूसरा पद $\quad a_2 = a + d = a + (2-1)d$

तथा $\quad a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d$

या $\quad a_3 = a + (3-1)d$

इसी प्रकार n वाँ पद $\quad a_n = a_{n-1} + d = a + (n-1)d$

अर्थात् व्यापक पद $=$ प्रथम पद + (पदों की संख्या–1) × सार्वअन्तर

यहाँ यह उल्लेख करना आवश्यक है कि यदि समान्तर श्रेढ़ी में m पद है अर्थात् अन्तिम पद a_m (या अंतिम पद) है तब अन्त से n वाँ पद निम्न प्रकार होगा–

अन्त से n वाँ पद $= a_{m-n+1}$

$$= a + (m - n + 1 - 1)d$$

$$= a + (m - n)d$$

यदि श्रेढ़ी के अन्तिम पद 'ℓ' को प्रथम पद एवं घटते सार्वअन्तर को $-d$ लें तो अन्त से n वे पद को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

अन्त से n वाँ पद $=$ अंतिम पद $+(n-1)(-d)$

अर्थात् अन्त से nवाँ पद $= \ell - (n-1)d$

समान्तर श्रेढ़ी के व्यापक पद के बारे में निम्न उदारहणों के माध्यम से अवधारणा को और अधिक समझा जा सकता है।

उदाहरण-4. समान्तर श्रेढ़ी 10, 7, 4, ... का 30 वाँ एवं nवाँ (व्यापक पद) ज्ञात कीजिए।

हलः दी गयी समान्तर श्रेढ़ी है:

10, 7, 4, ...

इसका प्रथम पद $a = 10$

सार्वअन्तर $= d = -3$

अतः इस समान्तर श्रेढ़ी का nवाँ पद a_n दिया जाता है

$$a_n = a + (n-1)d$$

इस प्रकार 30 वाँ पद $a_{30} = 10 + (30-1) \times (-3)$

$$= 10 - 29 \times 3 = -77$$

तथा व्यापक nवाँ पद $= 10 + (\mathrm{n}-1) \times (-3)$

$$= 10 - 3(n-1) = 13 - 3n$$

अतः अभीष्ट 30 वाँ पद $= -77$ एवं nवाँ व्यापक पद $= 13 - 3\mathrm{n}$ है।

उदाहरण-5. समान्तर श्रेढ़ी 3, 15, 27, 39, ... का कौनसा पद 639 है ?

हलः दी गई समान्तर श्रेढ़ी है: 3, 15, 27, 39, ...

अतः प्रथम पद $a = 3$ तथा सार्वअन्तर $d = 12$ है माना nवाँ पद $= 639$ है अतः व्यापक पद

$$a_n = a + (\mathrm{n}-1)\mathrm{d}$$

यहाँ, $639 = 3 + (\mathrm{n}-1) \times 12$

या $639 = 3 + 12n - 12$

या $648 = 12n$

या $n = \dfrac{648}{12} = 54$

अतः दी गई समान्तर श्रेढ़ी का 54 वाँ पद 639 है।

उदाहरण-6. समान्तर श्रेढ़ी 7, 13, 19, . . . , 205 में पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः दी गई समान्तर श्रेढ़ी 7, 13, 19, . . . , 205 है। यहाँ प्रथम पद $a = 7$ एवं सार्वअन्तर $d = 6$ है। माना nवाँ पद अंतिम है। तब $a_n = 205$

इस प्रकार nवाँ पद $a_n = a + (n-1) \times d$

अर्थात् यहाँ $205 = 7 + (n-1) \times 6$

$$205 = 7 + 6n - 6$$

या $$204 = 6n$$

या $$n = \frac{204}{6} = 34$$

अतः दी गई समान्तर श्रेढ़ी में 34 पद है।

उदाहरण-7. एक समान्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 12 है और 50 वाँ पद 106 है। इसका 29 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद $= n$ वाँ पद

$$\therefore \quad a_n = a + (n-1)d$$

जहाँ a समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद एवं d सार्वअन्तर है।

यहाँ $\quad a_3 = 12$ एवं $a_{50} = 106$

इसप्रकार $\quad a_3 = a + (3-1)d$

या $$12 = a + 2d \quad \text{... (i)}$$

तथा $\quad a_{50} = a + (50-1)d$

या $$106 = a + 49d \quad \text{... (ii)}$$

अब समीकरण (ii) में से (i) को घटाने पर

$$106 - 12 = 49d - 2d$$

या $$94 = 47d$$

या $$d = \frac{94}{47} = 2$$

d का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$12 = a + 2 \times 2$$

$$\Rightarrow \quad a = 8$$

इसलिए 29 वाँ पद $a_{29} = a + (29-1)\text{d}$

$$= 8 + 28 \times 2$$

अतः समान्तर श्रेढ़ी का 29 वाँ पद 64 होगा।

उदाहरण-8. क्या समान्तर श्रेढ़ी 3, 7, 11, ... का एक पद 184 है?

हल: दी गई समान्तर श्रेढ़ी 3, 7, 11, ... है। यहाँ प्रथम पद $a = 3,$ एवं सार्वअन्तर $d = 4$ है।

माना श्रेढ़ी का n वाँ पद 184 है

अतः $\quad a_n = a + (\text{n}-1)\text{d}$

$$\therefore \quad 184 = 3 + (n-1) \times 4$$

या $$184 = 3 + 4n - 4$$

या $$185 = 4n$$

या $$n = \frac{185}{4} = 46\frac{1}{4}$$

चूँकि n का मान एक प्राकृत संख्या नहीं है। अतः 184 दी गई समान्तर श्रेढ़ी का पद नहीं हो सकता है।

उदाहरण-9. दो अकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से भाज्य है?

हल: हम जानते है कि दो अंको वाली (धनात्मक) सबसे छोटी संख्या जिसमें 7 का भाग जाता है, 14 है। इस प्रकार दो अंको वाली 7 से भाज्य संख्याएँ निम्न अनुक्रम में होगी

14, 21, 28, ..., 98

यह एक समान्तर श्रेढ़ी है जिसका प्रथम पद $a = 14$ एवं सार्वअन्तर $d = 7$ है।
माना समान्तर श्रेढ़ी में n पद है। तब n वाँ पद $a_n = 98$ निम्न प्रकार दिया जाता है

$$a_n = a + (\mathrm{n}-1)\,\mathrm{d}$$

अर्थात् $98 = 14 + (\mathrm{n}-1) \times 7$

या $98 = 14 + 7n - 7$

या $91 = 7n$

या $n = \dfrac{91}{7} = 13$

इस प्रकार दो अकों वाली 13 संख्याएँ ऐसी है जो 7 से भाज्य है।

उदाहरण-10. समान्तर श्रेढ़ी 3, 8, 13, ..., 253 के अन्तिम पद से 20 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ श्रेढ़ी का अन्तिम पद $\ell = 253$ है। प्रथम पद $a = 3$ एवं सार्वअन्तर $d = 5$ है। इस प्रकार अन्तिम पद से 20 वाँ पद

$$= \ell - (20-1)d$$
$$= 253 - 19 \times 5 = 253 - 95 = 158$$

इस प्रकार अन्तिम पद से 20 वाँ पद 158 है।

उदाहरण-11. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज है?

हलः स्पष्टतः 10 और 250 के बीच 4 से विभाजित होने वाली प्रथम संख्या 12 है। जब हम 250 को 4 से विभाजित करते है, तो शेषफल 2 प्राप्त होता है। इसप्रकार 4 से विभाजित होने वाली अंतिम संख्या $250 - 2 = 248$ है। अर्थात् 4 से विभाजित होने वाली 10 और 250 के बीच वाली संख्याएँ निम्नांकित में समान्तर श्रेढ़ी बनाती है–

12, 16, ..., 248

अब इस श्रेढ़ी में 4 के गुणजों की संख्या ज्ञात करनी है। माना यह n है। तब $a_n = 248$ अर्थात्

$$a_n = a + (n-1)d$$

या $248 = 12 + (n-1) \times 4$

या $248 = 12 + 4n - 4$

या $240 = 4n$

या $n = 60$

अतः 10 और 250 के बीच में 4 के गुणज 60 होंगे।

5.04 समानतर श्रेढ़ी के पदो का चयन

समान्तर श्रेढ़ी में स्थित संख्याएँ (सम या विषम पद) ज्ञात करने हेतु श्रेढ़ी के पदों का चयन, सुविधा को ध्यान में रखकर निम्न प्रकार किया जा सकता है।

संख्याएँ	पद
3	$a-d, a, a+d$
4	$a-3d, a-d, a+d, a+3d$
5	$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$
6	$a-5d, a-3d, a-d, a+d, a+3d, a+5d$

स्पष्ट है कि यदि पदों की संख्या विषम है, तो मध्य पद a तथा सार्वअन्तर d है और यदि पदों की संख्या सम है तो दो मध्यपद होंगे $a-d$ एवं $a+d$ तथा सार्वअन्तर $2d$ होगा। संख्या सम्बन्धि समस्याएँ निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट रूप से समझी जा सकती है।

उदाहरण-12. तीन संख्याएँ समान्तर श्रेढ़ी में हैं। यदि उनका योग –3 तथा गुणनफल 8 हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हलः : माना समान्तर श्रेढ़ी में ये तीन संख्याएँ निम्न है

$$a-d, a, a+d$$

दिया हुआ है कि संख्याओं का योग –3 है, अर्थात्

$$(a-d)+a+(a+d)=-3$$

या $\quad 3a=-3$

या $\quad a=-1$

यह भी दिया हुआ है कि संख्याओं का गुणनफल 8 है।

अतः $\quad (a-d)\times a\times(a+d)=8$

या $\quad (a^2-d^2)\times a=8$

यहाँ $a=-1$ रखने पर

$$[(-1)^2-d^2]\times(-1)=8$$

या $\quad d^2-1=8$

या $\quad d^2=9$

या $\quad d=\pm 3$

अतः a एवं d के मान रखने पर अभीष्ट संख्याएँ निम्न प्राप्त होती है। यदि $d=3$ तो $-1-3, -1, -1+3$ अर्थात् $-4, -1, -2$ और यदि $d=-3$ तो $-1+3, -1, -1-3$ अर्थात् $2, -1, -4$ अभीष्ट संख्याऐं प्राप्त होती है।

प्रश्नमाला 5.2

1. ज्ञात कीजिए।
   (i) समान्तर श्रेढ़ी $2, 7, 12, ...$ का 10 वाँ पद
   (ii) समान्तर श्रेढ़ी $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, ...$ का 18 वाँ पद
   (iii) समान्तर श्रेढ़ी $9, 13, 17, 21, ...$ का 24 वाँ पद
2. हल कीजिए।
   (i) समान्तर श्रेढ़ी $21, 18, 15, ...$ का कौन सा पद –81 है ?
   (ii) समान्तर श्रेढ़ी $84, 80, 76, ...$ का कौन सा पद शून्य है ?
   (iii) क्या संख्याओं के अनुक्रम $5, 11, 17, 23, ...$ का कोई पद 301 है ?
   (iv) क्या समान्तर श्रेढ़ी $11, 8, 5, 2, ...$ का एक पद –150 है ?
3. यदि समान्तर श्रेढ़ी का छठा पद तथा 17 वाँ पद क्रमशः 19 तथा 41 हैं, तो 40 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
4. किसी समान्तर श्रेढ़ी के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और –8 हैं, तो इसका कौनसा पद शून्य होगा ?
5. किसी समानतर श्रेढ़ी का तीसरा पद 16 है और 7 वाँ पद 5 वें पद से 12 अधिक है, तो समान्तर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।
6. तीन अंको वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य है ?
7. समान्तर श्रेढ़ी 10, 7, 4, ..., –62 का अंतिम पद से 11 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
8. समान्तर श्रेढ़ी 1, 4, 7, 10, ..., 88 में अन्त से 12 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
9. एक समान्तर श्रेढ़ी में 60 पद है। यदि उसका प्रथम पद तथा अंतिम पद क्रमशः 7 तथा 125 है, तो उसका 32 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
10. चार संख्याएँ समान्तर श्रेढ़ी में है। यदि संख्याओं का योग 50 तथा सबसे बड़ी संख्या, सबसे छोटी संख्या की चार गुनी है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

5.05 समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग

इस अनुच्छेद में हम समान्तर श्रेढ़ी के योग का सूत्र प्राप्त करेंगे। इसकी आवश्यकता को समझने हेतु हम एक उदारहण लेते है। लता को जन्म दिन पर उसकी माँ 500 रु देती है। दूसरे, तीसरे, चौथे, पाँचवे जन्मदिवस पर क्रमशः 600, 700, 800, 900 रुपये माँ ने लता को दिये। यही क्रम उसके 18 वर्ष की उम्र तक चलता है, तो 18 वें जन्म दिन पर उसके पास एकत्र राशि की गणना सभी जन्मदिनों पर प्राप्त राशि को जोड़कर निकाली जा सकेगी, जो कि एक श्रमसाध्य प्रक्रिया है चूँकि 500, 600, 700, 800, . . . संख्याऐं समान्तर श्रेढ़ी में है अतः इस प्रकार प्राप्त 18 पदों को जोड़ने के लिए अर्थात् समान्तर श्रेढ़ी के पदों का योग करने के लिए हम निम्न विधि से सूत्र प्राप्त करते है। इस सूत्र में उपस्थित राशियों के मान रखकर समान्तर श्रेढ़ी का योग आसानी से ज्ञात किया जा सकेगा।

माना समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a एव सार्वअन्तर d है तथा इसके n पदो का योगफल S_n है अतः समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों को इस प्रकार लिखते है कि

$$a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d$$

तब $$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+...+[a+(n-2)d]+[a+(n-1)d] \quad ... (i)$$

पदो को विपरीत क्रम में लिखने पर योग मेंको ई अन्तर नहीं आता हैं अतः हम लिख सकते हैं कि

$$S_n = [a+(n-1)d]+[a+(n-2)d]+...+(a+2d)+(a+d)+a \quad ... (ii)$$

(i) तथा (ii) के संगत पदों को जोड़ने पर

$$2S_n = [2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+...+[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]$$ (चूँकि इसमें n पद है)

अतः $$2S_n = n[2a+(n-1)d]$$

या $$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

यह सूत्र समान्तर श्रेढ़ीके प्रथम पद एवं सार्वअन्तर ज्ञात होने पर n पदों के योगफल को दर्शाता है।

यदि श्रेढ़ी में अन्तिम पद ℓ दिया हुआ है, तो सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ को निम्न रूप में भी लिख कर योगफल प्राप्त किया जा सकता है।

अर्थात् $$S_n = \frac{n}{2}[a+a+(n-1)d]$$

या $$S_n = \frac{n}{2}[a+\ell]$$ [चूंकि ℓ = अंतिम पद = n वाँ पद $= a+(n-1)d$ है]

इस प्रकार किसी समान्तर श्रेढ़ी में n पद है, तो $a_n = \ell$ अन्तिम पद होगा अतः

n पदों का योग $= S_n = \frac{n}{2}$ [प्रथम पद + अंतिम पद]

यहाँ यह समझना आवश्यक है कि समान्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद, उसके प्रथम n पदों के योग और प्रथम $(n-1)$ पदों के योग के अन्तर के बराबर होता है।

अर्थात् $a_n = S_n - S_{n-1}$ है।

उपरोक्त सूत्रों के प्रयोग से समान्तर श्रेढ़ी के पदों की योगफल आधारित समस्याओं का हल निम्न उदारहणों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण-13. योगफल ज्ञात कीजिए

(i) समान्तर श्रेढ़ी $1, 4, 7, 10,........$ के 20 पदों का

(ii) समान्तर श्रेढ़ी $2, 7, 12,........$ के 10 पदों का

हल: (i) समान्तर श्रेढ़ी $1, 4, 7, 10,........$ दी हुई है।

यहाँ प्रथम पद $a=1$ तथा सार्वअन्तर $d=3$ है

चूँकि n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ होता है।

अतः 20 पदों का योग $$S_{20} = \frac{20}{2}[2\times1+(20-1)\times3]$$
$$= 10[2+57] = 590$$

अतः अभीष्ट योगफल $= 590$ है

(ii) समान्तर श्रेढ़ी $2, 7, 12, ...$ दी हुई है।

यहाँ प्रथम पद $a = 2$ सार्वअन्तर $d = 5$ है। चूँकि n पदो का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ होता है

अतः 10 पदों का योगफल $\qquad S_{10} = \frac{10}{2}[2 \times 2 + (10-1) \times 5]$

या $\qquad S_{10} = 5[4 + 45] = 5 \times 49 = 245$

अतः अभीष्ट योगफल $= 245$

उदाहरण-15. निम्नलिखित का योगफल ज्ञात कीजिए

(i) $34 + 32 + 30 + ... + 10$

(ii) $(-5) + (-8) + (-11) + ... + (-230)$

हलः (i) दी हुई श्रेढ़ी $34 + 32 + 30 + ... + 10$ एक समान्तर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद $a = 34$ अन्तिम पद $\ell = a_n = 10$ तथा सार्वअन्तर $d = -2$ है।

अत : $\qquad a_n = a + (n-1)d$

या $\qquad 10 = 34 + (n-1)(-2)$

या $\qquad 10 = 34 - 2n + 2$

या $\qquad 2n = 26$

या $\qquad n = 13$

श्रेढ़ी का योगफल $\qquad S_n = \frac{n}{2}[a + \ell]$

अतः $\qquad S_{13} = \frac{13}{2}[34 + 10] = 13 \times 22 = 286$

(ii) दी हुई श्रेढ़ी $(-5) + (-8) + (-11) + ... + (-230)$ एक समान्तर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद $a = -5$ तथा सर्वअन्तर $d = -3$ एवं अन्तिम n वाँ पद $a_n = \ell = -230$ है

अतः $\qquad a_n = a + (n-1)d$

यहाँ $\qquad -230 = -5 + (n-1) \times (-3)$

या $\qquad -230 = -5 - 3n + 3$

या $\qquad 3n = 228$

या $\qquad n = \frac{228}{3} = 76$

$\because \qquad S_n = \frac{n}{2}[a + \ell]$

$\therefore \qquad S_{76} = \frac{76}{2}[-5 + (-230)] = 38 \times (-235) = -8930$

उदाहरण-15. समान्तर श्रेढ़ी $54, 51, 48, ...$ के कितने पदों का योगफल 513 होगा ?

हलः समान्तर श्रेढ़ी $54, 51, 48, ...$ का प्रथम पद $a = 54$ एवं सार्वअन्तर $d = -3$ है।

माना n पदों का योग $S_n = 513$ है तब समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

यहाँ $$513=\frac{n}{2}[2\times 54+(n-1)\times(-3)]$$

या $$513=\frac{n}{2}[108-3n+3]$$

या $$513\times 2=n(111-3n)$$

या $$3n^2-111n+1026=0$$

या $$n^2-37n+342=0$$

गुणनखण्ड करने पर

या $$n^2-18n-19n+342=0$$

या $$n(n-18)-19(n-18)=0$$

या $$(n-19)(n-18)=0$$

या $$n=19 \text{ एवं } n=18$$

यहाँ सार्वअन्तर $d=-3$ (ऋणात्मक है)

एवं 19 वाँ पद $$=a_{19}=a+(n-1)d$$

$$=54+(19-1)(-3)$$

यहाँ 19 वाँ पद शून्य है। अतः 18 पदों का योग एवं 19 पदों का योग बराबर एवं 513 होगा।

उदाहरण-16. समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 15 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए, जिसका n वाँ पद $a_n=9-5n$ है।

हलः चूँकि श्रेढ़ी का n वाँ पद $a_n=9-5n$

अतः $$a_1=9-5\times 1=4$$

$$a_2=9-5\times 2=-1 \qquad =\frac{15}{2}[8-70]$$

$$a_3=9-5\times 3=-6$$

इस प्रकार प्राप्त संख्याओं की सूचि $4,-1,-6,.......$ प्राप्त होती है,

जो कि समान्तर श्रेढ़ी है, जिसका प्रथम पद $a=4$ एवं सार्वअन्तर $d=-5$ है।

इस प्रकार इस श्रेढ़ीके प्रथम n पदों का योगफल

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

यहाँ $$S_{15}=\frac{15}{2}[2\times 4+(15-1)\times(-5)]$$

$$=\frac{15}{2}[8-70]=-(15\times 31)=-465$$

अतः समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 15 पदों का योगफल –465 होगा।

उदाहरण-17. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो उसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हलः दिया हुआ है कि $S_7=49$ एवं $S_{17}=289$

समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग चूँकि

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

यहाँ $S_7 = \frac{7}{2}[2a + (7-1)d] = 49$

तथा $S_{17} = \frac{17}{2}[2a + (17-1)d] = 289$

अतः उपरोक्त दोनों समीकरणोंको सरल रूप में लिखने पर प्रथम समीकरण

$$2a + 6d = \frac{49 \times 2}{7}$$

या $a + 3d = 7$ ... (i)

एवं द्वितीय समीकरण $2a + 16d = \frac{289 \times 2}{17}$

या $a + 8d = 17$ ... (ii)

समीकरण (i) में से (ii) को घटाने पर,

$$5d = 10$$

या $d = 2$

d का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$a + 3 \times 2 = 7$$

या $a = 7 - 6$

या $a = 1$

अतः a एवं d के मान समान्तर श्रेढ़ी के n पदोंके योग के सूत्र में रखने पर n पदों का योग,

$$S_n = \frac{1}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2] = \frac{n}{2}[2 + 2n - 2] = n^2$$

अतः समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग n^2 है।

उदाहरण-18. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो पहला पद क्या है ? पहले दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है ? इसी प्रकार तीसरे, 10 वें और n वें पद ज्ञात कीजिए।

हलः दिया हुआ है कि समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $S_n = 4n - n^2$ है

अतः $n = 1$ पर $S_1 = 4 \times 1 - (1)^2 = 4 - 1 = 3$

अतः प्रथम पद 3 है।

प्रथम दो पदों के योग के लिए

$$S_2 = 4 \times 2 - (2)^2 = 8 - 4 = 4$$

अतः प्रथम दो पदों का योग 4 है।

इस प्रकार दूसरा पद $a_2 = S_2 - S_1 = 4 - 3 = 1$

अर्थात् श्रेढ़ी का दूसरा पद 1 है।

यहाँ पहले तीन पदों का योग $S_3 = 4 \times 3 - (3)^2 = 12 - 9 = 3$

अतः श्रेढ़ी का तीसरा पद $a_3 = S_3 - S_2 = 3 - 4 = -1$

इस प्रकार समान्तर श्रेढ़ी $3, 1, -1, ...$ प्राप्त हुई है। इसका सार्वअन्तर $d = a_3 - a_2 = -1 - 1 = -2$ होगा।

n वाँ पद या = $a_n = a + (n-1)d$

यहाँ प्रथम पद $a = 3,$ सार्वअन्तर $d = -2,$ है इस प्रकार

$$a_n = 3 + (n-1) \times (-2) = 3 - 2n + 2 = 5 - 2n$$

अर्थात् n वाँ पद $a_n = 5 - 2n$ है। अतः 10 वें पद के लिए $n = 10$ रखने पर

$$a_{10} = 5 - 2 \times 10 = 5 - 20 = -15$$

इस प्रकार 10 वाँ पद –15 होगा।

उदाहरण-19. 250 से 1000 तक 3 से भाज्य प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: : स्पष्ट है कि 250 से 1000 के बीच 3 से भाज्य संख्याएँ 252, 255, 258, . . ., 999 है जो कि एक समान्तर श्रेढ़ी है।

इसका प्रथम पद $a = 252,$ अन्तिम पद $a_n = \ell = 999$ एवं सार्वअन्तर $d = 3$ है

इस प्रकार यहाँ $\quad a_n = a + (n-1)d$

$\therefore \quad 999 = 252 + (n-1) \times 3$

या $\quad 999 = 252 + 3n - 3$

या $\quad 999 = 249 + 3n$

या $\quad 3n = 750$

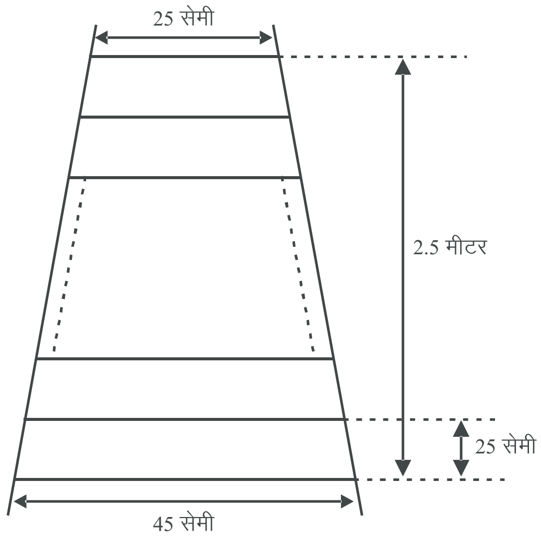
या $\quad n = 250$

अतः अभीष्ट योगफल $\quad S_n = \dfrac{n}{2}(a + \ell)$

अर्थात् $\quad S_{250} = \dfrac{250}{2}(252 + 999)$

इस प्रकार अभीष्ट योगफल 156375 होगा।

उदाहरण-20. एक सीढ़ी के क्रमागत डंडे परस्पर 25 सेमी. की दूरी पर है। (नीचे दिए गए चित्र में देखिए) डंडो की लम्बाई एक समान रूप से घटती जाती है तथा सबसे निचले डंडे की लम्बाई 45 सेमी. है और सबसे ऊपर वाले डंडे की लम्बाई 25 सेमी. है। यदि ऊपरी और निचले डंडे के बीच की दूरी 2.5 मी. है, तो डंडों को बनाने के लिए कितनी लम्बाई की लकड़ी लेना आवश्यक होगा?



हल: दिया गया है कि सीढ़ी के दो क्रमागत डंडों के बीच की दूरी 25 सेमी है तथा सबसे ऊपरी एवं सबसे निचले डंडों के मध्य दूरी 2.5 मी. अर्थात् 250 सेमी. है।

अतः सीढ़ी में डंडों की संख्या $= \dfrac{250}{25} + 1 = 10 + 1 = 11$

यह भी दिया हुआ है कि डंडों की लम्बाई नीचे से ऊपर जाने पर एक समान रूप से घटती जाती है तथा सबसे निचले डंड़े की लम्बाई 45 सेमी एवं सबसे ऊपर के डंडे की लम्बाई 25 सेमी है। इस प्रकार स्पष्ट है कि डंडों की लम्बाई समान्तर श्रेढ़ी में है जिसका प्रथम पद $a = 45$ सेमी. एवं 11 वाँ पद (अन्तिम पद) $\ell = 25$ सेमी है।

अतः डंडों को बनाने वाली लकड़ी की कुल लम्बाई = समान्तर श्रेढ़ी के 11 पदों का योग

$$\because \qquad S_n = \frac{n}{2}(a+\ell)$$

अतः

$$S_{11} = \frac{11}{2}(45+25) \text{ सेमी}$$

$$= 11 \times 35 = 385 \text{ सेमी.}$$

अर्थात् लकड़ी की कुल लम्बाई 3.85 मी. होगी।

प्रश्नमाला 5.3

1. निम्नलिखित समान्तर श्रेढ़ियों का योगफल ज्ञात कीजिए।

   (i) $1, 3, 5, 7, \ldots, 12$ पदों तक

   (ii) $8, 3, -2, \ldots, 22$ पदों तक

   (iii) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots, 11$ पदों तक

2. निम्नलिखित का योगफल ज्ञात कीजिए।

   (i) $3+11+19+, \ldots, +803$ (ii) $7+10\frac{1}{2}+14+, \ldots, +84$

3. पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

   (i) समान्तर श्रेढ़ी $9, 17, 25, \ldots.$ के कितने पद लिए जाये कि उनका योगफल 636 हो ?

   (ii) समान्तर श्रेढ़ी $63, 60, 57, \ldots.$ के कितने पद लिए जाये कि उनका योगफल 693 हों?

4. निम्न श्रेढ़ियों के पहले 25 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका n वाँ पद दिया हैं :

   (i) $a_n = 3+4n$ (ii) $a_n = 7-3n$

5. एक समान्तर श्रेढ़ी के पहले 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसमें द्वितीय तथा तृतीय पद क्रमशः 14 तथा 18 है।
6. किसी समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम एवं अन्तिम पद क्रमशः 17 और 350 है। यदि सार्वअन्तर 9 हो तो समान्तर श्रेढ़ी में पदों की संख्या कितनी है तथा उनका योग क्या है ?
7. 1 से 1000 के बीच 3 से भाज्य सभी विषम संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।
8. एक समान्तर श्रेढ़ी में प्रथम पद 8 है, n वाँ पद 33 है। तथा पहले n पदों का योग 123 है तो n तथा सार्वअन्तर d को ज्ञात कीजिए।
9. 280 रु. की राशि चार पुरस्कार देने के लिए रखी गई है। यदि प्रथम पुरस्कार के बाद का प्रत्येक पुरस्कार, अपने ठीक पहले पुरस्कार से 20 रु. कम हो, तो प्रत्येक पुरस्कार की राशि ज्ञात कीजिए।
10. एक टेलीविजन सेटों का निर्माता, तीसरे वर्ष 600 टी.वी. तथा सातवें वर्ष में 700 टी.वी. सेटों का उत्पादन करता है। यह मानते हुए कि प्रत्येक वर्ष उत्पादन में एक समान रूप से एक निश्चित संख्या में वृद्धि होती है, ज्ञात कीजिए

    (i) प्रथम वर्ष में उत्पादन (ii)10 वें वर्ष में उत्पादन (iii) 7 वर्षों में कूल उत्पादन

विविध प्रश्नमाला–5

1. दो समान्तर श्रेढ़ियों का सार्वअन्तर समान है। उनमें से एक का पहला पद 8 है और दूसरे का 3 है। उनके 30 वें पदों के बीच का अन्तर है:

   (क) 11 (ख) 3 (ग) 8 (घ)5

2. यदि $18, a, b, -3$ समान्तर श्रेढ़ी में है तो $a+b=$

   (क) 19 (ख) 7 (ग) 11 (घ) 15

3. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का 7 वाँ तथा 13 वाँ पद क्रमशः 34 तथा 64 है, तो इसका 18 वाँ पद है:

(क) 89 (ख) 88 (ग) 87 (घ) 90

4. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 2 एवं सार्वअन्तर 8 है तथा n पदो का योग 90 है, तो n का मान होगा:

(क) 3 (ख) 4 (ग) 5 (घ) 6

5. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल है, तो 164 इसका कौनसा पद है:

(क) 12 वाँ (ख) 15 वाँ (ग) 27 वाँ (घ) 20 वाँ

6. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदो का योगफल S_n है तथा $S_{2n} = 3S_n$ है, तो $S_{3n} : S_n$ होगा:

(क) 10 (ख) 11 (ग) 6 (घ) 4

7. एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम एवं अंतिम पद क्रमशः 1 तथा 11 है। यदि इसके पदों का योगफल 36 है, तो इसके पदों का संख्या होगी:

(क) 5 (ख) 6 (ग) 9 (घ) 11

8. समान्तर श्रेढ़ी $3,5,7,9,....,201$ का अन्त से 5 वाँ पद लिखिए।

9. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद $\frac{4}{5}, a, 2$ है, तो a का मान लिखिए।

10. प्रथम 1000 धनपूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।

11. क्या संख्याओं का अनुक्रम $5, 11, 17, 23, ...$ में कोई पद 299 है ?

12. समान्तर श्रेढ़ी $20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, 17\frac{3}{4}, ...$ का कौनसा पद, प्रथम ऋणात्मक पद है?

13. चार संख्याएं समान्तर श्रेढ़ी में है। यदि उनका योग 20 तथा उनके वर्गो का योग 120 हो, तो संख्याऐं ज्ञात कीजिए।

14. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग $\frac{3n^2}{2} + \frac{5n}{2}$ हो, तो उसका 25 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

15. एक पंक्ति के मकानों को क्रमागत रूप सें संख्या 1 से 49 तक अंकित किया गया है। दर्शाइये कि का एक मान ऐसा है कि x से अंकित मकान से पहले के मकानों की संख्याओं का योग उसके बाद आने वाले मकानों की संख्याओं के योग के बराबर है। x का मान ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप $a, a+d, a+2d, ...$ है जहाँ a प्रथम पद एवं d सार्व अन्तर है।
2. संख्याओं का अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी होता है यदि अंतर $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, ...$ समान मान प्राप्त हो। यह एक समान्तर श्रेढ़ी का सार्वअन्तर कहलाता है।
3. समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद (n वाँ पद) $a_n = a + (n-1)d$ होता है, जहाँ a प्रथम पद एवं d सार्वअन्तर है।
4. समान्तर श्रेढ़ी $a, a+d, a+2d, ... + (n-1)d, ...$ के n पदो का योगफल $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

   या $S_n = \frac{n}{2}[a + \ell]$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ $\ell =$ अंतिम पद $= n$ वाँ पद $= a + (n-1)d$ है।
5. समान्तर श्रेढ़ी के पदों का चयन निम्नलिखित रूप में करना चाहिये।

पदों की संख्या	पद
3	$a-d, a, a+d$
4	$a-3d, a-d, a+d, a+3d$
5	$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$

6. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ीके पदों का योग दिया हुआ है, तो श्रेढ़ी का n वाँ पदें निम्नांकित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 5.1

1. (i) $a=6, d=3$ (ii) $a=-7, d=-2$ (iii) $a=\frac{3}{2}, d=-1$ (iv) $a=1, d=-3$

(v) $a=-1, d=\frac{5}{4}$ (vi) $a=3, d=-2$ (vii) $a=3, d=-5$

2. (i) $-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}$ (iii) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9$ (iv) $4, 1, -2, -5$

(v) $11, 7, 3, -1$ (vi) $-1.25, -1.50, -1.75, -2.00$ (vii) $20, \frac{77}{4}, \frac{74}{4}, \frac{71}{4}$

3. (i) हाँ, $d=\frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}$ (ii) हाँ, $d=0; \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}$ (iii) नहीं (iv) नहीं

(v) हाँ, $d=\sqrt{2}; \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}, \sqrt{128}$ (vi) हाँ, $d=a; 5a, 6a, 7a, 8a$

(vii) नहीं (viii) हाँ

प्रश्नमाला 5.2

1. (i) 47 (ii) $35\sqrt{2}$ (iii) 101 2. (i) 35 वाँ (ii) 22 वाँ (iii) नहीं (iv) नहीं

3. 87 4. 5 वाँ 5. 4, 10, 16, 22 6. 128 7. −32 8. 55

9. 69 10. 5, 10, 15, 20

प्रश्नमाला 5.3

1. (i) 144 (ii) -979 (iii) $\frac{33}{20}$ 2. (i) 40703 (ii) $1046\frac{1}{2}$ 3. (i) 12 (ii) 21, 22

4. (i) 1375 (ii) -800 5. 5610 6. 38, 6973 7. 83667 8.

9. रु. 100, रु. 80, रु. 60, रु. 40 10. (i) 550 (ii) 775 (iii) 4375

विविध प्रश्नमाला—5

1. (घ) 2. (घ) 3. (क) 4. (ग) 5. (ग) 6. (ग) 7. (ख)

8. 193 9. $\frac{7}{5}$ 10. 500500 11. हाँ 12. 28 वाँ 13. 2, 4, 6, 8 या 8, 6, 4, 2 है

14. 76 15. $x=35$