ACERH4

अध्याय–16

आकृतियाँ (द्विविमीय एवं त्रिविमीय)

FIGURES (TWO & THREE DIMENSIONAL)

हमने बहुत सी आकृतियों के बारे में जाना है और उनके गुणों को समझा है। इनमें से बहुत सी आकृतियों को हमने अपने आस–पास की वस्तुओं में छिपे हुए अथवा स्पष्ट रूप से दिखते हुए पाया है। हमने रेखा, रेखाखण्ड, त्रिभुज, चतुर्भुज व उनके विशेष प्रकार (सम चतुर्भुज, आयत, वर्ग, समलम्ब चतुर्भुज आदि) एवं उससे ज्यादा भुजाओं वाली आकृतियों के बारे में अध्ययन किया है।

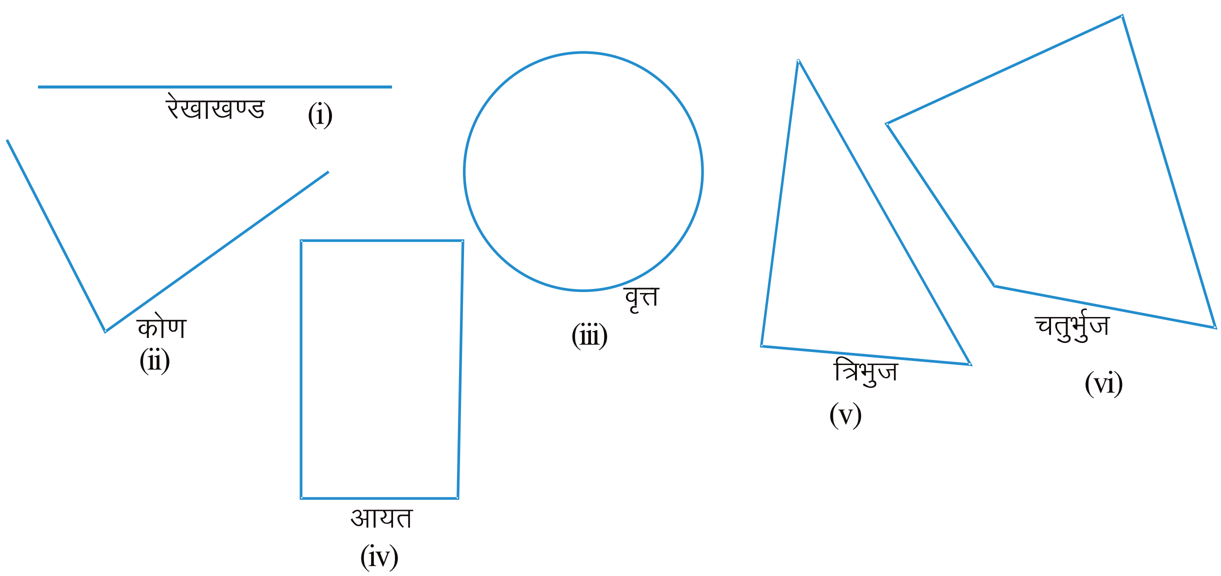
पूर्व की कक्षाओं में आपने अपने आस–पास पाए जाने वाले विभिन्न आकृतियों की पहचान की थी। क्या आप बता सकते हैं कि आयत की आकृति आपको कहां–कहां दिखती है?

और त्रिभुज कहां–कहां दिखता है?

त्रिभुज, सभी प्रकार के चतुर्भुज, बहुभुज, वृत्त आदि सभी किसी तल या दो आयाम में बनते हैं। अर्थात् इनमें लम्बाई है, चौड़ाई है किन्तु ऊँचाई नहीं है। लेकिन वास्तविक वस्तुओं में तो ऊँचाई होती है फिर कैसे इस ऊँचाई को भी चित्रों में प्रदर्शित करें।

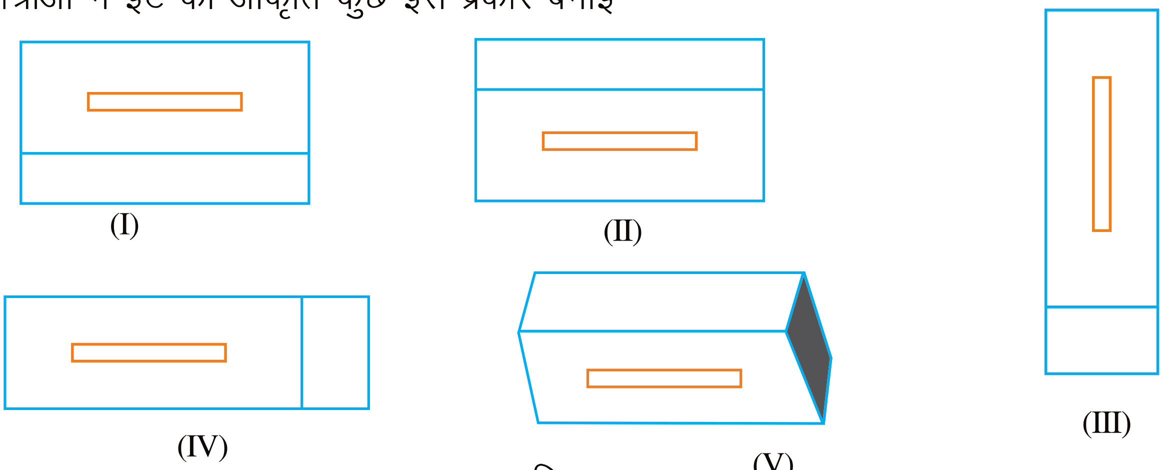
आइए करके देखें (Come do and observe)

आप निम्न आकृतियों से पूर्व परिचित हैं। आप इनकी रचना करना भी जानते हैं–



चित्र–16.1

क्या आप ईंट, डिब्बा, गोला जैसी वस्तुओं को कागज पर बना सकते हैं? कुछ छात्र/छात्राओं ने ईंट की आकृति कुछ इस प्रकार बनाई–



चित्र–16.2

क्या यह सब ठीक दिखते हैं? ये सभी वैसे दिख रही हैं जैसी ईंटें दिखती हैं?

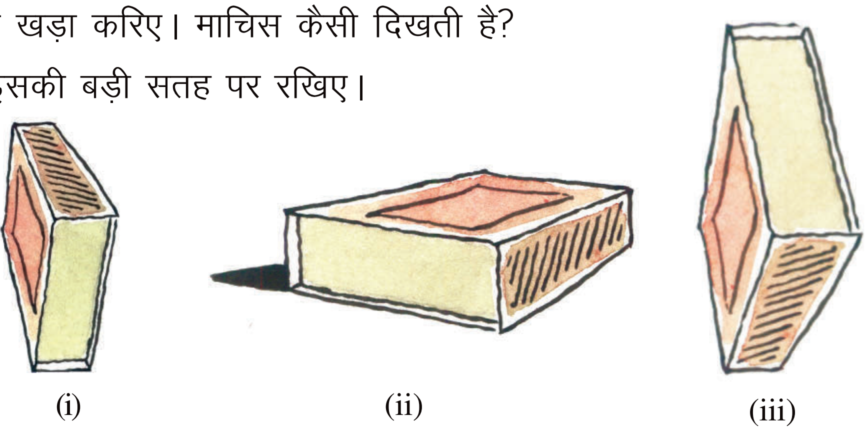
यह सभी आकृतियां एक दूसरे से भिन्न हैं।

क्या आप बता सकते हैं कि यह अलग–अलग क्यों हैं?

क्रियाकलाप 1. (Activity 1)

इस बात को समझने के लिए माचिस का खाली डिब्बी लेकर माचिस को जलाने वाली (बारूद) सतह पर खड़ा करिए। माचिस कैसी दिखती है?

अब इसे इसकी बड़ी सतह पर रखिए।



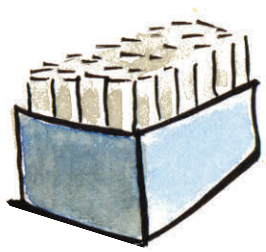
चित्र–16.3

यह स्पष्ट है कि माचिस अब कुछ अलग तरह की दिख रही है। चित्र 16.3 (iii) को भी देखिए। इसमें छोटी सतह पर डिब्बी को खड़ा किया गया है। तीनों चित्र माचिस के हैं किन्तु अलग–अलग स्थिति के हैं।

ईंट के चित्र भी अलग–अलग स्थिति के हैं। ईंटें लेकर उन्हें विभिन्न चित्रों के आधार पर रख कर देखिए। क्या आप ऊपर के चित्रों के समान ईंटों को रख पाए?

क्रियाकलाप 2. (Activity 2)

आपने चॉक का डिब्बा देखा होगा। उसमें चॉक सीधे खड़े रखे जाते हैं। चॉक का एक भरा डिब्बा लीजिए और ठीक ऊपर से देखिए। आपको चॉक का वृत्तीय सिरा तो दिखेगा किन्तु उसकी लम्बाई नहीं।



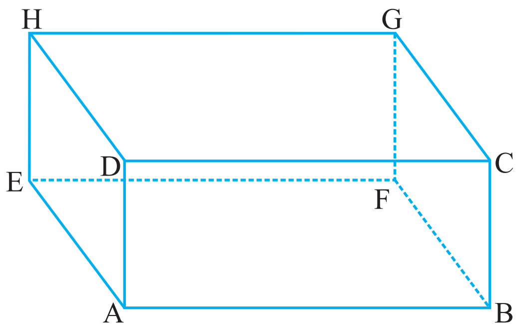
चित्र 16.4

अगर आप उसका चित्र बनाएँ तो कैसा दिखेगा? अनीता ने उसका चित्र कुछ इस प्रकार बनाया (चित्र 16.4) चॉक के खुले डिब्बे को सामने से बनाएं तो वह कैसा दिखेगा?

इसमें अब चॉक का ऊपरी हिस्सा नहीं दिखेगा।

अभ्यास 1 (Practice 1)

ऐसी 5 वस्तुएं लेकर उनको विभिन्न स्थितियों से देखकर उन वस्तुओं का चित्र बनाइये।



चित्र 16.5

वस्तु की अलग–अलग स्थितियों का चित्र (Figure of an item with different position)

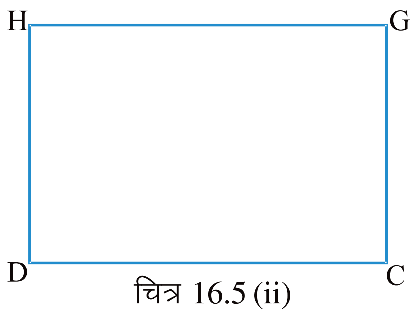
आइए, इस घनाभ की आकृति 16.5 को ध्यान से देखें–

इस आकृति को विभिन्न दिशाओं से देखने पर कुछ इस प्रकार दिखाई देता है–

ठीक सामने से देखने पर

चित्र 16.5 (i)

ठीक ऊपर से देखने पर



चित्र 16.5 (ii)

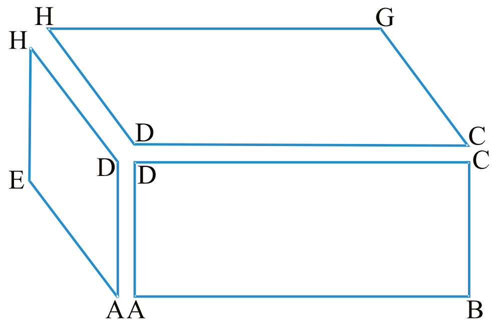
बाँये (बगल) से देखने पर

चित्र 16.5 (iii)

उपरोक्त तीनों आकृतियों को मिलाकर यदि एक आकृति बनाये तो पहले की आकृति बननी चाहिए। जिस प्रकार पहले की आकृति में एक विशेष झुकाव (कोण) के साथ इसकी फलकें आपस में जुड़ी हुई हैं उसी प्रकार इन तीनों आकृतियों को भी उसी विशेष झुकाव (कोण) के साथ जोड़ा जाये

तो पुनः वही आकृति प्राप्त होगी। यहाँ पर घनाभ की तीन ओर की फलकों को आपस में जोड़ा गया है। चित्र 16.5(iv)

अब यदि घनाभ की सभी छह फलकों को लेकर आपस में जोड़ें तो आकृति 16.5 प्राप्त होगी।

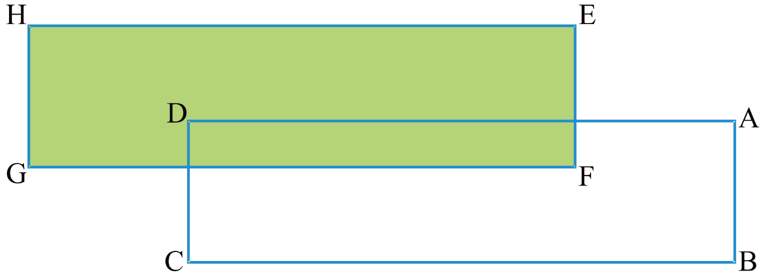


चित्र 16.5 (iv)

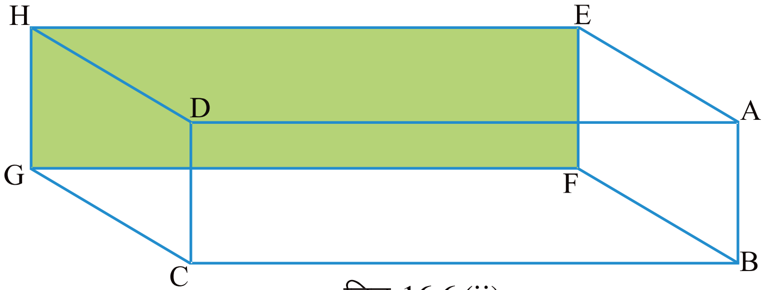
क्रियाकलाप–3.

<u>घनाभ की आकृति बनाना</u> (Construct a figure of cuboid)

रचना – एक गत्ते का आयताकार टुकड़ा लेते हैं। कागज पर आयताकार गत्ते के टुकड़े को रखकर उसके चारों तरफ पेंसिल चलाते हैं। इसे चित्र में ABCD से दर्शाया गया है। अब गत्ते के टुकड़े के चित्रानुसार बाँयी ओर खिसका कर रखते हैं और पुनः उसके चारों ओर पेसिंल चलाते हैं। चित्र में इसे EFGH से दर्शाया गया है। इस EFGH को छायांकित किया गया है।



चित्र 16.6 (i)



चित्र 16.6 (ii)

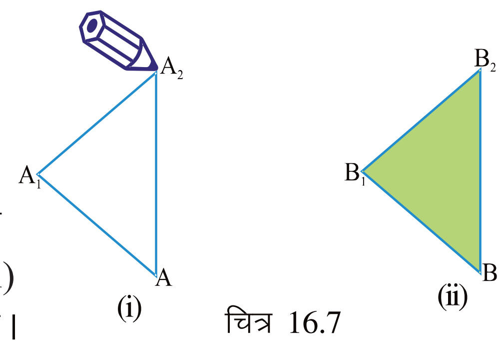
आकृति–16.6(ii) के अनुसार क्रमशः AE, BF, CG तथा DH को मिलाया गया है जो अभीष्ट घनाभ की आकृति है।

इसमें 6 आयताकार फलक– ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH, EFGH हैं तथा 12 कोर– AB, BC, CD, DA, AE, BF, CG, DH, EF, FG, GH, HE हैं एवं आठ शीर्ष– A,B,C,D,E,F,G,H हैं।

क्रियाकलाप–4.

<u>त्रिभुजीय प्रिज्म की आकृति बनाना</u> –
(Make a figure of triangular prism)

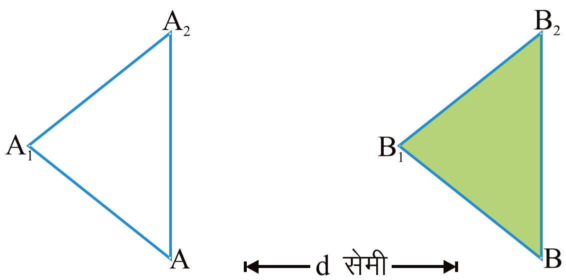
रचना एक त्रिभुजाकार गत्ते का टुकड़ा लीजिए और एक कागज़ पर उसके चारों ओर पेन्सिल चलाकर आकृति (i) तथा उससे कुछ दूरी पर इसी प्रकार आकृति (ii) बनाइए। अब चित्र 16.7 (iii) की भांति नामांकित कीजिए तथा AB,



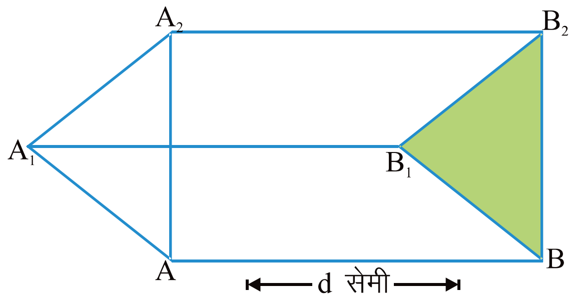
चित्र 16.7

A_1B_1 एवं A_2B_2 को मिलाइए और अब आपके सामने जो आकृति बनेगी वह चित्र 16.7 (iv) की भाँति

होगी, जो कि अभीष्ट त्रिभुजीय प्रिज्म है।



चित्र 16.7 (iii)



चित्र 16.7 (iv)

इसमें तीन आयताकार फलक $AB\,B_2A_2$, $A_1\,A_2\,B_2\,B_1$ तथा $AA_1\,B_1B$ और दो त्रिभुजाकार फलक $AA_1\,A_2$ तथा $BB_1\,B_2$ है। इसमें 9 कोरें AB, $A_1\,B_1$, A_2B_2, AA_1, $A_1\,A_2$, A_2A, BB_1, B_1B_2 तथा B_2B हैं और छह शीर्ष A, A_1, A_2, B, B_1 तथा B_2 हैं।

अभ्यास–2

1. वर्गाकार गत्ते की सहायता से घन की रचना कीजिए।
2. एक त्रिभुजीय गत्ते की सहायता से 4 सेमी लम्बे प्रिज्म की रचना कीजिए।

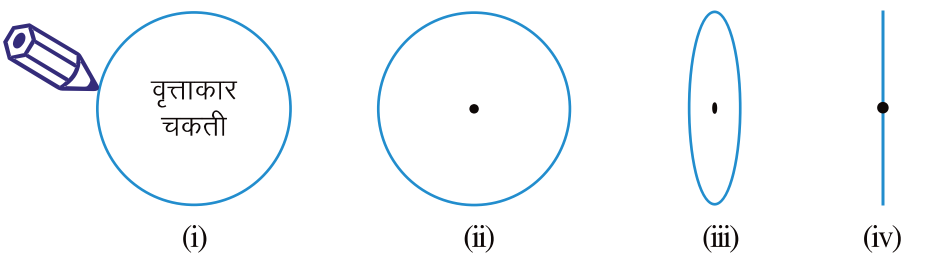
क्रियाकलाप–5.

बेलन की आकृति बनाना

Construct a cylindrical shape (cylinder)

रचना – एक वृत्ताकार चकती लेकर उसके चारों ओर पेंसिल से परिधि खींचिए एवं केन्द्र बिन्दु भी निर्धारित कीजिए चित्र 16.8 (i) & (ii) अब आपके पास चित्र 16.8 (ii) जैसी वृत्ताकार आकृति है, जो कि चकती को ठीक सामने से देखने पर दिखाई देती है। अब चकती को थोड़ा घुमाकर उसकी तिरछी स्थिति को देखिये और जैसे दिखाई देता है लगभग वैसी आकृति बनाईये। चित्र 16.8 (iii)

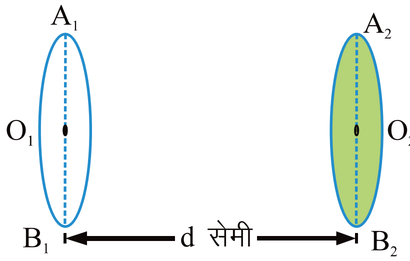
इसके बाद थोड़ा ओर घुमाकर चकती के एक किनारे से देखें तो यह चित्र 16.8 (iv) जैसी दिखाई देगी।



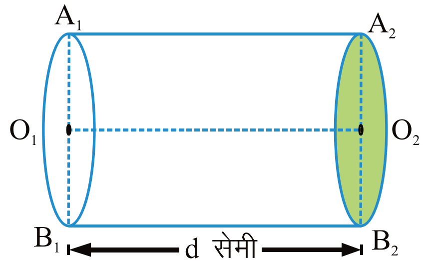
चित्र 16.8

अब चित्र 16.8 (iii) की आकृति के समान कुछ दूरी पर दो आकृतियाँ बनाइये। चित्र 16.8 (v) के अनुसार व्यास $A_1\,B_1$ और व्यास A_2B_2 को मिलाइये। उसके बाद $A_1\,A_2$ और $B_1\,B_2$ को मिलाइये। इस प्रकार एक बेलन की आकृति बन जाती है।

इसमें दोनों सिरों पर दो वृत्तीय फलक हैं एवं मध्य भाग वक्रीय है।



चित्र 16.8 (v)

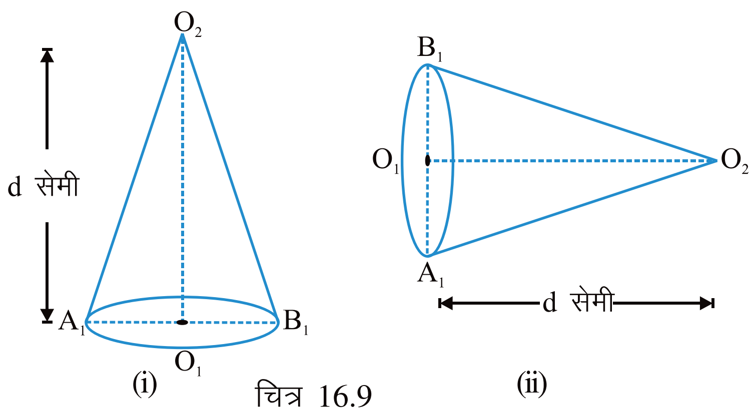


चित्र 16.8 (vi)

क्रियाकलाप 6

शंकु की आकृति बनाना – (Construction of cone)

चित्र 16.8 (iii) के समान एक आकृति बनाइये तथा कुछ दूरी पर लगभग मध्य में एक बिन्दु O_2 ले लें तथा O_2A_1 और O_2B_1 मिला देवें तो प्राप्त आकृति शंकु की आकृति होती है। चित्र 16.9 (i & ii) इस आकृति में एक वृत्ताकार फलक तथा एक शीर्ष और वक्रीय पृष्ठीय भाग होता है।



चित्र 16.9

अभ्यास–3

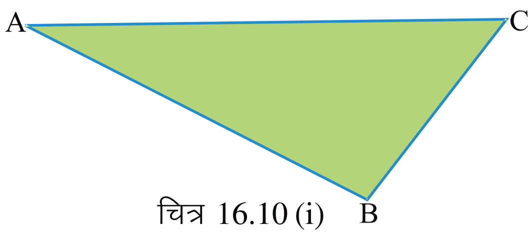
1. 5 सेमी लम्बाई के एक बेलन की रचना कीजिए।
2. 3 सेमी ऊँचाई के एक शंकु की रचना कीजए।
3. कागज मोड़कर बेलन एवं शंकु के मॉडल बनाइये।

क्रियाकलाप 7.

चतुष्फलक की आकृति बनाना – (Construction of quadrilateral)

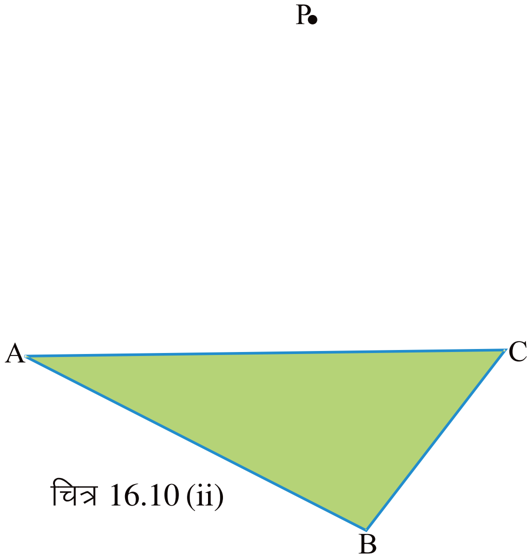
रचना

1. चित्र 16.10 (i) के अनुसार एक त्रिभुज बनाइये और छायांकित कीजिए।
2. अब उस त्रिभुज के ऊपर चित्र 16.10 (ii) के अनुसार कुछ दूरी पर एक बिन्दु P लीजिए।
3. अब उस त्रिभुज के शीर्षों A, B, C को क्रमशः बिन्दु P से मिलाइये। प्राप्त आकृति चित्र 16.10 (iii) की भांति होगी। यह अभीष्ट चतुष्फलक है।

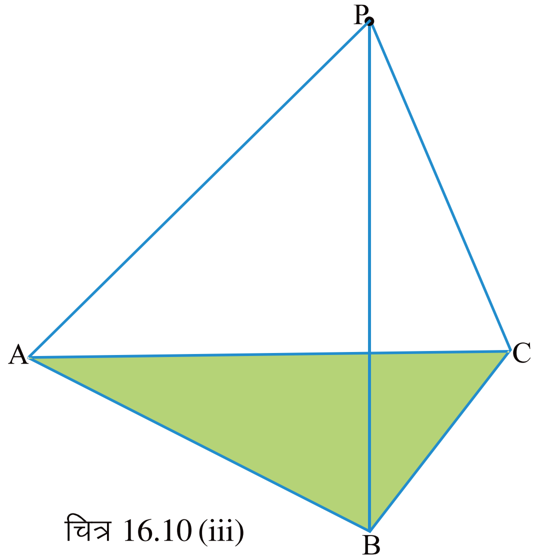


चित्र 16.10 (i)

इसमें चार त्रिभुजीय फलक ABC, BCP, CAP तथा ABP हैं। ये त्रिकोणीय फलक भी कहलाते हैं। इसमें छः कोर AB, BC, CA, AP, BP तथा CP हैं और शीर्ष A, B, C तथा P हैं। इसमें प्रत्येक शीर्ष पर तीन कोरें मिलती हैं।



चित्र 16.10 (ii)



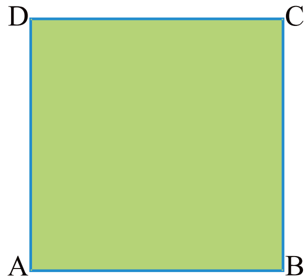
चित्र 16.10 (iii)

क्रियाकलाप 8.

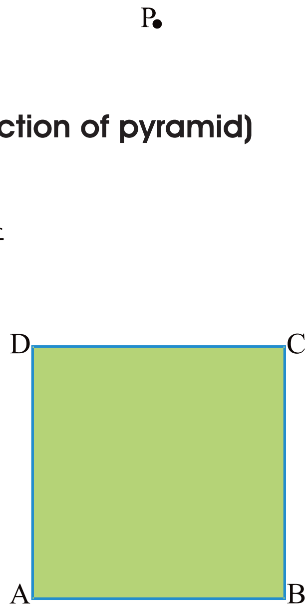
पिरामिड की आकृति बनाना (Construction of pyramid)

रचना

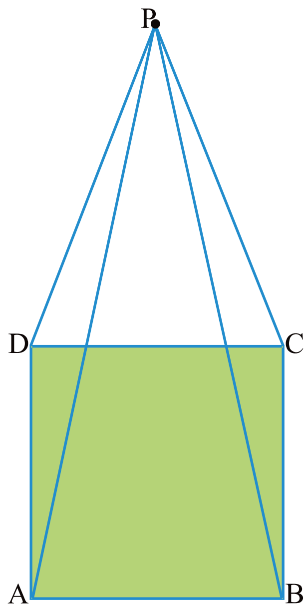
1. चित्र 16.11(i) के अनुसार एक वर्ग



चित्र 16.11 (i)



चित्र 16.11 (ii)



चित्र 16.11 (iii)

   की आकृति बनाइये और उसे छायांकित कीजिए।

2. अब चित्र 16.11 (ii) के अनुसार वर्ग के उपर लगभग बीच में कुछ दूरी पर एक बिन्दु P लीजिए।

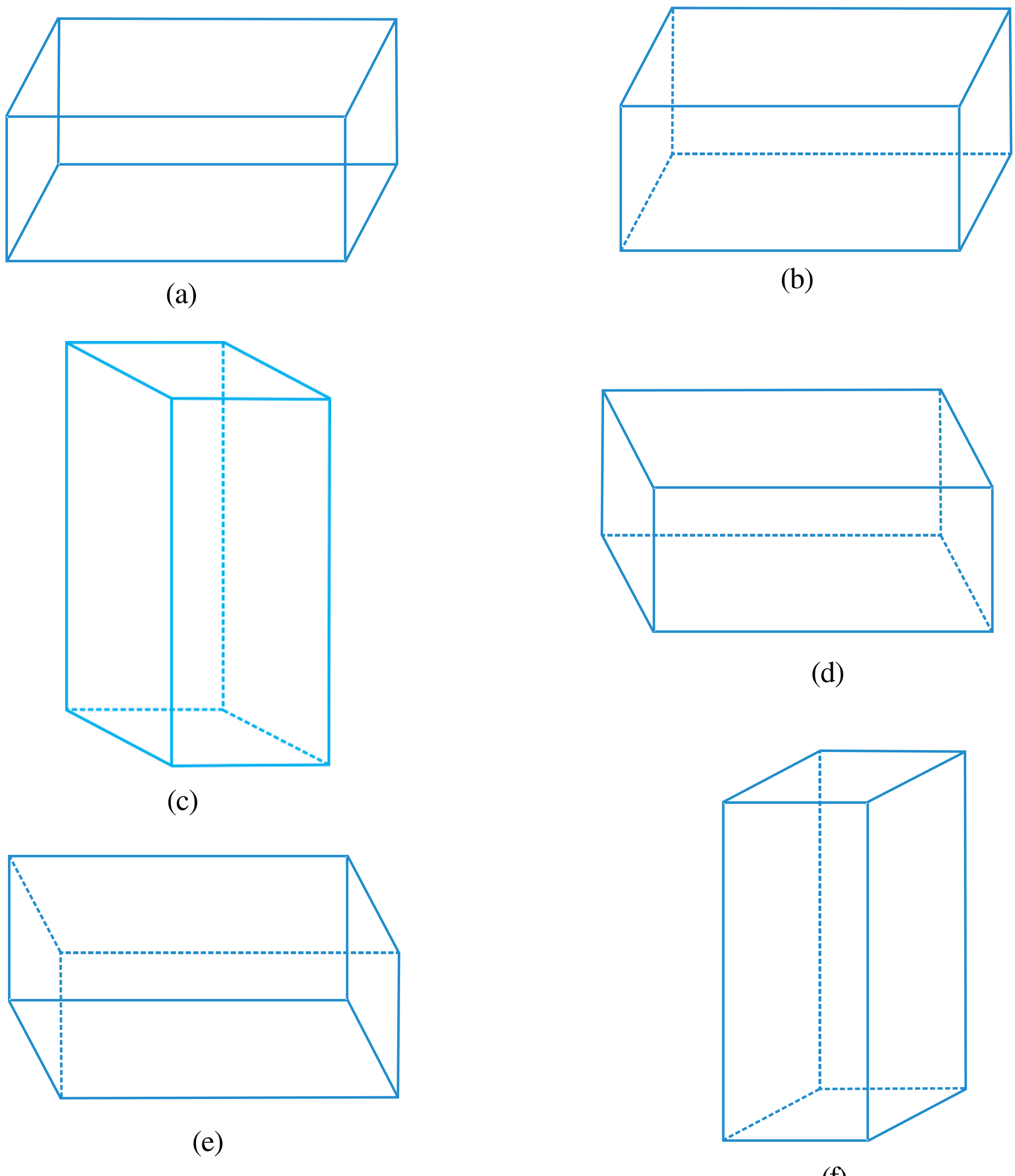
3. अब बिन्दु P को वर्ग के प्रत्येक शीर्ष से मिलाइये। आपको चित्र 16.11 (iii) की भांति एक आकृति प्राप्त होगी, यह आकृति पिरामिड है।

   इसमें एक वर्गाकार फलक ABCD एवं चार त्रिकोणीय फलक ABP, BCP, CDP एवं

DAP हैं। इसकी 8 कोरें AB, BC, CD, DA, AP, BP, CP तथा DP है और पांच शीर्ष A,B, C,D तथा P है।

छिपे पृष्ठों का बिन्दुकित रेखा द्वारा प्रदर्शन
(Exhibit the hidden faces with the help of dotted lines)

नीचे घनाभ की कुछ आकृतियाँ दी गई हैं। चित्र 16.12 (a) घनाभ की मुल आकृति है तथा अन्य आकृतियां घनाभ को विभिन्न स्थितियों में देखने पर बनती हैं। इन स्थितियों में घनाभ के कुछ भाग (शीर्ष, कोर एवं फलक) दिखाई नहीं देते। इनमें से शीर्ष एवं कोर को बिन्दुकित रेखा द्वारा दर्शाया गया है।

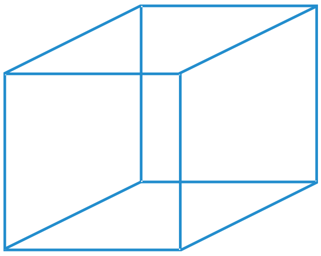


चित्र 16.12

अभ्यास–4

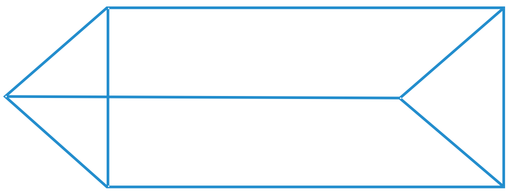
अब आप दिये गये आकृतियों के सामने से देखने पर छिपे हुए कोर एवं शीर्ष को बिन्दुकित रेखा द्वारा प्रदर्शित करते हुए पुनः चित्र बनाइये। (काई दो स्थिति)

(A) घन



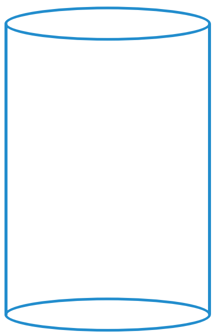
——————————

(B) त्रिभुजीय प्रिज्म



——————————

(C) बेलन



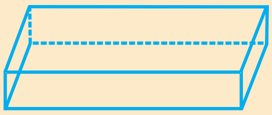
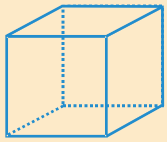
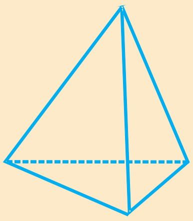
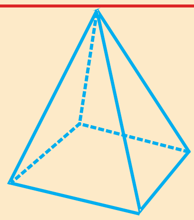
——————————

दी गई आकृतियों के शीर्ष, कोर और फलकों की पहचान एवं गणना करना।

क्रियाकलाप 9.

दिये गये आकृतियों में शीर्षों को नाम देकर शीर्षों, कोरों एवं फलकों को पहचानिए और सारणी में उनकी संख्या लिखिए। यहाँ घनाभ के शीर्ष, कोर एवं फलकों की संख्या को लिखकर एक संबंध बनाया गया है, शेष आकृतियों के संबंधित भागों की संख्या लिखकर उनमें संबंध स्थापित कीजिए।

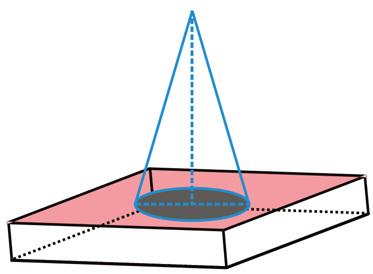
सारणी 16.1 (Table 16.1)

क्र.	आकृति नाम एवं आकृति	शीर्ष (V)	कोर (E)	फलक (F)	V-E+F
1.	घनाभ 	8	12	6	8−12+6=2
2.	घन 				
3.	चतुष्फलक 				
4.	पिरामिड 				
5.	प्रिज्म				

इस सारणी को पूर्ण करने के पश्चात आप पायेंगे कि प्रत्येक बहुफलक (चार या चार से अधिक फलकों से बनी आकृति) के लिए V-E+F का मान सदैव 2 प्राप्त होता है। इस संबंध को यूलर ने स्थापित किया था। अतः उन्हीं के नाम पर इसे **यूलर संबंध** कहते हैं।

क्रियाकलाप 10.

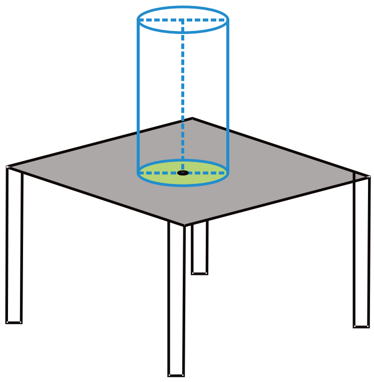
किसी माप का एक घनाभ बनाइये और उसके ऊपरी फलक पर घनाभ के चौड़ाई के आकार से कम त्रिज्या का शंकु बनाइये। आपका चित्र, चित्र 16.13 के अनुसार है जिसमें एक घनाभ तथा शंकु दिखाई देता है।



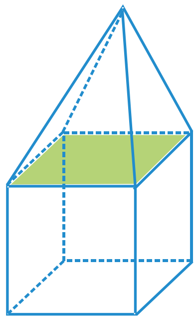
चित्र 16.13

क्रियाकलाप 11.

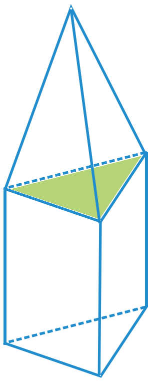
नीचे दिए गये प्रत्येक चित्र में एक से अधिक आकृतियाँ सम्मिलित हैं। प्रत्येक चित्र की आकृतियों को पहचान कर उनके नाम लिखिए।



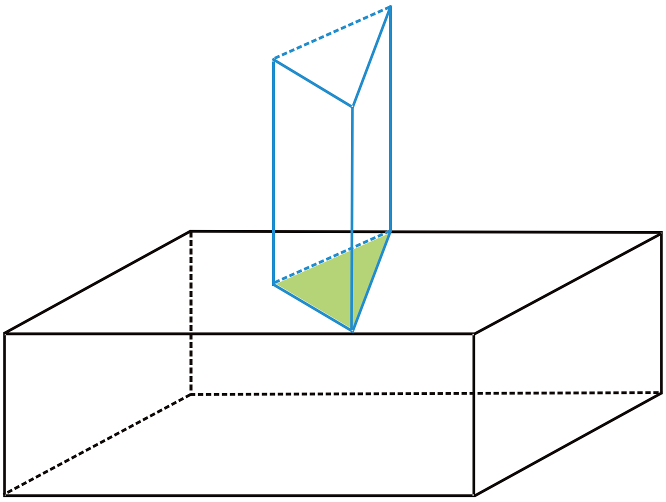
(a) बेलन एवं टेबल



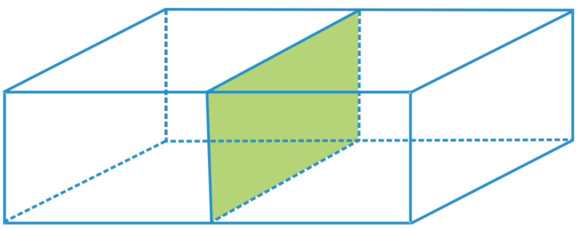
(b) ----------------



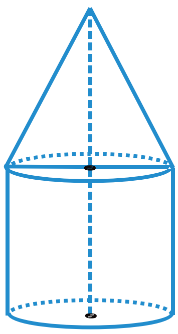
(c) ----------------



(d) ----------------



(e) ----------------

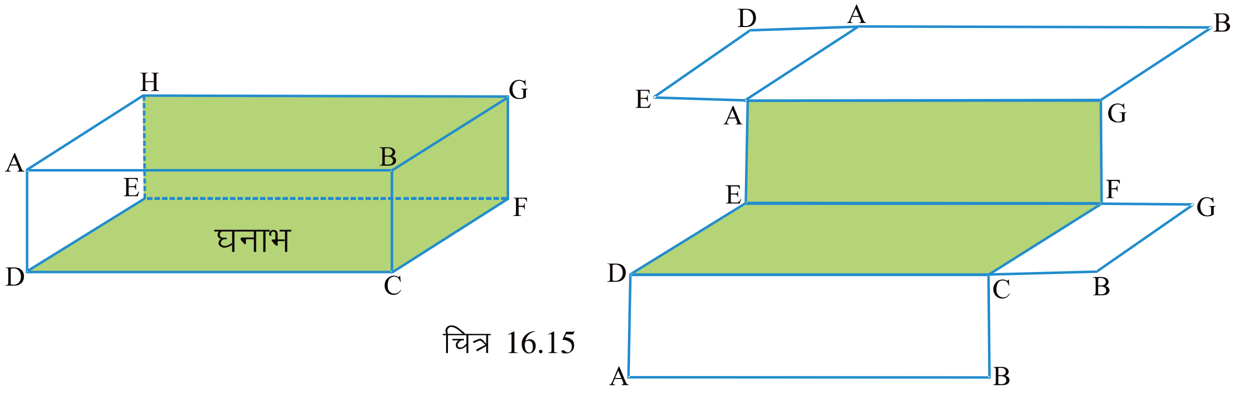


(f) ----------------

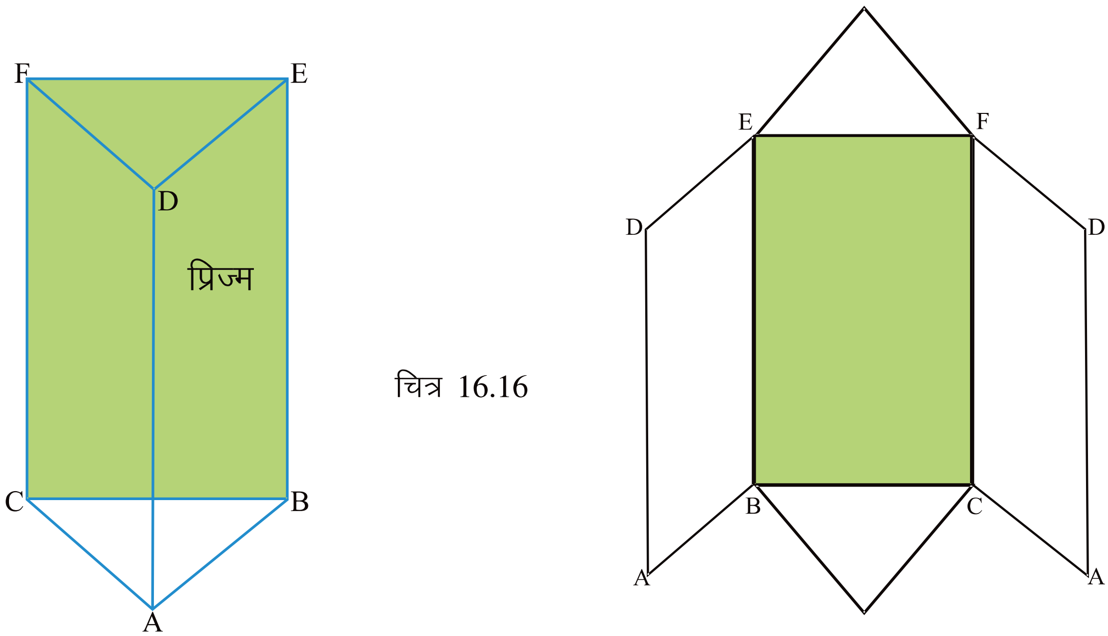
चित्र 16.14

मॉडल बनाने हेतु सहायक आकृतियाँ (Secondary figure to make a model)

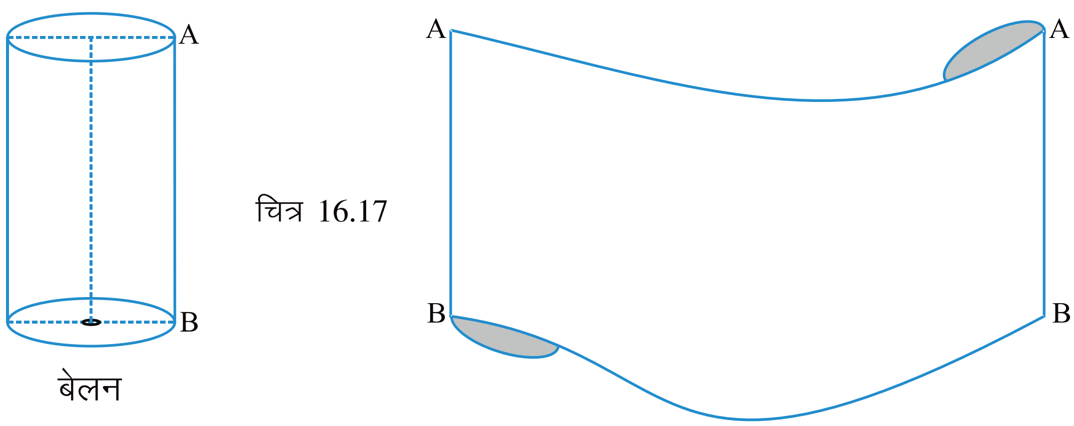
निम्न आकृतियों के फलकों को अलग करके दिखाया गया है। इनकी सहायता से आप कागज के टुकड़े काटकर उस आकृति का मॉडल बना सकते हैं।



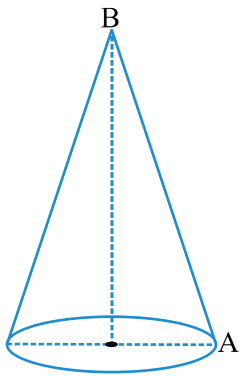
चित्र 16.15



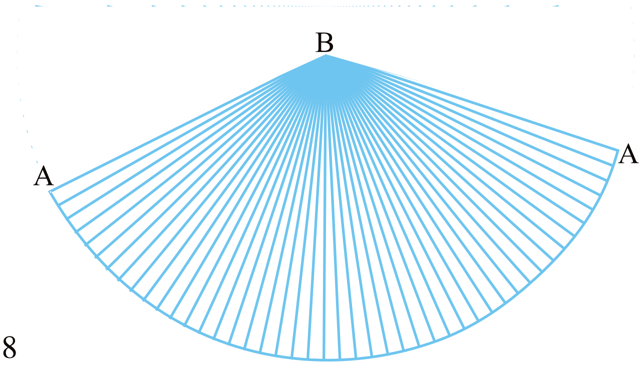
चित्र 16.16



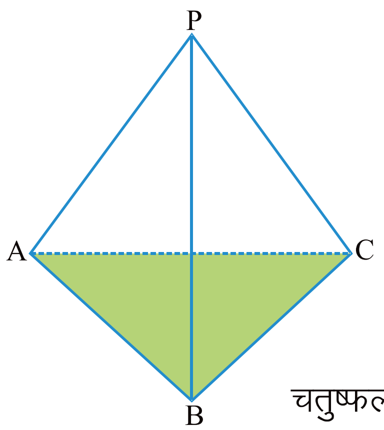
चित्र 16.17



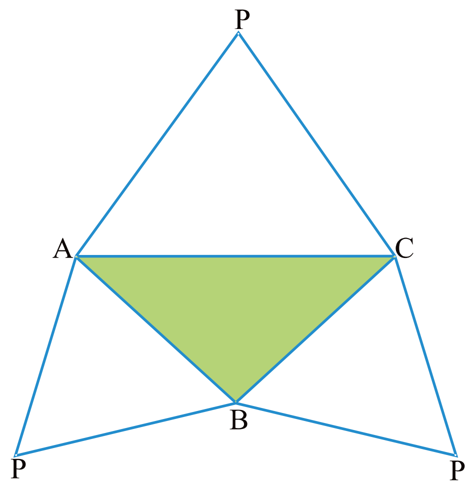
शंकु



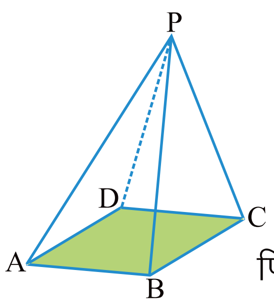
चित्र 16.18



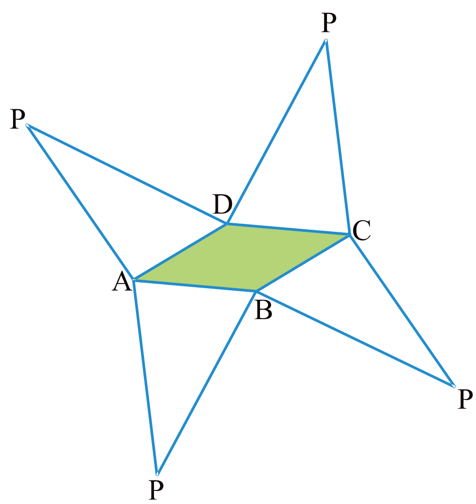
चतुष्फलक



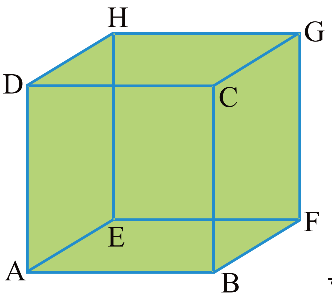
चित्र 16.19



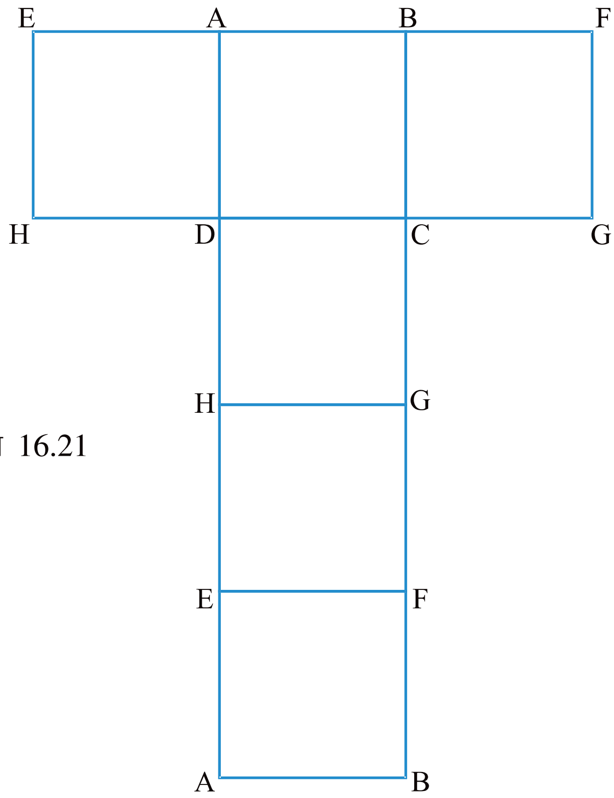
पिरामिड



चित्र 16.20



घन



चित्र 16.21

टीप – घन को घनाभ के फलकों की भांति तथा घनाभ को घन के फलकों की भांति अलग किया जा सकता है।

प्रश्नावली 16

1. 3 सेमी वर्ग की सहायता से एक घन बनाइये।
2. 5 सेमी लम्बाई के एक बेलन की रचना कीजिए।
3. अपनी कॉपी में 5 सेमी दूरी पर दो त्रिभुज एक त्रिभुजाकार गत्ते के टुकड़े की सहायता से बनाइए और इनकी सहायता से त्रिभुजीय प्रिज्म की रचना कीजिए।
4. अपनी कॉपी में चतुष्फलक की रचना कीजिए।
5. एक बहुफलक में चार फलक तथा चार शीर्ष हों तो क्या आप बता सकते हैं कि उसमें कितनी कोर होंगी?

ACNHXR