5

सम्मिश्र संख्याएँ
(Complex Numbers)

5.01 परिचय (Introduction)

जैन गणितज्ञ श्री महावीराचार्य ने 850 ई. यह संकेत दिया कि ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूल नहीं होते। 1637 ई. में रेने डिकार्टिज ने संख्याओं को वास्तविक एवं काल्पनिक नाम दिए। ऑयलर ने 1748 ई. में $\sqrt{-1}$ को i से व्यक्त किया। गॉऊस ने 1832 में $a+b\sqrt{-1}$ को सम्मिश्र संख्या कहा।

द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के वास्तविक हल

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ (श्री धराचार्य सूत्र)

से प्राप्त कर सकते हैं। इसमें यदि विविक्तिकर $b^2-4ac\geq 0$ हो तो हल वास्तविक प्राप्त होते हैं परन्तु विविक्तिकर $b^2-4ac<0$ की स्थिति में हम उपरोक्त समीकरण के वास्तविक हल निकालने में असमर्थ होते हैं, क्योंकि इस स्थिति में $\sqrt{b^2-4ac}$ (एक ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल) वास्तविक संख्या नहीं है। इस प्रकार की समस्या का समाधान करने हेतु वास्तविक संख्या प्रणाली का विस्तार कर एक ऐसी संख्या प्रणाली विकसित की गई जिसमें ऋणात्मक संख्याओं के वर्ग मूल भी सम्मिलित है। ऐसी संख्याएँ सम्मिश्र संख्या कहलाती हैं।

हम जानते हैं कि समान चिह्न वाली दो वास्तविक संख्याओं का गुणनफल धनात्मक होता है, किन्तु यदि $\sqrt{-1}$ को $\sqrt{-1}$ से गुणा करें तो गुणनफल ऋणात्मक आता है। गणितज्ञों ने ऐसी सभी संख्याओं को काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary quantities) कहा है।

परिभाषाः "उस प्रत्येक संख्या को जिसका वर्ग ऋणात्मक संख्या हो, अधिकल्पित या काल्पनिक संख्या कहते हैं।"

उदाहरणार्थ : $\sqrt{-2}, \sqrt{-13}, \sqrt{-15}$ इत्यादि काल्पनिक संख्याएँ हैं।

आयोटा $\left(i=\sqrt{-1}\right)$ एक काल्पनिक संख्या है तथा इसके निम्नलिखित गुणधर्म हैं:

(i) $i=\sqrt{-1}, i^2=-1, i^3=i^2\cdot i=-i, i^4=\left(i^2\right)\left(i^2\right)=(-1)(-1)=1$

(ii) $1/i=-i$

(iii) $i^{4m}=\left(i^4\right)^m=(1)^m=1$

अर्थात् यदि i की कोई घात 4 की गुणज हो तो उसका मान सदैव 1 होता है।

5.02 सम्मिश्र संख्याएं (Complex numbers)

यदि $a, b\in R$ तो $a+ib$ या $a-ib$ रूप वाले व्यंजक सम्मिश्र संख्याएँ कहलाती हैं। जिसे प्रायः z से व्यक्त किया जाता है यथा $z=a+ib$, जहाँ $i=\sqrt{-1}$ (मानक रूप), यहाँ a वास्तविक भाग तथा b काल्पनिक भाग कहलाता है।

क्रमित युग्म के रूप में सम्मिश्र राशि : हेमिल्टन (1805–1865) ने सम्मिश्र राशि को एक क्रमित युग्म के रूप में परिभाषित किया जिसके अनुसार सम्मिश्र राशि $z=a+ib$ को (a,b) से निरूपित किया जाता है, जहाँ $a,b\in R$.

सम्मिश्र राशि z के वास्तविक तथा काल्पनिक भाग को क्रमशः $\text{Re}(z)$ और $\text{Im}(z)$ से व्यक्त करते हैं।

विशेष स्थिति : यदि $\text{Im}(z)=0$ तो सम्मिश्र राशि विशुद्ध रूप से वास्तविक राशि कहलाती है तथा $\text{Re}(z)=0$ तो वह विशुद्ध रूप से काल्पनिक राशि कहलाती है।

उदाहरणार्थ $-2, 0, -2i, 1-\sqrt{2}\,i$ सभी सम्मिश्र राशियाँ हैं, इन्हें $a+ib$ तथा क्रमित युग्म के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

$$-2=-2+i\cdot 0=(-2,0),\ -2i=0-2i=(0,-2),\ 0=0+i\cdot 0=(0,0),\ 1-\sqrt{2}i=\left(1,-\sqrt{2}\right)$$

5.03 सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय (Set of complex numbers):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को C से व्यक्त करते है तथा इसे निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$C=\{a+ib : a, b\in R\}$$

5.04 सम्मिश्र संख्याओं पर प्रमेय (Theorems on complex numbers):

प्रमेय 5.1. यदि कोई सम्मिश्र संख्या शून्य के बराबर हो तो उसके वास्तविक व काल्पनिक दोनों भाग शून्य के बराबर होते हैं।

प्रमाण : माना $z=a+ib$ दी हुई सम्मिश्र संख्या है तथा दिया है $a+ib=0$

$\therefore\quad a=-ib$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(a)^2=(-ib)^2=(-1)^2\left(i^2\right)b^2=-b^2$$

या $\quad a^2+b^2=0$

किन्तु a और b दोनों वास्तविक संख्याएँ हैं; इसलिए इनके वर्गो का योगफल तब तक शून्य नहीं हो सकता, जब तक यह दोनों अलग–अलग शून्य के बराबर नहीं हो, अर्थात्

$a=0$ और $b=0$

प्रमेय 5.2 यदि दो सम्मिश्र संख्याऐं बराबर हों तो उनके वास्तविक और काल्पनिक भाग अलग–अलग बराबर होते हैं।

प्रमाण : माना $z_1=a+ib$ और $z_2=c+id$ बराबर हैं।

अब $\quad z_1=z_2$

$\Rightarrow\quad a+ib=c+id$

$\Rightarrow\quad (a-c)+i(b-d)=0$

प्रमेय 4.1 से $a-c=0$ और $b-d=0$

$\Rightarrow\quad a=c$ और $b=d$

अतः दो सम्मिश्र संख्याएँ बराबर तभी होती है जब उनके वास्तविक भाग एवं काल्पनिक भाग अलग–अलग बराबर हों।

उपप्रमेयः यदि $a+ib=c+id$ तो $a-ib=c-id$

5.05 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में योग संक्रिया (Addition operation in the set of complex numbers C):

यदि $z_1=a+ib$ तथा $z_2=c+id, a,b,c,d\in R$ (वास्तविक संख्याओं का समुच्चय) कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हों तो उनके योग को z_1+z_2 द्वारा व्यक्त करते हैं और इसे निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(a+ib)+(c+id)\\&=(a+c)+i(b+d)\end{aligned}$$

उदाहरणार्थ : यदि $z_1=2+5i, z_2=3+7i$ तो

$$z_1+z_2=(2+5i)+(3+7i)=5+12i$$

5.06 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में योग संक्रिया के गुणधर्म (Properties of addition on the set of complex numbers C) :

1. संवृतता गुणधर्म (Closure property):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में योग संक्रिया संवृतता गुणधर्म का पालन करती है।

अर्थात् $\forall\ z_1, z_2 \in C \Rightarrow z_1 + z_2 \in C$

प्रमाणः यदि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं तो

$$z_1 + z_2 = (a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

हम जानते हैं कि दो वास्तविक संख्याओं का योगफल एक वास्तविक संख्या होती है, इसलिए

$$a \in R,\ c \in R \Rightarrow a+c \in R \text{ तथा } b \in R,\ d \in R \Rightarrow b+d \in R$$

$\therefore\quad z_1 + z_2 \in C$

अर्थात् सम्मिश्र संख्याएँ योग संक्रिया के लिए संवृतता गुणधर्म का पालन करती है।

2. साहचर्य गुणधर्म (Associative property):

सम्मिश्र संख्याओं का योग साहचर्य गुणधर्म का पालन करता है।

अर्थात् $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad \forall\ z_1, z_2, z_3 \in C$

प्रमाणः माना $z_1 = a_1 + ib_1,\quad z_2 = a_2 + ib_2,\quad z_3 = a_3 + ib_3$

तब $z_1 + (z_2 + z_3) = (a_1 + ib_1) + [(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)]$

$= (a_1 + ib_1) + [(a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)]$

$= [a_1 + (a_2 + a_3) + i\{b_1 + (b_2 + b_3)\}]$

$= [(a_1 + a_2) + a_3 + i\{(b_1 + b_2) + b_3\}]$ [$\because$ वास्तविक संख्याओं का योग साहचर्य गुणधर्म का पालन करता है]

$= [a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)] + (a_3 + ib_3)$

$= [(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)] + (a_3 + ib_3)$

$= (z_1 + z_2) + z_3$

3. योज्य तत्समक (Additive identity):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में $0 = 0 + i0$ योग के लिए तत्समक अवयव होता है।

प्रमाणः यदि $z = a + ib$ तब $\because 0 + i0 = 0$

$\therefore$ योग संक्रिया से

$$z + 0 = (a+ib) + (0+i0) = (a+0) + i(b+0) = a + ib = z$$

$$0 + z = (0+i0) + (a+ib) = (0+a) + i(0+b) = a + ib = z$$

$\therefore\quad z + 0 = z = 0 + z$

4. योज्य प्रतिलोम (Additive inverse):

प्रत्येक $z \in C$ के लिए $-z \in C$ योज्य प्रतिलोम अवयव है।

प्रमाणः यदि $z = a + ib$ तब $-z = -a - ib$

$\therefore$ योग संक्रिया से

$$z + (-z) = (a+ib) + (-a-ib) = (a-a) + i(b-b) = 0 + i0 = 0$$

$$(-z) + z = (-a-ib) + (a+ib) = (-a+a) + i(-b+b) = 0 + i0 = 0$$

$\therefore\quad z + (-z) = 0 = (-z) + z$

5. क्रमविनिमेय गुणधर्म (Commutative property):

सम्मिश्र संख्याओं का योग क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन करता है।

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \ \forall \ z_1, z_2 \in C$$

प्रमाणः माना $z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id$

तब $z_1 + z_2 = (a+ib) + (c+id)$

$= (a+c) + i(b+d)$

$= (c+a) + i(d+b)$ [वास्तविक संख्या में क्रमविनिमेय गुणधर्म से]

$= (c+id) + (a+ib)$

$= z_2 + z_1$

$\therefore \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

6. निरसन नियम (Cancellation law):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में योग संक्रिया निरसन नियम का पालन करती है।

$z_1 + z_3 = z_2 + z_3 \Rightarrow z_1 = z_2, \ \forall z_1 z_2, z_3 \in C$ [दक्षिण निरसन नियम]

$z_3 + z_1 = z_3 + z_2 \Rightarrow z_1 = z_2, \ \forall \ z_1, z_2, z_3 \in C$ [वाम निरसन नियम]

प्रमाणः माना $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2, \quad z_3 = a_3 + ib_3$

तब $z_1 + z_3 = (a_1 + ib_1) + (a_3 + ib_3) = (a_1 + a_3) + i(b_1 + b_3)$

$z_2 + z_3 = (a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3) = (a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)$

$\therefore \quad z_1 + z_3 = z_2 + z_3 \Rightarrow (a_1 + a_3) + i(b_1 + b_3) = (a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)$

$\Rightarrow \quad a_1 + a_3 = a_2 + a_3, \ b_1 + b_3 = b_2 + b_3$ [वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना से]

$\Rightarrow \quad a_1 = a_2, \ b_1 = b_2$ [$\therefore$ वास्तविक संख्याओं का योग निरसन नियम का पालन करता है]

$\Rightarrow \quad a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$

$\Rightarrow \quad z_1 = z_2$

इसी प्रकार हम $z_3 + z_1 = z_3 + z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$ सिद्ध कर सकते हैं।

5.07 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में व्यवकलन संक्रिया (Subtraction operation in the set of complex numbers C):

यदि $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हों तो उनके व्यवकलन को $z_1 - z_2$ से व्यक्त करते है तथा व्यवकलन निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है

$$z_1 - z_2 = (a+ib) - (c+id)$$
$$= (a-c) + i(b-d)$$

अर्थात् दो सम्मिश्र राशियों का व्यवकलन सम्मिश्र राशि होती है जिसका वास्तविक भाग दोनों सम्मिश्र संख्याओं के वास्तविक भागों के अन्तर के बराबर तथा काल्पनिक भाग दोनों संख्याओं के काल्पनिक भागों के अन्तर के बराबर होते हैं।

उदाहरणार्थः यदि $z_1 = 4 + 3i$

तथा $z_2 = 2 + i$

तथा $z_1 - z_2 = (4-2) + (3-1)i = 2 + 2i$

5.08 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में गुणन संक्रिया
(Multiplication operation in the set of complex numbers C):

यदि $z_1 = a+ib$ तथा $z_2 = c+id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हों तो उनके गुणन को $z_1 \cdot z_2$ से व्यक्त करते हैं तथा गुणन निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता हैः

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+ib)\cdot(c+id) \\ &= ac+ibc+iad+i^2bd \\ &= ac+i(bc+ad)-bd \qquad (\therefore\ i^2=-1) \\ &= (ac-bd)+i(bc+ad) \end{aligned}$$

अर्थात् दो सम्मिश्र राशियों का गुणनफल भी सम्मिश्र राशि होती है।

उदाहरणार्थः यदि $z_1 = 2+3i$ तथा $z_2 = 2+4i$

तब $z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(2+4i)$

$$= 4+6i+8i+12i^2 = 4+14i-12 \quad = -8+14i \qquad [i^2=-1]$$

टिप्पणीः संयुग्मी सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल एक वास्तविक संख्या होती है।

5.09 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में गुणन संक्रिया के गुणधर्म
(Properties of multiplication on the set of complex numbers C):

1. संवृतता गुणधर्म (Closure property):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में गुणन संक्रिया संवृवता गुण धर्म का पालन करती है।

अर्थात् $\forall\ z_1, z_2 \in C \ \Rightarrow\ z_1z_2 \in C$

प्रमाणः यदि $z_1 = a+ib$ और $z_2 = c+id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं जहाँ $a,b,c,d \in R$

तब
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a+ib)\cdot(c+id) \\ &= ac+ibc+iad+i^2bd \qquad (\because\ i^2=-1) \\ &= (ac-bd)+i(bc+ad) \end{aligned}$$

$\because$ $a,b,c,d \in R$ $\quad\therefore\quad$ $(ac-bd)\in R$ तथा $(bc+ad)\in R$

अतः $z_1z_2 \in C$

2. साहचर्य गुणधर्म (Associative property):

सम्मिश्र संख्याओं का गुणन साहचर्य गुणधर्म का पालन करता हैं।

अर्थात् $z_1\cdot(z_2\cdot z_3) = (z_1\cdot z_2)\cdot z_3 \quad \forall\ z_1, z_2, z_3 \in C$

प्रमाणः माना $z_1 = a_1+ib_1$, $z_2 = a_2+ib_2$, तथा $z_3 = a_3+ib_3$.

तब
$$\begin{aligned} z_1\cdot(z_2\cdot z_3) &= (a_1+ib_1)\cdot[(a_2+ib_2)\cdot(a_3+ib_3)] \\ &= (a_1+ib_1)\cdot\left[\{(a_2a_3-b_2b_3)+i(a_2b_3+b_2a_3)\}\right] \\ &= \left[\{a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_2b_3+b_2a_3)\}+i\{b_1(a_2a_3-b_2b_3)+a_1(a_2b_3+b_2a_3)\}\right] \\ &= [(a_1a_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3-b_1b_2a_3)+i(b_1a_2a_3-b_1b_2b_3+a_1a_2b_3+a_1b_2a_3)] \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z_1\cdot z_2)\cdot z_3 &= [(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)]\cdot(a_3+ib_3) \\ &= \left[\{(a_1a_2-b_1b_2)+i(b_1a_2+a_1b_2)\}\right]\cdot(a_3+ib_3) \end{aligned}$$

$$=\left[\left\{\left(a_1a_2-b_1b_2\right)a_3-\left(b_1a_2+a_1b_2\right)b_3\right\}+i\left\{a_3\left(b_1a_2+a_1b_2\right)+b_3\left(a_1a_2-b_1b_2\right)\right\}\right]$$

$$=\left[\left(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-b_1a_2b_3-a_1b_2b_3\right)+i\left(a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+b_1a_2a_3+a_1b_2a_3\right)\right] \qquad (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$z_1\cdot\left(z_2\cdot z_3\right)=\left(z_1\cdot z_2\right)\cdot z_3$$

3. गुणन तत्समक (Multiplicative identity):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में $1+i\,0=(1,0)$ गुणन के लिए तत्समक अवयव होता है।

प्रमाणः माना $z=a+ib$ तब $1=1+i0$

$$z\cdot 1=(a+ib)\cdot(1+i0)=\{(a-0)+i(b+0)=a+ib=z\}$$

$$1\cdot z=(1+i0)\cdot(a+ib)=\{(a-0)+i(b+0)=a+ib=z\}$$

$\therefore \quad z\cdot 1=z=1\cdot z$

4. गुणन प्रतिलोम (Multiplicative inverse):

प्रत्येक अशून्य सम्मिश्र संख्या $z=a+ib$ का गुणन प्रतिलोम समुच्चय C में विद्यमान होता है।

प्रमाणः माना $z=a+ib\neq 0$ एक सम्मिश्र संख्या है, जिसमें a और b में से कोई एक शून्य नहीं है और $a,b\in R$

माना कि $x+iy,\ a+ib$ का गुणन प्रतिलोम हैं।

तब $\quad (a+ib)\cdot(x+iy)=1+i\cdot 0$

$\Rightarrow \quad (ax-by)+i(bx+ay)=1+i\cdot 0$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$\Rightarrow \quad ax-by=1 \quad$ तथा $\quad bx+ay=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{a}{a^2+b^2} \quad$ तथा $\quad y=\dfrac{-b}{a^2+b^2};\ a^2+b^2\neq 0$

क्योंकि $a,b\in R \Rightarrow \dfrac{a}{a^2+b^2}=x\in R \quad$ तथा $\quad \dfrac{-b}{a^2+b^2}=y\in R$

$\Rightarrow \quad \dfrac{a}{a^2+b^2}+i\left(\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)\in C \quad \Rightarrow \quad x+iy\in C$

अतः अशून्य सम्मिश्र संख्या $z=a+ib$ का गुणन प्रतिलोम $\dfrac{a}{a^2+b^2}+i\left(\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$ का अस्तित्व है तथा समुच्चय C में है। z का गुणन प्रतिलोम प्रायः z^{-1} या $1/z$ से निरूपित किया जाता है।

अतः $\quad z=a+ib \Rightarrow z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{a^2+b^2}+i\dfrac{-b}{a^2+b^2}.$

5. क्रम विनिमेय गुणधर्म (Commutative property):

सम्मिश्र संख्याओं का गुणन क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन करता है।

अर्थात् $\forall\ z_1,z_2\in C$ तब $z_1z_2=z_2z_1$

प्रमाणः माना $z_1=a+ib$ तथा $z_2=c+id$

अतः $\quad z_1\cdot z_2=(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$

$$=(ca-db)+i(cb+da)=(c+id)\cdot(a+ib)=z_2\cdot z_1$$

6. निरसन नियम (Cancellation law):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में गुणन संक्रिया निरसन नियम का पालन करती है।

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में यदि $z_3 \neq 0$ हो, तथा $z_1, z_2, z_3 \in C$ तब

$z_1 z_3 = z_2 z_3 \Rightarrow z_1 = z_2$ [दक्षिण निरसन नियम]

$z_3 z_1 = z_3 z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$ [वाम निरसन नियम]

प्रमाणः माना $z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2,\ z_3 = a_3 + ib_3$

$\therefore \quad z_1 \cdot z_3 = (a_1 + ib_1)\cdot(a_3 + ib_3) = (a_1 a_3 - b_1 b_3) + i(a_1 b_3 + a_3 b_1)$

तथा $\quad z_2 \cdot z_3 = (a_2 + ib_2)\cdot(a_3 + ib_3) = (a_2 a_3 - b_2 b_3) + i(a_2 b_3 + a_3 b_2)$

$\therefore \quad z_1 z_3 = z_2 z_3 \Rightarrow (a_1 a_3 - b_1 b_3) + i(a_1 b_3 + b_1 a_3) = (a_2 a_3 - b_2 b_3) + i(a_2 b_3 + b_2 a_3)$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$a_1 a_3 - b_1 b_3 = a_2 a_3 - b_2 b_3$ तथा $a_1 b_3 + a_3 b_1 = a_2 b_3 + b_2 a_3$

$(a_1 - a_2)a_3 - (b_1 - b_2)b_3 = 0$ तथा $(a_1 - a_2)b_3 + a_3(b_1 - b_2) = 0$

$\Rightarrow \quad a_1 = a_2,\ b_1 = b_2 \qquad (\because z_3 \neq 0)$

$\Rightarrow \quad z_1 = z_2$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि

$$z_3 z_1 = z_3 z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

7. बंटन गुणधर्म (Distributive law):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में गुणन संक्रिया योग संक्रिया पर बंटनता गुणधर्म का पालन करती हैं।

अर्थात् $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ तथा $(z_2 + z_3)z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1 \quad \forall\ z_1, z_2, z_3 \in C$

प्रमाणः माना $z_1 = a_1 + ib_1,\quad z_2 = a_2 + ib_2,\quad z_3 = a_3 + ib_3$ हो तब

$$z_1(z_2 + z_3) = (a_1 + ib_1)[(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)]$$

$$= (a_1 + ib_1)[(a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)]$$

$$= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3) + i(a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3) \qquad (1)$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) + (a_1 + ib_1)(a_3 + ib_3)$$

$$= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 a_3 + b_3 a_1) \qquad (2)$$

(1) से (2) से $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

5.10 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में भाग संक्रिया (Division operation in the set of complex numbers C):

माना $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id\ (z_2 \neq 0)$, जहाँ $a, b, c, d \in R$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हों तो उनका भाग $z_1 \div z_2$ से व्यक्त करते हैं और

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)}{(c + id)} \times \frac{(c - id)}{(c - id)}$$

$$= \frac{ac + ibc - iad - i^2 bd}{c^2 - i^2 d^2}$$

$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \qquad (\because\ i^2=-1)$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \qquad \left(c^2+d^2\neq 0 \quad \because\ z_2\neq 0\right)$$

अतः सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में भाग संक्रिया के पश्चात प्राप्त राशि एक सम्मिश्र संख्या होती है।

उदाहरणार्थ : यदि $z_1=3+4i$ तथा $z_2=1+3i$ हो तो

$$z_1 \div z_2 = \frac{3+4i}{1+3i}$$

$$= \frac{3+4i}{1+3i}\times\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{3+4i-9i-12i^2}{(1)^2-9i^2}$$

$$= \frac{3-5i+12}{1+9} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

5.11 [illegible] (Conjugate complex numbers):

दो सम्मिश्र संख्याएँ संयुग्मी कहलाती है यदि उनके वास्तविक भाग समान हों तथा काल्पनिक भाग समान किन्तु विपरीत चिह्न के हों।

अतः यदि $z=a+ib$ हो तो z की संयुग्मी सम्मिश्र संख्या $\bar{z}$ से व्यक्त की जाती है और $\bar{z}=a-ib$ होता है।

उदाहरणार्थ :

(i) यदि $z=(3,-5)=3-5i \Rightarrow \bar{z}=(3,5)=(3+5i)$

(ii) यदि $z=\left(-2,\sqrt{11}\right)=-2+\sqrt{11}\,i \Rightarrow \bar{z}=\left(-2,-\sqrt{11}\right)=-2-\sqrt{11}\,i$

5.12 संयुग्मी सम्मिश्र संख्याओं के कुछ गुणधर्म (Some properties of conjugate complex numbers):

यदि $z, z_1, z_2 \in C$, **तो**

(i) $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$ **(ii)** $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$ **(iii)** $\overline{(\bar{z})}=z$

(iv) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ **(v)** $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$ **(vi)** $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

(vii) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ z_2\neq 0$ **(viii)** $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$

प्रमाणः माना $z=a+ib;\ a,b\in R$, तो

(i) $z+\bar{z}=(a+ib)+(a-ib)=2a=2\mathbf{Re}(z)$

(ii) $z-\bar{z}=(a+ib)-(a-ib)=2ib=2i\mathbf{Im}(z)$

(iii) $\overline{(\bar{z})}=\overline{(a-ib)}=a-(-ib)=a+ib=z$

(iv) माना $z_1=a+ib$ तथा $z_2=c+id$ तब

$$z_1+z_2=(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{z_1+z_2}=(a+c)-i(b+d)=(a-ib)+(c-id)=\bar{z}_1+\bar{z}_2$$

(v)

$$z_1-z_2=(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{z_1-z_2}=(a-c)-i(b-d)=(a-ib)-(c-id)=\bar{z}_1-\bar{z}_2$$

(vi) $z_1 \cdot z_2 = (a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i(bc+ad)$

$\Rightarrow \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd)-i(bc+ad)$ (1)

तथा $\quad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a-ib)(c-id) = (ac-bd)-i(bc+ad)$ (2)

समीकरण (1) व (2) से $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(vii) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)}{(c+id)} \times \dfrac{(c-id)}{(c-id)} = \left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$

$\Rightarrow \quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) - i\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$ (1)

तथा $\quad \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \dfrac{a-ib}{c-id} = \left(\dfrac{a-ib}{c-id}\right) \times \left(\dfrac{c+id}{c+id}\right)$

$= \left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) - i\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$ (2)

समीकरण (1) व (2) से $\quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

(viii) $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$

5.13 सम्मिश्र संख्या का मापांक (Modulus of a complex number):

यदि $z = a+ib$ कोई सम्मिश्र संख्या है तो z का मापांक, $|z|$ से निरूपित किया जाता है तथा यह धनात्मक वास्तविक संख्या $\sqrt{a^2+b^2}$ के बराबर होता है, अर्थात्

$z = a+ib$

$\Rightarrow \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left[\{\text{Re}(z)\}^2 + \{\text{Im}(z)\}^2\right]}$

स्पष्टतः $|z| \geq 0, \quad \forall \; z \in C$

(i) $z_1 = 2+3i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ (ii) $z_2 = -2i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{0+4} = 2$

टिप्पणीः सम्मिश्र संख्याओं में $z_1 > z_2$ या $z_1 < z_2$ अर्थहीन है क्योंकि सम्मिश्र संख्याओं में क्रम सम्बन्ध परिभाषित नहीं है परन्तु $|z|$ एक **धनात्मक संख्या** है अतः $|z_1| > |z_2|$ या $|z_1| < |z_2|$ अपनी सार्थकता रखते हैं।

5.14 सम्मिश्र संख्याओं के मापांक सम्बन्धि गुणधर्म (Properties related to moduli of complex numbers):

यदि $z, z_1, z_2 \in C$ तो

(i) $|z| \geq |\mathbf{Re}(z)| \geq \mathbf{Re}(z)$; $|z| \geq |\mathbf{Im}(z)| \geq \mathbf{Im}(z)$ **(ii)** $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

(iii) $z\bar{z} = |z|^2$ **(iv)** $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ **(v)** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \; |z_2| \neq 0$

प्रमाणः (i) माना $z = a+ib$ तब $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, जहाँ $\mathbf{Re}(z) = a, \mathbf{Im}(z) = b$

$\therefore \quad |z| \geq \mathbf{Re}(z)$ और $|z| \geq \mathbf{Im}(z)$

(ii) माना $\quad z = a+ib$ तब $\bar{z} = a-ib$ तथा $-z = -a-ib$

$\therefore \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|\bar{z}| = \sqrt{a^2+b^2}$ तथा $|-z| = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow |z| = |\bar{z}| = |-z|$

(iii) माना $z = a + ib$ तब $\bar{z} = a - ib$

$\therefore \quad z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 \qquad (1)$

तथा $|z|^2 = |a+ib|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 \qquad (2)$

समीकरण (1) व (2) से $z\bar{z} = |z|^2$

टिप्पणी : यदि $z \neq 0$, तो $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ सूत्र का प्रयोग सम्मिश्र संख्या का गुणन प्रतिलोम ज्ञात करने में किया जाता है।

(iv) माना $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$

तब $z_1z_2 = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

$$\therefore \quad |z_1z_2| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2}$$

$$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(c^2+d^2)} = |z_1||z_2|$$

(v) माना $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id \neq 0$ तब

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)}{(c+id)} \times \frac{(c-id)}{(c-id)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

$$\therefore \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

त्रिभुजीय असमिकाएँ (Triangular inequalities)

यदि $z_1, z_2 \in C$ तो

(i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (ii) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

प्रमाणः (i)

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \qquad [\because |z|^2 = z\bar{z}]$$

$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \qquad [\because \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2]$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{(z_1\bar{z}_2)} + |z_2|^2 \qquad [\because \overline{(\bar{z})} = z]$$

$$= |z_1|^2 + 2\,\text{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \qquad [\because z + \bar{z} = 2\,\text{Re}(z)]$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 \qquad [\because 2\,\text{Re}(z) \leq |z|]$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2 \qquad [\because |z_1z_2| = |z_1||z_2|]$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \qquad [\because |\bar{z}| = |z|]$$

$$\leq [|z_1| + |z_2|]^2$$

$$\therefore \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(ii) $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$ $\left[\because |z|^2 = z\bar{z}\right]$

$= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$ $\left[\because \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2\right]$

$= z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$

$= |z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + |z_2|^2$

$= |z_1|^2 - \left[z_1\bar{z}_2 + \overline{(z_1\bar{z}_2)}\right] + |z_2|^2$ $\left[\overline{(\bar{z})} = z\right]$

$= |z_1|^2 - [2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)] + |z_2|^2$ $[\because z + \bar{z} = \operatorname{Re}(z)]$

$\geq |z_1|^2 - 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2$ $[\because 2\operatorname{Re}(z) \leq |z|]$

$\geq |z_1|^2 - 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2$

$\geq |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$ $[|\bar{z}| = |z|]$

$\geq [|z_1| - |z_2|]^2$ (i)

$\therefore$ $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

इसी प्रकार $|z_2 - z_1| \geq |z_2| - |z_1|$

परन्तु $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

अतः (i) व (ii) से

$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{1}{i}$ (ii) i^{17} (iii) $1 - i^{200}$

हल : (i) $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$ (ii) $i^{17} = (i^2)^8 i = (-1)^8 i = i$

(iii) $1 - i^{200} = 1 - (i^2)^{100} 1 - (-1)^{100} = 1 - 1 = 0$

उदाहरण 2: निम्न सम्मिश्र संख्याओं के वास्तविक एवं काल्पनिक भाग लिखिए:

(i) $20i$ (iii) $-1 - 5\sqrt{-1}$ (iii) $\left(1 + \sqrt{-25}\right) - \left(-2 + \sqrt{-9}\right) + \left(3 - \sqrt{-4}\right)$

हल : (i) $\because 20i = 0 + 20i$

अतः वास्तविक भाग $= 0$ तथा काल्पनिक भाग $= 20$

(ii) $\because -1 - 5\sqrt{-1} = -1 - 5i$

अतः वास्तविक भाग $= -1$ तथा काल्पनिक भाग $= -5$

(iii) $\because \left(1 + \sqrt{-25}\right) - \left(-2 + \sqrt{-9}\right) + \left(3 - \sqrt{-4}\right)$

$= (1 + 5i) - (-2 + 3i) + (3 - 2i)$

$= 6 + 0i$

अतः वास्तविक भाग $= 6$ तथा काल्पनिक भाग $= 0$

उदाहरण 3: सम्मिश्र संख्या $(2-3i)$ का योज्य एवं गुणन प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल : माना $(2-3i)$ का योज्य प्रतिलोम $(a+ib)$ है।

$\Rightarrow \quad (2-3i)+(a+ib)=0+i0$

$\Rightarrow \quad (2+a)+(-3+b)i=0+i0$

$\Rightarrow \quad 2+a=0$ एवं $-3+b=0$

$\Rightarrow \quad a=-2$ एवं $b=3$

अतः $(2-3i)$ का योज्य प्रतिलोम $(-2+3i)$ है।

$(2-3i)$ का गुणन प्रतिलोम $=\dfrac{1}{2-3i}$

$$=\frac{1}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

उदाहरण 4: निम्न सम्मिश्र संख्याओं को $A+iB$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\dfrac{2+\sqrt{-16}}{1-\sqrt{-25}}$ (ii) $1+i^7-15i^{16}+4i^{23}$

हल : (i) $\dfrac{2+\sqrt{-16}}{1-\sqrt{-25}}=\dfrac{2+\sqrt{16}\sqrt{-1}}{1-\sqrt{25}\sqrt{-1}}=\dfrac{2+4i}{1-5i}=\dfrac{2+4i}{1-5i}\times\dfrac{1+5i}{1+5i}$

$$=\frac{2+10i+4i+20i^2}{1-25i^2}=\frac{2+14i+20(-1)}{1-25(-1)}$$

$$=\frac{-18+14i}{1+25}=\frac{-18}{26}+\frac{14}{26}i=\frac{-9}{13}+\frac{7}{13}i.$$

(ii) $1+i^7-15i^{16}+4i^{23}=1+(i^2)^3 i-15(i^2)^8+4(i^2)^{11} i$

$=1+(-1)^3 i-15(-1)^8+4(-1)^{11} i$ $\quad [\because i^2=-1]$

$=1-i-15-4i$

$=-14-5i$.

उदाहरण 5: x तथा y का मान ज्ञात कीजिए, यदि

$$(x+iy)(2+3i)=1+8i$$

हल : $\because \quad (x+iy)(2+3i)=1+8i$

$\Rightarrow \quad 2x+3xi+2yi+3yi^2=1+8i$

$\Rightarrow \quad (2x-3y)+(3x+2y)i=1+8i$ $\quad [\because i^2=-1]$

$\Rightarrow \quad 2x-3y=1$ एवं $3x+2y=8$

सरल करने पर $x=2$ तथा $y=1$.

उदाहरण 6: यदि $z_1 = 2+3i$ तथा $z_2 = 1-i$ तो निम्न का सत्यापन कीजिए

(i) $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$.

(ii) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

हल : $z_1 = 2+3i$ एवं $z_2 = 1-i$

अतः $z_1 + z_2 = (2+1) + i(3-1) = 3+2i$

तथा $z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(1-i) = 2-2i+3i-3i^2 = 5+i$

अब $|z_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$; $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $|z_1 z_2| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$;

एवं $|z_1 + z_2| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

अतः (i) $|z_1|\cdot|z_2| = \sqrt{13}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{26} = |z_1 z_2|$

(ii) $|z_1| + |z_2| = \sqrt{13} + \sqrt{2} > \sqrt{13} = |z_1 + z_2|$

उदाहरण 7: यदि $|z| = 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{z-1}{z+1}$, $z \ne -1$ एक शुद्ध काल्पनिक संख्या है।

हलः माना $z = x+iy$ तब प्रश्नानुसार $|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{x-1+iy}{x+1+iy} \times \frac{x+1-iy}{x+1-iy}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1) - iy(x-1) + iy(x+1) - i^2y^2}{(x+1)^2 - i^2y^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1 - iy(x-1-x-1) - (-1)y^2}{(x+1)^2 - (-1)y^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1+2yi}{x^2+1+2x+y^2} = \frac{2yi}{2(1+x)} \qquad [\because x^2+y^2=1]$$

$$= \frac{y}{x+1}i$$

(विशुद्ध काल्पनिक संख्या)

प्रश्नमाला 5.1

1. निम्नलिखित को सरलतम रूप में लिखिए।

   (i) i^{52} (ii) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}$ (iii) $(1+i)^5(1-i)^5$

2. निम्नलिखित संख्याओं के योज्य एवं गुणन प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

   (i) $1+2i$ (ii) $1/(3+4i)$ (iii) $(3+i)^2$

3. सम्मिश्र संख्या $\dfrac{(2+i)^3}{3+i}$ की संयुग्मी संख्या ज्ञात कीजिए।

4. निम्नलिखित के मापांक ज्ञात कीजिए।

(i) $4+i$ (ii) $-2-3i$ (iii) $1/(3-2i)$

5. यदि $a^2+b^2=1$ तो $\dfrac{1+b+ia}{1+b-ia}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $a=\cos\theta+i\sin\theta$ तब $(1+a)/(1-a)$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. समीकरण $\dfrac{(1+i)x-2i}{3+i}+\dfrac{(2-3i)y+i}{3-i}=i$ को सन्तुष्ट करने वाले x, y के मान ज्ञात कीजिए।

8. यदि z_1 तथा z_2 कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

9. यदि $a+ib=\dfrac{c+i}{c-i}$, जहाँ c एक वास्तविक संख्या है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$a^2+b^2=1 \text{ और } \frac{b}{a}=\frac{2c}{c^2-1}$$

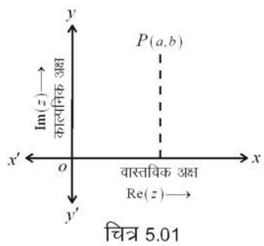
10. यदि $(x+iy)^{1/3}=a+ib$ है तो सिद्व कीजिए कि $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=4(a^2-b^2)$

11. यदि $\dfrac{(x+i)^2}{3x+2}=a+ib$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{(x^2+1)^2}{(3x+2)^2}=a^2+b^2$

5.15 सम्मिश्र संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण (Geometrical reprsentation of complex numbers)

(A) कार्तीय निरूपण (Cartesian representation)

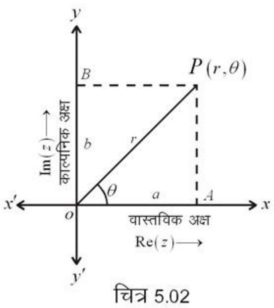
किसी समतल पर दो समकोणीय अक्षों XOX' तथा YOY' के सापेक्ष किसी सम्मिश्र संख्या $z=a+ib$ को एक अद्वितीय बिन्दु P जिसके निर्देशांक (a, b) हैं से निरूपित किया जाता है। XOX' तथा YOY' को क्रमशः वास्तविक एवं काल्पनिक अक्ष कहते हैं। सभी वास्तविक संख्याओं के संगत बिन्दु XOX' पर तथा सभी विशुद्ध काल्पनिक संख्याओं के संगत बिन्दु YOY' पर प्राप्त होते हैं। एक सम्मिश्र संख्या z को बिन्दु रूप में जिस समतल में निरूपित किया जाता है उस समतल में स्थित प्रत्येक बिन्दु के संगत एक अद्वितीय सम्मिश्र संख्या निरूपित होती है। इस समतल को सम्मिश्र समतल या आर्गेण्ड समतल (Argand plane) कहते हैं।



चित्र 5.01

(B) ध्रुवीय निरूपण (Polar representation)

माना P(a, b) सम्मिश्र संख्या $z=a+ib\neq 0$ को निरूपित करता है। जहाँ माना $OP=r$ तथा OP, $x-$अक्ष की धनात्मक दिशा से θ कोण बनाता है। तब P को वास्तविक संख्याओं के एक अद्वितीय क्रमित युग्म (r, θ) से निरूपित किया जा सकता है जो कि बिन्दु P के ध्रुवीय निर्देशांक कहलाते हैं। ध्रुवीय निर्देशांक में मूल बिन्दु O को ध्रुव तथा अर्ध अक्ष OX को प्रारम्भिक रेखा कहते हैं।



चित्र 5.02

यहाँ $a/r=\cos\theta$ एवं $b/r=\sin\theta$

$\Rightarrow$ $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$ एवं $\tan\theta=b/a$

यह सम्मिश्र संख्या z का ध्रुवीय रूप कहलाता है। यहाँ $r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$, तथा $\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ क्रमशः सम्मिश्र संख्या के मापांक एवं कोणांक कहलाते हैं।

टिप्पणीः

(i) किसी सम्मिश्र संख्या का कोणांक अद्वितीय नहीं होता है। यदि सम्मिश्र संख्या $z\neq 0$ का कोणांक θ है तो $\theta+2n\pi$, जहाँ $n\in I$ भी उसके कोणांक हैं। किसी सम्मिश्र संख्या $z\neq 0$ के लिए अन्तराल $0\leq\theta<2\pi$ में θ का केवल एक मान प्राप्त होता है। परन्तु हम कोणांक को निर्धारित करने हेतु 2π अन्तराल अर्थात् $-\pi<\theta\leq\pi$ काम में लेते हैं। सम्मिश्र संख्या $z\neq 0$ के कोणांक θ का वह मान जो कि अन्तराल $-\pi<\theta\leq\pi$ में स्थित है मुख्य कोणांक कहलाता है।

(ii) सूत्र $\theta=\tan^{-1}(b/a)$, कोणांक 'θ' ज्ञात करने के लिए अपूर्ण सूत्र है।

उदाहरणार्थः सम्मिश्र संख्या $z_1=\sqrt{3}+i$ तथा $z_2=-\sqrt{3}-i$ सम्मिश्र संख्या आर्गेन्ड समतल में दो अलग–अलग बिन्दुओं को प्रकट करते हैं जब कि उपर्युक्त सूत्र से उनका कोणांक $\pi/6$ प्राप्त होता है।

(iii) सम्मिश्र संख्या z का कोणांक उस चतुर्थांश (Quadrant) पर निर्भर करता है जिसमें z स्थित है अतः

(a) यदि $a>0, b>0$ (प्रथम चतुर्थांश) तब कोणांक $z=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$

(b) यदि $a<0, b>0$ (द्वितीय चतुर्थांश) तब कोणांक $z=\pi-\tan^{-1}|b/a|$

(c) यदि $a<0, b<0$ (तृतीय चतुर्थांश) तब कोणांक $z=-\pi+\tan^{-1}|b/a|$

(d) यदि $a>0, b<0$ (चतुर्थ चतुर्थांश) तब कोणांक $z=-\tan^{-1}|b/a|$

(iv) सम्मिश्र संख्या 0 का कोणांक अपरिभाषित है।

(v) सम्मिश्र संख्या के ध्रुवीय रूप $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ की कुछ विशेष स्थितियाँ

(a) $1=\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ$ (b) $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

(c) $i=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ (d) $-i=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

उदाहरणार्थः सम्मिश्र संख्या $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए एवं इसके कोणांक और मापांक ज्ञात कीजिए।

हलः माना $z=\dfrac{1+2i}{1-3i}=\dfrac{(1+2i)}{(1-3i)}\times\dfrac{(1+3i)}{(1+3i)}=\dfrac{-5+5i}{10}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

माना $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ (ध्रुवीय रूप)

तब $r\cos\theta=-1/2$ (1)

$r\sin\theta=1/2$ (2)

(1) व (2) को वर्ग कर जोड़ने पर

$r^2=1/2 \quad\Rightarrow\quad r=1/\sqrt{2}$

(2) में (1) का भाग देने पर

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\frac{(1/2)}{(-1/2)}\quad\Rightarrow\quad\tan\theta=-1$$

$\because$ $(-1/2, 1/2)$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है अतः कोणांक $z=\pi-\tan^{-1}|b/a|$ से

कोणांक $z=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$

$\therefore \quad \frac{1+2i}{1-3i}$ का ध्रुवीय रूप $= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

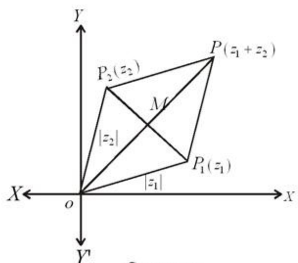
मापांक $z = r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा कोणांक $z = \frac{3\pi}{4}$

5.16 सम्मिश्र संख्याओं के योग का ज्यामितीय निरूपण
(Geometrical representation of sum of two complex numbers):

माना कि आर्गण्ड चित्र में बिन्दु P_1 व P_2 क्रमशः दो सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = a_1 + ib_1$ तथा $z_2 = a_2 + ib_2$ को निरूपित करते हैं। OP_1 तथा OP_2 को आसन्न भुजाएँ मानते हुए हम समान्तर चतुर्भुज OP_1PP_2 का निर्माण करते हैं। स्पष्टतः P_1 तथा P_2 के निर्देशांक क्रमशः (a_1, b_1) तथा (a_2, b_2) होंगे। हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

अतः M को P_1P_2 का मध्य बिन्दु लेने पर M के निर्देशांक $\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}\right)$ होंगे।

अब M, OP का भी मध्य बिन्दु है तथा O के निर्देशांक (0, 0) है। अतः P के निर्देशांक (a_1+a_2, b_1+b_2) होंगे। अतः बिन्दु P सम्मिश्र संख्या z_1+z_2 को निरूपित करेगा।



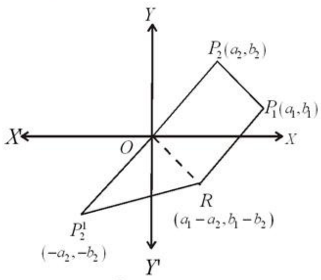
चित्र 5.03

टिप्पणीः $\because \quad OP \le OP_1 + P_1P \quad \Rightarrow \quad |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

अतः इससे सिद्ध होता है कि दो सम्मिश्र राशियों के योग का मापांक उनके अलग–अलग मापांकों के योग से छोटा या बराबर होता है।

5.17 दो सम्मिश्र संख्याओं के व्यवकलन का ज्यामितीय निरूपण
(Geometrical representation of substraction of two complex numbers):

माना $z_1 = a_1 + ib_1$ तथा $z_2 = a_2 + ib_2$ दो सम्मिश्र संख्याएँ है। इन संख्याओं को आर्गण्ड चित्र 5.04 में दो बिन्दुओं P_1 और P_2 से निरूपित किया गया है जिनके निर्देशांक क्रमशः (a_1, b_1) और (a_2, b_2) है। चित्र में P_2O को P_2' तक इस प्रकार बढ़ाया कि $|OP_2| = |OP_2'|$, तब बिन्दु P_2' सम्मिश्र संख्या $(-z_2)$ को निरूपित करेगा जिसके निर्देशांक $(-a_2, -b_2)$ होंगे। अब OP_1 व OP_2' को आसन्न भुजाएं मानते हुए OP_1RP_2' समान्तर चतुर्भुज का निर्माण करते हैं। चूँकि सम्मिश्र संख्या (z_1) तथा $(-z_2)$ का योग समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण OR के सिरे R द्वारा निरूपित होता है। अतः R के निर्देशांक $(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$ होंगे जो कि दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के अन्तर को ज्यामितीय रूप से निरूपित करेगा।



चित्र 5.04

5.18 दो सम्मिश्र संख्याओं के गुणनफल का ज्यामितीय निरूपण
(Geometrical representation of the product of two complex numbers):

माना आर्गण्ड चित्र 5.05 में दो सम्मिश्र संख्याएँ z_1 और z_2 दो बिन्दुओं P_1 और P_2 द्वारा निरूपित किए जाते हैं जहाँ $z_1 = a_1 + ib_1$ तथा $z_2 = a_2 + ib_2$.

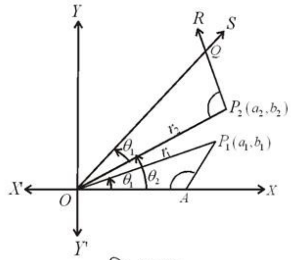
माना $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ तथा $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\therefore \quad OP_1 = r_1, OP_2 = r_2$

$\angle XOP_1 = \theta_1$ तथा $\angle XOP_2 = \theta_2$ है।

माना x- अक्ष पर एक बिन्दु A इस प्रकार है कि $OA = 1$.

$\therefore$ A बिन्दु $1+i0$ को प्रदर्शित करता है। AP_1 को मिलाया तथा P_2 पर $\angle OAP_1 = \angle OP_2R$ बनाया एवं O पर $\angle P_2OS = \theta_1$ बनाया तब OS व P_2R आपस में Q पर मिलते हैं। त्रिभुज OAP_1 तथा OP_2Q समरूप हैं। अतः समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म से



चित्र 5.05

$$\frac{OQ}{OP_2} = \frac{OP_1}{OA} \Rightarrow OQ = OP_1 \times OP_2$$
$$= r_1 r_2 \; (\because OA = 1)$$

तथा $\angle XOQ = \angle XOP_2 + \angle P_2OQ$
$$= \angle XOP_2 + \angle XOP_1$$
$$= \angle XOP_1 + \angle XOP_2$$
$$= \theta_1 + \theta_2$$

अतः बिन्दु Q सम्मिश्र संख्या $r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ अर्थात् संख्या $z_1 z_2$ को निरूपित करता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 8: निम्न सम्मिश्र संख्याओं के कोणांक ज्ञात कीजिए:

(i) $1+20i$ (ii) $-7+i$ (iii) $1-i$ (iv) $-1-4i$

हल : (i) $1+20i$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है अतः

कोणांक $= \tan^{-1}(b/a) = \tan^{-1}(20/1)$

(ii) $-7+i$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है अतः

कोणांक $= \pi - \tan^{-1}|b/a| = \pi - \tan^{-1}(1/7)$

(iii) $1-i$ चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है अतः

कोणांक $= -\tan^{-1}|b/a| = -\tan^{-1}|-1/1| = -\tan^{-1} 1 = -\pi/4$

(iv) $-1-4i$ तृतीय चतुर्थांश में स्थित है अतः

कोणांक $= -\pi + \tan^{-1}|b/a| = -\pi + \tan^{-1}|-4/-1| = -\pi + \tan^{-1} 4$

उदाहरण 9: निम्न सम्मिश्र संख्याओं को ध्रुवीय रूप में लिखिए:

(i) $\sqrt{3}+i$ (ii) $\frac{i}{3} - \frac{3}{i}$

(iii) $-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\sin\frac{\pi}{5} + i\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)$

हल : (i) माना $\sqrt{3}+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore$ $r\cos\theta = \sqrt{3}$ (1)

तथा $r\sin\theta = 1$ (2)

(1) व (2) को वर्ग करके जोड़ने पर

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 3+1 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

(1) व (2) का भाग देने पर

$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ अतः $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ ($\because$ $\sqrt{3}+i$ प्रथम चतुर्थांश में है)

$\therefore$ $\sqrt{3}+i$ का ध्रुवीय रूप $= 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(ii) $\dfrac{i}{3} - \dfrac{3}{i} = \dfrac{i}{3} - \dfrac{3i}{i^2} = \dfrac{i}{3} + 3i = \dfrac{10}{3}i$

माना $\dfrac{10}{3}i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

अतः $r\cos\theta = 0$ तथा $r\sin\theta = \dfrac{10}{3}$

$\Rightarrow$ $r^2 = 0 + \dfrac{100}{9}$ अर्थात् $r = \dfrac{10}{3}$ तथा $\cos\theta = 0,\ \sin\theta = 1$ इसलिए $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

अतः $\dfrac{i}{3} - \dfrac{3}{i} = \dfrac{10}{3}i$ का ध्रुवीय रूप $= \dfrac{10}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

(iii) माना $-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore$ $r\cos\theta = -\dfrac{3}{2}$ तथा $r\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

वर्ग करके जोड़ने पर $r^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{4} = \dfrac{36}{4}$ $\Rightarrow$ $r = 3$

$\because$ $-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है अतः

कोणांक $\theta = \pi - \tan^{-1}|b/a|$

$$= \pi - \tan^{-1}\left|\frac{3\sqrt{3}}{2}\Big/-\frac{3}{2}\right| = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

अतः $-\dfrac{3}{2} + i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ का ध्रुवीय रूप $= 3\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

(iv) $\because$ $\sin\dfrac{\pi}{5} + i\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{5}\right)$

$$= 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} + i\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{10}$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{10}\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)$$

जो कि दी गई संख्या का ध्रुवीय रूप है जहाँ मापाँक $r = 2\sin\dfrac{\pi}{10}$ तथा कोणाँक $\theta = \dfrac{\pi}{10}$ है।

उदाहरण 10: यदि z_1 तथा z_2 कोई दो अशून्य सम्मिश्र संख्याऐं हों, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) कोणांक $z_1 z_2 =$ कोणांक $z_1 +$ कोणांक z_2

(ii) कोणांक $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) =$ कोणांक $z_1 -$ कोणांक z_2

हल : माना $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ तथा $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ जहाँ स्पष्टतः θ_1 और θ_2 क्रमशः z_1 और z_2 के कोणांक है।

(i) $$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

अतः $z_1 z_2$ का कोणांक $= \theta_1 + \theta_2 =$ कोणांक $z_1 +$ कोणांक z_2

(ii) $$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}\times\frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

अतः z_1/z_2 का कोणांक $= \theta_1 - \theta_2 =$ कोणांक $z_1 -$ कोणांक z_2

प्रश्नमाला 5.2

1. निम्न सम्मिश्र संख्याओं के कोणांक ज्ञात कीजिए:

   (i) $\frac{1+i}{1-i}$ (ii) $-1+\sqrt{3}\,i$ (iii) $\frac{5+i\sqrt{3}}{4-i2\sqrt{3}}$

2. निम्न सम्मिश्र संख्याओं को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ (iii) $\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$

3. यदि z_1 तथा z_2 दो अशून्य सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो सिद्ध कीजिए कि

   कोणांक $z_1\overline{z}_2 =$ कोणांक $z_1 -$ कोणांक z_2

5.19 सम्मिश्र संख्या $a+ib$ का वर्गमूल ज्ञात करना

(To find the square root of a complex number $a+ib$):

माना $\sqrt{a+ib}=x+iy$ तब $(a+ib)=(x+iy)^2$

$\Rightarrow \quad (a+ib)=(x^2-y^2)+(2xy)\,i$

वास्तविक व काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$$x^2-y^2=a \qquad (1)$$

तथा $$2xy=b \qquad (2)$$

$$\therefore \quad x^2+y^2=\sqrt{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}=\sqrt{a^2+b^2} \qquad (3)$$

(1) व (3) को जोड़ने पर

$$2x^2=a+\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad x=\pm\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}$$

इसी प्रकार (1) में से (3) घटाने पर

$$-2y^2=a-\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad y=\pm\sqrt{\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad \sqrt{a+ib}=\pm\left[\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}+i\sqrt{\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}\right]$$

5.20 इकाई के घनमूल (Cube roots of unity):

माना $\sqrt[3]{1}=z,$ तब $z^3=1$

$\Rightarrow \quad z^3-1=0$

$\Rightarrow \quad (z-1)(z^2+z+1)=0$

$\Rightarrow \quad (z-1)=0$ या $z^2+z+1=0$

$\Rightarrow \quad z=1$ या $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{(1-4)}}{2}$

$\Rightarrow \quad z=1$ या $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ इकाई के घनमूल $1, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ होते हैं।

अर्थात् इकाई के तीन घनमूल होते हैं जिनमें से दो सम्मिश्र राशियाँ होती है।

प्रमेय: सिद्ध कीजिए कि इकाई के घनमूल में सम्मिश्र मूल एक दूसरे के वर्ग होते हैं।

प्रमाण: माना $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ तथा $\beta = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ इकाई के दो सम्मिश्र मूल है।

$$\alpha^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-3-i2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \beta$$

$$\beta^2 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-3+i2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \alpha$$

अतः सिद्ध हुआ कि इकाई के सम्मिश्र घनमूल एक दूसरे के वर्ग होते हैं।

टिप्पणी:

1. इकाई के घनमूलों को $1, \omega, \omega^2$ से प्रदर्शित करते हैं।
2. इकाई के घनमूल के गुणधर्म : $(a)\,\omega^3 = 1$ तथा $(b)\,1+\omega+\omega^2 = 0.$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 11: $3-4i$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\sqrt{3-4i} = x+iy \Rightarrow 3-4i = x^2-y^2+2ixy$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$$x^2 - y^2 = 3 \quad (1)$$

तथा $$2xy = -4 \quad (2)$$

$\therefore \quad x^2+y^2 = \sqrt{(x^2-y^2)+4x^2y^2} = \sqrt{9+16} = 5$

(1) व (3) को जोड़ने पर, $2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2$

(3) में से (1) घटाने पर, $2y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm 1$

$\therefore \quad 2xy$ का मान ऋणात्मक है अतः x तथा y विपरित चिह्न के लेने होंगे।

अतः $x = 2$ तब $y = -1$ तथा $x = -2$ तब $y = 1$ होगा

$\therefore \quad \sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$

उदाहरण 12: -27 के धनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $-27 = (-3)(1)^{1/3} = -3,\ -3w,\ -3w^2$ $\quad \left[\because (1)^{1/3} = 1,\ \omega,\ \omega^2\right]$

उदाहरण 13: यदि $1,\ w,\ w^2$ इकाई के घनमूल हैं तो सिद्ध कीजिए कि $(1-w+w^2)(1+w-w^2) = 4$

हल : $(1-w+w^2)(1+w-w^2) = (-w-w)(-w^2-w^2)$ $\quad \left[\because 1+w+w^2 = 0\right]$

$$= (-2w)(-2w^2) = 4w^3 = 4(1) = 4$$

उदाहरण 14: यदि $x = a+b,\ y = aw+bw^2$ तथा $z = aw^2+bw$ तो सिद्ध कीजिए कि $x^2+y^2+z^2 = 6ab$

हल : $\because \quad x^2 = a^2+2ab+b^2, \quad y^2 = a^2w^2+2abw^3+b^2w^4 = a^2w^2+2ab+b^2w$ $\quad (\because w^3 = 1)$

तथा $z^2 = a^2w^4+2abw^3+b^2w^2 = a^2w+2ab+b^2w^2$

अतः $\quad x^2+y^2+z^2 = a^2(1+w^2+w)+6ab+b^2(1+w+w^2)$

$= a^2(0)+6ab+b^2(0) = 6ab$ $\quad (\because 1+w+w^2 = 0)$

उदाहरण 15: सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-w+w^{2}\right)\left(1-w^{2}+w^{4}\right)\left(1-w^{4}+w^{8}\right)...2n \text{ गुणनखण्ड } = 2^{2n}$$

हल : $\because$ $w^{3}=1$ तथा $1+w+w^{2}=0$

अतः $\left(1-w+w^{2}\right)\left(1-w^{2}+w^{4}\right)\left(1-w^{4}+w^{8}\right)...2n$ गुणनखण्ड

$$=\left(-w-w\right)\left(-w^{2}-w^{2}\right)\left(-w-w\right)\left(-w^{2}-w^{2}\right)...2n \text{ गुणनखण्ड}$$

$$=\left\{\left(-2w\right)\left(-2w^{2}\right)\right\}\left\{\left(-2w\right)\left(-2w^{2}\right)\right\}...n \text{ गुणनखण्ड}$$

$$=\left(4w^{3}\right)\left(4w^{3}\right)...n \text{ गुणनखण्ड}$$

$$=4^{n}=2^{2n}$$

उदाहरण 16: सरल कीजिए: $\left(x-1\right)^{3}+8=0$

हल : माना $x-1=y$ अतः दी गई समीकरण से

$$y^{3}+8=0 \qquad \Rightarrow \qquad y=\left(-8\right)^{1/3}=-2\left(1\right)^{1/3}=-2,\,-2w,\,-2w^{2}$$

$$\therefore \quad x-1=-2,\,-2\omega,\,-2\omega^{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=1-2,\ 1-2w,\ 1-2w^{2}$$

$$=-1,\quad 1-2w,\ 1-2w^{2}$$

प्रश्नमाला 5.3

1. निम्न सम्मिश्र संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   (i) $-5+12i$ (ii) $8-6i$ (iii) $-i$

2. $\sqrt{4+3\sqrt{-20}}+\sqrt{4-3\sqrt{-20}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. निम्न के धनमूल ज्ञात कीजिए।

   (i) -216 (ii) -512

4. सिद्ध कीजिए।

   (i) $1+w^{n}+w^{2n}=0$, जबकि $n=2,4$

   (ii) $1+w^{n}+w^{2n}=3$, जबकि n, 3 का गुणज हो।

5. सिद्ध कीजिए।

   (i) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{29}+\left(\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{29}=-1$

   (ii) $\left(1+5w^{2}+w\right)\left(1+5w+w^{2}\right)\left(5+w+w^{2}\right)=64$

6. $1, w, w^{2}$ इकाई के घनमूल हो तो सिद्ध कीजिए।

   $$\left(1+w\right)\left(1+w^{2}\right)\left(1+w^{4}\right)\left(1+w^{8}\right)....2n \text{ गुणनखण्ड } = 1$$

5.21 द्विघात समीकरण (Quadratic equation)

पूर्व कक्षाओं में द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के हल निकालने की विभिन्न विधियों का अध्ययन किया है। इसमें श्रीधराचार्य द्वारा दी गई व्यापक विधि भी सम्मिलित है। इस अध्याय के प्रारम्भ में विविक्तिकर $b^2-4ac<0$ की स्थिति में भी प्राप्त हलों का अध्ययन किया है।

यहाँ हम विभिन्न द्विघात समीकरण के हल प्राप्त करने की वैदिक विधि का अध्ययन करते हुए प्राप्त मूलों के मध्य सम्बन्ध तथा मूलों की सहायता से द्विघात समीकरण के निर्माण विधि का अध्ययन करेंगे। (सम्मिश्र संख्याओं के विशेष परिपेक्ष में)

(A) वैदिक विधि से द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का हल निकालने की क्रिया विधिः इस विधि का अध्ययन अध्याय 10 के अध्ययन के पश्चात् करना उचित होगा।

(i) सर्वप्रथम द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का प्रथम अवकलन ज्ञात कर इसे D_1 कहे।

उदाहरणार्थः x^2-5x+6 के दो गुणनखण्डों $(x-2)$ तथा $(x-3)$ का योग $2x-5$ इसका प्रथम अवकलज है। इसे $D_1=2x-5$ लिखे।

(ii) विविक्तिकर ज्ञात करे अर्थात् मध्य पद के वर्ग में से प्रथम पद तथा तृतीय पद के गुणा की चार गुणा घटा कर वर्ग मूल निकाले

अर्थात् उपर्युक्त उदाहरण में $\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times6}=\pm1$

(iii) अब $D_1=\pm1$ (विविक्तिकर) रख कर हल ज्ञात करें।

अतः $2x-5=\pm1 \Rightarrow \quad x=2$ या 3

उदाहरणार्थः (i) $7x^2-5x-2=0$ का हल

$$14x-5=\pm\sqrt{25+4\times7\times2}=\pm9 \qquad \Rightarrow 14x=5\pm9 \ \Rightarrow x=1 \text{ या } -4/14$$

(ii) $ax^2+bx+c=0$ का हल

$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$ से प्राप्त होगा।

यह एक व्यापक विधि हैं जिसके द्वारा अभ्यास के पश्चात् मौखिक रूप से भी हल निकाले जा सकते हैं।

(B) विशेष अवस्थाओं में द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों के गुणधर्म

(i) यदि $c=0$, तो एक मूल शून्य होगा।
(ii) यदि $b=0$, तो मूल समान किन्तु विपरित के होंगे।
(iii) यदि $b=c=0$, तो दोनों मूल शून्य होंगे।
(iv) यदि $a=c$, तो मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे।
(v) यदि $a=0$, तो एक मूल अनन्त होगा।
(vi) यदि $a=b=0$ तो दोनों मूल अनन्त होंगे।

उदाहरणार्थः $x^2-10x+21=m$ के मूल समान होने पर m का मान होगा?

हल : समान मूलों के लिए $\left(b^2=4ac\right)$ से $(-10)^2=4\times1\times(21-m)\Rightarrow m=-4$

(C) द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों तथा गुणाकों के मध्य सम्बन्धः

यदि द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α तथा β है तो

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ तथा } \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

इसका योग $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ अर्थात् मूलों का योग $=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

इनका गुणा $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ अर्थात् मूलों का गुणा $=\dfrac{\text{निरपेक्ष पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

टिप्पणी: यदि x^2 का गुणांक 1 लिखा जाए तो द्विघात समीकरण का रूप $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ होता है तो

मूलों का योग $=-x$ का गुणांक

मूलों का गुणा = निरपेक्ष पद

(D) द्विघात समीकरण का निर्माण

(i) जब मूल दिये गये हों: माना α तथा β दिये गये मूल है। क्योंकि समीकरण $x=\alpha$ तथा $x=\beta$ से सन्तुष्ट होते है। अतः $(x-\alpha)$ तथा $(x-\beta)$ समीकरण के गुणनखण्ड होने चाहिए अतः आवश्यक समीकरण $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ होगा।

अर्थात् $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

अर्थात् $x^2-(\text{मूलों का योग})x+\text{मूलों का गुणा}=0$

(ii) जब मूल परस्पर एक दिए समीकरण के मूलों से हों: दिए समीकरण से मूलों के योग एवं गुणा ज्ञत करे। फिर आवश्यक समीकरण के मूलों के योग एवं गुणा प्राप्त कर उपर्युक्त विधि से समीकरण ज्ञात करें।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 17: वैदिक विधि से $x^2+x+3=0$ के हल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $D_1=2x+1,$ विविक्तिकर $=\pm\sqrt{1-12}=\pm\sqrt{11}\,i$

$\therefore\quad 2x+1=\pm\sqrt{11}\,i$ अतः हल $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{2}$

उदाहरण 18: वैदिक विधि से $2x^2-9ix-9=0$ के हल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $D_1=4x-9i$ तथा विविक्तिकर $=\pm\sqrt{-81+4\times2\times9}=\pm3i$

$\therefore\quad 4x-9i=\pm3i \Rightarrow x=3i$ या $\frac{3}{2}i$

उदाहरण 19: $x^2-2x+(-2+4i)=0$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ $D_1=2x-2$ तथा विविक्तिकर $=\pm\sqrt{4-4\times1\times(-2+4i)}=\pm2\sqrt{3-4i}$

अतः यहाँ से हमें $\sqrt{3-4i}$ का वर्गमूल निकालना आवश्यक है

माना यह वर्गमूल $u+iv$ है

$\therefore\quad \sqrt{3-4i}=u+iv$

$\Rightarrow\quad 3-4i=u^2-v^2+2uv\,i$

अतः $u^2-v^2=3$ तथा $2uv=-4$

$\therefore\quad u^2+v^2=\sqrt{(u^2-v^2)^2+4u^2v^2}$ से $u^2+v^2=\sqrt{9+16}=5$

$\therefore\quad u^2-v^2=3$ तथा $u^2+v^2=5$ से $2u^2=8$ तथा $2v^2=2$

$\Rightarrow\quad u^2=4$ तथा $v^2=1$

$\Rightarrow\quad u=\pm2$ तथा $v=\pm1$

परन्तु $2uv=-4$ होने से u तथा v विपरित चिह्न के लेने पर

$\sqrt{3-4i}=\pm(2-i)\qquad \therefore\quad D_1=2x-2=\pm2(2-i)$ [विविक्तिकर]

$\Rightarrow\quad x-1=\pm(2-i)\qquad \Rightarrow\quad x=3-i$ या $-1+i$

उदाहरण 20: वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों के व्युत्क्रम हों।

हल : माना दिये समीकरण के मूल α तथा β है।

अतः $\alpha+\beta=-b/a$ तथा $\alpha\beta=c/a$

अभीष्ट समीकरण के मूल $1/\alpha$ तथा $1/\beta$ है।

अतः अभीष्ट समीकरण $x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}=0$ होगा।

$$\Rightarrow \quad x^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-\left(\frac{-b/a}{c/a}\right)x+\frac{1}{c/a}=0$$ [(1) व (2) से प्रयोग से]

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1=0$$

$\Rightarrow$ $cx^2+bx+a=0$ ही अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्नमाला 5.4

1. निम्न समीकरणों के हल वैदिक विधि से ज्ञात कीजिए।

   (i) $x^2+4x+13=0$ (ii) $2x^2+5x+4=0$ (iii) $ix^2+4x-15/2=0$

2. द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल

   (i) 5 तथा –2 हैं। (ii) $1+2i$ हैं।

3. यदि समीकरण $x^2-px+q=0$ का एक मूल दूसरे का दुगुना है तो सिद्ध कीजिए कि $2p^2=9q$.

4. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिसमें समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल $m:n$ के अनुपात में है।

विविध प्रश्नमाला–5

1. सम्मिश्र संख्या $\frac{1+i}{1-i}$ का वास्तविक एवं काल्पनिक भाग क्रमशः है:

   (A) 1, 1 (B) 0, 0 (C) 0, 1 (D) 1, 0

2. यदि $2+(2a+5ib)=8+10i$, तब–

   (A) $a=2,\ b=3$ (B) $a=2,\ b=-3$ (C) $a=3, b=2$ (D) $a=3,\ b=-2$

3. $3-i$ का गुणन प्रतिलोम है:

   (A) $\frac{3+i}{10}$ (B) $\frac{-3+i}{10}$ (C) $\frac{3-i}{10}$ (D) $\frac{-3-i}{10}$

4. $\frac{2-3i}{4+i}$ का संयुग्मी है:

   (A) $\frac{-5+14i}{17}$ (B) $\frac{5+14i}{17}$ (C) $\frac{14+5i}{17}$ (D) $\frac{14-5i}{17}$

5. यदि $z_1, z_2 \in C$ तो कौनसा कथन सत्य है:

(A) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| + |z_2|$ (B) $|z_1 + z_2| \leq |z_1 - z_2|$

(C) $|z_1 + z_2| \geq |z_1 - z_2|$ (D) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

6. यदि $|z-3| = |z+3|$ तो z स्थित है

(A) x – अक्ष पर (B) y – अक्ष पर (C) $x = y$ रेखा पर (D) $x = -y$ रेखा पर

7. –2 का मुख्य कोणांक लिखिए।

8. $\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$ का ध्रुवीय रूप लिखिए।

9. $4 + 5w^4 + 3w^5$ का मान होगा?

10. $\frac{1}{1 - \cos\theta + i\sin\theta}$ को $a + ib$ रूप में लिखिए।

11. $|1-i|^x = 2^x$ के शून्येत्तर पूर्णांक मूलों की संख्या है:

12. यदि $z_1, z_2 \in C$ तो सिद्ध कीजिए:

(i) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (ii) $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

(iii) $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$

13. यदि $|z_1| = 1 = |z_2|$ तो सिद्ध कीजिए $|z_1 + z_2| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right|$

14. यदि $\frac{(a+i)^2}{2a-i} = p + iq$ तो सिद्ध कीजिए कि $p^2 + q^2 = \frac{(a^2+1)^2}{4a^2+1}$.

15. यदि $|z_1| = |z_2|$ तथा कोणांक z_1 + कोणांक $z_2 = 0$ तो सिद्ध कीजिए कि $z_1 = \overline{z}_2$

16. यदि θ_1, θ_2 क्रमशः सम्मिश्र संख्याएँ z_1, z_2 के कोणांक है तो सिद्ध कीजिए कि

$z_1\,\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$

17. सिद्ध कीजिए कि

(i) $(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

(ii) $(a + b + c)(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

18. यदि α, β दो भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हों तथा $|\beta| = 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $\left|\frac{\beta - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right| = 1.$

19. यदि α तथा β समीकरण $px^2 - qx - r = 0$ के मूल है तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $1/\alpha$ तथा $1/\beta$ है।

20. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिससे समीकरण $\ell x^2 - 2mx + n = 0$ का एक मूल दूसरे का P गुणा होता है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. $i=\sqrt{-1}$
2. $z=a+ib$ सम्मिश्र राशि कहलाती है जहाँ $a,b\in R$. इसे (a,b) द्वारा भी व्यक्त किया जाता है।

   z का वास्तविक भाग $=\text{Re}(z)=a$ तथा काल्पनिक भाग $=\text{Im}(z)=b$.
3. $z=a+ib=0 \Rightarrow a=0$ तथा $b=0$
4. माना $z_1=a_1+ib_1$ तथा $z_2=a_2+ib_2$ तब $z_1=z_2 \Rightarrow a_1=a_2$ तथा $b_1=b_2$
5. सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को C से निरूपित किया जाता है

   अर्थात् $C=\{a+ib;\ a,b\in R\}$ या $C=\{(a,b);\ a,b\in R\}$
6. सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में निम्न मूलभूत संक्रियाएँ होती है :

   (i) योग (ii) व्यवकलन (iii) गुणन (iv) भाग C_0 में
7. सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में योग व गुण संक्रियाएँ निम्न गुणधर्म का पालन करती है :

   (i) संवृत्त गुणधर्म अर्थात् $z_1,z_2\in C \Rightarrow z_1+z_2\in C$ तथा $z_1\cdot z_2\in C$

   (ii) साहचर्य गुणधर्म अर्थात् $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$

   तथा $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3,\ \forall z_1,z_2,z_3\in C$

   (iii) सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में

   योज्य तत्समक $=0+i\,0$,

   गुणज तत्समक $=1+i0=1$

   (iv) z का योज्य प्रतिलोम $=-z$ तथा $z=a+ib$ का गुणन प्रतिलोम

   $$\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{i(-b)}{a^2+b^2}\quad [z\neq 0]$$

   (v) क्रमविनिमेय गुणधर्म अर्थात् $z_1+z_2=z_2+z_1$ तथा $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1\ \forall\ z_1,z_2\in C$

   (vi) निरसन नियम $z_1+z_3=z_2+z_3 \Rightarrow z_1=z_2;\quad z_3+z_1=z_3+z_2 \Rightarrow z_1=z_2$

   $z_1\cdot z_3=z_2\cdot z_3 \Rightarrow z_1=z_2;\quad z_3\cdot z_1=z_3\cdot z_2 \Rightarrow z_1=z_2\ [z_3\neq 0]$
8. संयुग्मी सम्मिश्र संख्या : प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $z=x+iy$ की एक संयुग्मी सम्मिश्र संख्या होती है इसे $\bar{z}$ से निरूपित करते हैं जहाँ $\bar{z}=x-iy$.
9. संयुग्मी सम्मिश्र संख्या के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्म

   (i) $z+\bar{z}=2\,\text{Re}(z)$ तथा $z-\bar{z}=2\,\text{Im}(z)$

   (ii) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ तथा $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$

   (iii) $\overline{(\bar{z})}=z,\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ z_2\neq 0$
10. यदि $z=a+ib$ तब $|z|=|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$
11. $z\bar{z}=|z|^2 \quad \therefore \quad z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$
12. एक समतल में दो लम्बवत अक्ष XOX' तथा YOY' में x- अक्ष द्वारा सम्मिश्र संख्या का वास्तविक भाग तथा y- अक्ष द्वारा काल्पनिक भाग प्रदर्शित करें तो प्रत्येक सम्मिश्र संख्या इस समतल पर बिन्दुओं द्वारा प्रदर्शित होती है। इस समतल को आर्गेण्ड समतल तथा इस चित्र को आर्गेण्ड चित्र कहते हैं।

13. सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय रूप : सम्मिश्र संख्या $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ के ध्रुवीय रूप को प्रदर्शित करता है। जहाँ $r = |z|$ तथा कोणांक $= \theta$.

14. $-\pi < \theta \le \pi$ की स्थिति में कोणांक θ, सम्मिश्र संख्या का मुख्य कोणांक कहलाता है।

15. सम्मिश्र संख्या $a + ib$ का वर्गमूल

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left[\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)/2\right]^{1/2} \pm i\left[\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)/2\right]^{1/2}$$

16. वैदिक विधि से द्विघात समीकरण के हल हेतु समीकरण के प्रथम अवकलज $= \pm$ विविक्तिकर रख कर हल करें।

17. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों का योग $= -\dfrac{b}{a}$ तथा मूलों का गुणा $= \dfrac{c}{a}$

18. यदि मूल α तथा β दिये है तो द्विघात समीकरण $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$ से प्राप्त होगा।

उतरमाला

प्रश्नमाला 5.1

1. (i) 1, (ii) $-\sqrt{6}$, (iii) 32 **2.** (i) $-1-2i, \frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$, (ii) $-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i,\ 3+4i$, (iii) $-8-6i, \frac{2}{25}-\frac{3}{50}i$

3. $\frac{17}{10}-\frac{31}{10}i$ **4.** (i) $\sqrt{17}$, (ii) $\sqrt{13}$, (iii) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ **5.** $b+ia$ **6.** $i\cot\theta/2$ **7.** $x=3,\ y=-1$

प्रश्नमाला 5.2

1. (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{2\pi}{3}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ **2.** (i) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ (ii) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (iii) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

प्रश्नमाला 5.3

1. (i) $\pm(2+3i)$ (ii) $\pm(3-i)$ (iii) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

2. $\pm 6, \pm 2\sqrt{5}i$ **3.** (i) $-6, -6w, -6w^2$ (ii) $-8, -8w, -8w^2$

प्रश्नमाला 5.4

1. (i) $-2\pm 3i$ (ii) $\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}$ (iii) $\frac{3-i}{2}, \frac{-3+9i}{2}$

2. (i) $x^2-3x-10=0$ (ii) $x^2-2x+5=0$ **4.** $mnb^2 = ac(m+n)^2$

विविध प्रश्नमाला 5

1. C **2.** C **3.** A **4.** B **5.** D **6.** B

7. π **8.** $5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ **9.** $\sqrt{3}i$ **10.** $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\cot\frac{\theta}{2}$

11. शून्य **19.** $rx^2+qx-p=0$ **20.** $4m^2p = \ell n(1+p)^2$