इण्टरमीडिएट परीक्षा, 2014

गणित—प्रथम प्रश्न-पत्र

समय : 3 घण्टे 15 मिनट] **334 (GA)** **[पूर्णांक : 50**

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** खण्डों का हल कीजिए—

(क) θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए, यदि $\sqrt{3}\cos\theta+\sin C=\sqrt{2}$. 1

(ख) $(1+i\sqrt{3})$ को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित कीजिए। 1

(ग) यदि ${}^nP_4 : {}^nP_5 = 1:2$, तो n का मान ज्ञात करें। 1

(घ) असमिका हल करें : $|x+1|\geq 3$. 1

(ङ) निम्नलिखित मिश्र कथन के घटक कथन ज्ञात कीजिए तथा जाँच कीजिए कि यह सत्य है अथवा असत्य—"सभी पूर्णांक धन अथवा ऋण होते हैं।" 1

2. (क) सिद्ध कीजिए कि $2\cos\theta=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 8\theta}}}$. 2

(ख) श्रेणी $1.2+2.3+3.4+\ldots$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए। 2

(ग) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{10}$ के प्रसार में, x^{11} का गुणांक ज्ञात कीजिए। 2

(घ) यदि A, B, C तीन समुच्चय हैं तो सिद्ध कीजिए कि 2

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

(ङ) निम्न वितरण का माध्य विचलन माध्य के सापेक्ष ज्ञात कीजिए— 2

अंक	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
छात्रों की संख्या	5	8	15	16	6

3. (क) दिए हुए समीकरण को हल कीजिए— 2

$$x^2-4x+13=0$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)=2\tan^{-1}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$ 2

(ग) दो कथन निम्नवत् हैं— 2

p : 25, 5 का गुणक है, q : 25, 8 का गुणक है।

इन कथनों की सहायता से 'तथा' और 'या' का प्रयोग करके मिश्र कथन की रचना कीजिए। दोनों स्थितियों में संयुक्त कथन की जाँच कीजिए। 2

(घ) यदि $\frac{b+c-2a}{a}, \frac{c+a-2b}{b}, \frac{a+b-2c}{c}$ समान्तर श्रेणी में हैं तो सिद्ध कीजिए $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ भी समान्तर श्रेणी में हैं। 2

(ङ) यदि $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, तो सत्यापित कीजिए $(fof^{-1})(x)=x$. 2

4. (क) तीन संख्याएँ जो कि गुणोत्तर श्रेणी में हैं, का योगफल 21 है तथा उनके वर्गों का योगफल 189 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए। 3

(ख) सिद्ध कीजिए कि, यदि R तुल्यता सम्बन्ध है तो R^{-1} भी एक तुल्यता सम्बन्ध होता है। 3

(ग) क्रेमर के नियम की सहायता से निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए— 3

$2x+y+z=1,\ x-2y-3z=1,\ 3x+2y+4z=5$

(घ) एक छात्र के तैराक न होने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। तब 5 छात्रों में से 4 छात्रों के तैराक होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 3

5. (क) सिद्ध कीजिए कि 3

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\left[\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right]$$

(ख) किसी बैट्समैन के दस मैचों का स्कोर निम्नवत् है—प्रसरण तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए। 3

38, 70, 48, 34, 42, 55, 63, 46, 54, 44.

(ग) यदि $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1000}=a+ib$ है तो a व b का मान ज्ञात कीजिए। 3

(घ) यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ द्विपद गुणांक है तो सिद्ध कीजिए कि $C_0+2C_1+4C_2+6C_3+\ldots+2nC_n=1+n.2^n$ 3

6. (क) गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि 4

$$(2n+7)<(n+3)^2, \forall n\in N.$$

(ख) किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 व z_2 के लिए सिद्ध कीजिए कि 4

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2.$$

7. (क) सिद्ध कीजिए कि 4

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}=1+a^2+b^2+c^2$$

(ख) (i) निम्न समीकरण को हल कीजिए— 2

$$\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\frac{\pi}{3}.$$

(ii) यदि $1, \omega, \omega^2$ इकाई के घनमूल हों, तो सिद्ध कीजिए कि $(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5=32.$ 2

8. (क) प्रारम्भिक संक्रिया का उपयोग कर निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए— 4

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(ख) दो थैले A और B दिए हैं। थैले A में 4 सफेद तथा 3 लाल गेंदें हैं जबकि थैले B में 3 सफेद तथा 7 लाल गेंदें हैं। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई जो कि सफेद रंग की पाई गई। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह गेंद पहले थैले A से निकाली गई थी। 4