# 09

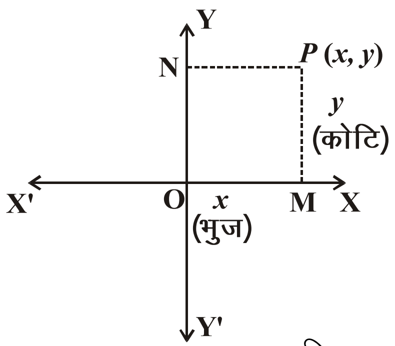
# निर्देशांक ज्यामिति (Co-Ordinate Geometry)

## 9.01 प्रस्तावना (Introduction)

पूर्ववर्ती कक्षाओं में अभी तक जिस ज्यामिति का अध्ययन किया है, उसे यूक्लिडियन ज्यामिति कहते हैं। अब हम वैश्लेषिक ज्यामिति का अध्ययन करेंगे। जिसमें बिन्दु की स्थिति विशिष्ट संख्याओं, जिन्हें निर्देशांक कहते हैं, द्वारा निरूपित की जाती है और इनसे बनी रेखाओं और वक्रों को बीजीय समीकरण द्वारा निरूपित किया जाता है। वैश्लेषिक ज्यामिति में निर्देशांकों का प्रयोग होने के कारण इसे निर्देशांक ज्यामिति कहा जाता है।

## 9.02 कार्तीय निर्देशांक (Cartesian co–ordinate)

माना किसी समतल में दो परस्पर लम्बवत् रेखाएँ $XOX'$ और $YOY'$ हैं जो कि बिन्दु $O$ पर प्रतिच्छेद करती हैं। इन्हें निर्देशांक अक्ष(coordinate axes) कहते हैं और $O$ को मूलबिन्दु (origin) कहते हैं। $XOX'$ और $YOY'$ परस्पर लम्बवत हैं, अतः $XOX'$ और $YOY'$ को समकोणिक अक्ष या आयतीय निर्देशांक अक्ष (rectangular axes) कहते हैं।

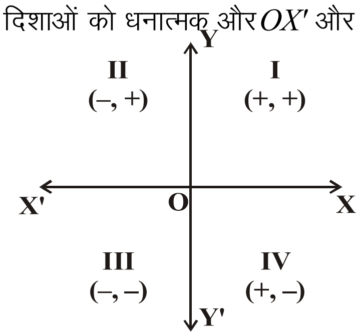



आकृति 9.01

अब समतल में बिन्दु $P$ के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए बिन्दु $P$ से $XOX'$ या $x$–अक्ष पर लम्ब $PM$ और $YOY'$ या $y$–अक्ष पर लम्ब $PN$ डालते हैं। मूल बिन्दु $O$ से $M$ की दिष्ट दूरी $(OM = x)$ बिन्दु $P$ का $x$–निर्देशांक या भुज (abscissa) और $M$ से $P$ की दिष्ट दूरी $(MP = y)$ बिन्दु $P$ का $y$–निर्देशांक या कोटि (ordinate) कहलाती है। बिन्दु जिसका भुज $x$ और कोटि $y$ हो, बिन्दु $(x, y)$ अर्थात् $P(x,y)$ कहलाता है। बिन्दु के निर्देशांक सदैव क्रमित युग्म $(x, y)$ में निरूपित किये जाते हैं। अर्थात् बिन्दु के निर्देशांक लिखते समय $x$–निर्देशांक पहले और $y$–निर्देशांक बाद में लिखते हैं और इन्हें अल्प विराम ( ,) से अलग करते हुए छोटे कोष्ठक में लिखते हैं।

## 9.03 चतुर्थांश में निर्देशांकों के चिह्न (Sign of co–ordinate in quadrants)

आकृति 9.02 में, दोनों अक्ष $XOX'$ और $YOY'$ समतल को चार भागों में विभाजित करती हैं। इन्हें चतुर्थांश कहते हैं। $XOY$, $YOX'$, $X'OY'$ और $Y'OX$ को क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ चतुर्थांश कहते हैं। हम सदैव $OX$ और $OY$ दिशाओं को धनात्मक और $OX'$ और $OY'$ दिशाओं को ऋणात्मक लेते हैं।




आकृति 9.02

यदि समतल में किसी बिन्दु $P$ के निर्देशांक $(x, y)$ हो, तो

प्रथम चतुर्थांश में $x > 0, y > 0$ ; निर्देशांक $(+, +)$

द्वितीय चतुर्थांश में $x < 0, y > 0$ ; निर्देशांक $(-, +)$

तृतीय चतुर्थांश में $x < 0, y < 0$ ; निर्देशांक $(-, -)$

चतुर्थ चतुर्थांश में $x > 0, y < 0$ ; निर्देशांक $(+, -)$

**टिप्पणी :**

(i) किसी बिन्दु $P$ के निर्देशांक $(x, y)$ हैं, तो इसे $P(x, y)$ लिख सकते हैं।

(ii) किसी बिन्दु का भुज, बिन्दु की $y$–अक्ष से लम्बवत् दूरी होती है।

(iii) किसी बिन्दु की कोटि, बिन्दु की $x$–अक्ष से लम्बवत् दूरी होती है।

(iv) किसी बिन्दु का भुज, $y$–अक्ष के दायीं ओर धनात्मक और बायीं ओर ऋणात्मक होता है।

(v) किसी बिन्दु की कोटि, $x$–अक्ष के ऊपर धनात्मक और नीचे ऋणात्मक होती है।

(vi) यदि $y = 0$ हो, तो बिन्दु $x$–अक्ष पर स्थित होता है।

(vii) यदि $x = 0$ हो, तो बिन्दु $y$–अक्ष पर स्थित होता है।

(viii) यदि $x = 0, y=0$ हो, तो बिन्दु मूल बिन्दु है।

## 9.04 दो बिन्दुओं के बीच की दूरी (Distance between two points)

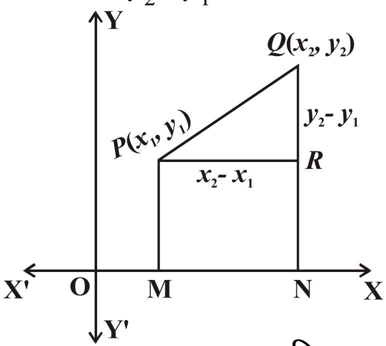
मानो $XOX'$ और $YOY'$ निर्देशांक अक्ष हैं और समतल में स्थित दो बिन्दु $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ है जिनके बीच की दूरी ज्ञात करनी है। बिन्दु $P$ और $Q$ से $x$–अक्ष पर लम्ब क्रमशः $PM$ और $QN$ डालते हैं और $P$ से $QN$ पर लम्ब $PR$ डाला। अतः $OM = P$ का भुज $= x_1$

इसी प्रकार $ON = x_2$ , $PM = y_1$

और $QN = y_2$

अतः आकृतिानुसार $PR = MN = ON - OM = x_2 - x_1$

और $QR = QN - RN = QN - PM = y_2 - y_1$




आकृति 9.03

अतः समकोण त्रिभुज $PRQ$ में बौधायन सूत्र से

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

या $$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$\therefore$ $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x - \text{निर्देशांकों का अन्तर})^2 + (y - \text{निर्देशांकों का अन्तर})^2}$$

जो कि दो बिन्दुओं के बीच की दूरी का सूत्र है।

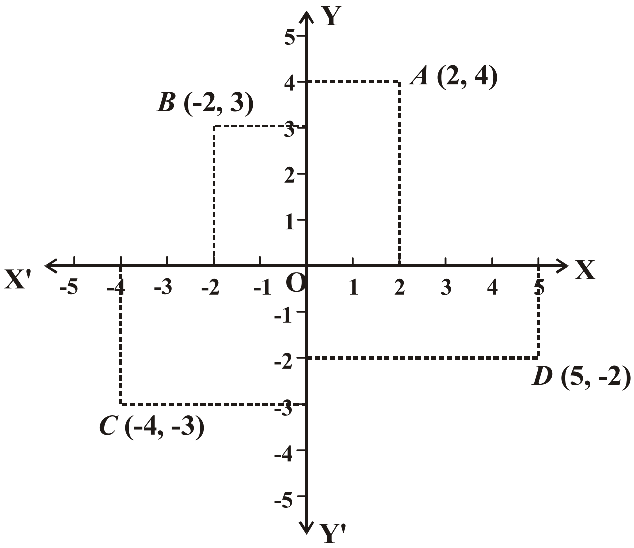
**विशेष स्थितिः** मूल बिन्दु O (0,0) से किसी बिन्दु $P(x, y)$ की दूरी

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण-1.** आयतीय निर्देशांक निकाय में बिन्दु (2, 4), (–2, 3), (–4, –3) और (5, –2) को आलेखित कीजिए।

**हल:**




**आकृति 9.04**

आकृति 9.04 में, आयतीय निर्देशांक $XOX'$ और $YOY'$ खींचते हैं और दिए गए बिन्दुओं (2, 4), (-2, 3), (-4, -3) और (5, -2) को चिह्नित करते हैं।

**उदाहरण-2.** यदि एक समबाहु त्रिभुज की भुजा $2a$ हो, तो उसके शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

**हल:** आकृति 9.05 के अनुसार

$\because$ $OAB$ समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा $2a$ है

$\therefore$ $OA = AB = OB = 2a$

अब बिन्दु $B$ से $OA$ पर लम्ब $BM$ डाला

$\therefore$ $OM = MA = a$

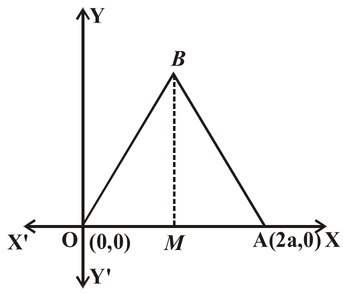
अतः समकोण त्रिभुज $OMB$ में,

$$OB^2 = OM^2 + MB^2$$

या $(2a)^2 = (a)^2 + MB^2$

या $MB^2 = 3a^2$

$\therefore$ $MB = \sqrt{3}a$




**आकृति 9.05**

अतः समबाहु त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक $O\,(0, 0)$, $A(2a, 0)$ और $B(a, \sqrt{3}a)$ क्योंकि $OM = a$ और $MB = \sqrt{3}a$ ।

**उदाहरण-3.** बिन्दुओं (2, 3) और (5, 6) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना बिन्दु (2, 3) और (5, 6) क्रमशः $P$ और $Q$ हैं, अतः इनके बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{9+9}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

**उदाहरण-4.** यदि बिन्दु $(x, 3)$ और $(5, 7)$ के बीच की दूरी 5 हो, तो $x$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हलः** माना $P(x, 3)$ और $Q(5, 7)$ दिये हुए बिन्दु हैं तो प्रश्नानुसार

$$PQ = 5$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (3-7)^2} = 5$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(x-5)^2 + (-4)^2 = 25$$

या $\quad x^2 - 10x + 25 + 16 = 25$

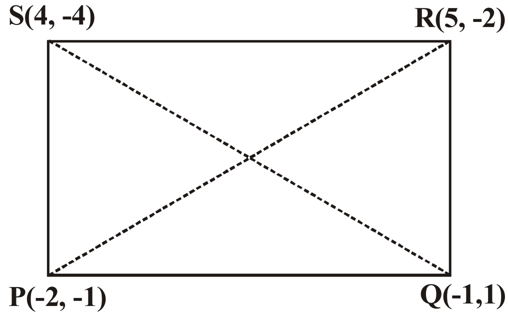
या $\quad x^2 - 10x + 16 = 0$

या $\quad (x-2)(x-8) = 0$

$\therefore \quad x = 2, 8$

**उदाहरण-5.** सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(-2, -1), (-1, 1), (5, -2)$ और $(4, -4)$ एक आयत के शीर्ष हैं।

**हलः** माना दिये बिन्दु $P(-2, -1), Q(-1, 1)$, R $(5, -2)$ और $S(4, -4)$ हैं




**आकृति 9.06**

$$PQ = \sqrt{[-2-(-1)]^2 + [-1-1]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$QR = \sqrt{[5-(-1)]^2 + [-2-1]^2} = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$$

$$RS = \sqrt{[4-5]^2 + [-4-(-2)]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$SP = \sqrt{[4-(-2)]^2 + [-4-(-1)]^2} = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$$

$\therefore \quad PQ = RS$ और $QR = SP$

अतः सम्मुख भुजाएँ समान हैं।

पुनः विकर्ण $\quad PR = \sqrt{[5-(-2)]^2 + [-2-(-1)]^2} = \sqrt{(7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$

$$QS = \sqrt{[4-(-1)]^2 + [-4-1)]^2} = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$$

अतः विकर्ण समान है। फलतः दिये गये बिन्दु $P, Q, R, S$ आयत के शीर्ष हैं।

**उदाहरण-6.** यदि बिन्दु $(x, y)$ बिन्दुओं $(a+b, b-a)$ और $(a-b, a+b)$ से बराबर दूरी पर स्थित हो, तो सिद्ध कीजिए कि $bx = ay$.

**हलः** माना दिए बिन्दु $P(x, y), Q(a+b, b-a)$ और $R(a-b, a+b)$ हैं। अतः प्रश्नानुसार

$$PQ = PR$$

या $\quad PQ^2 = PR^2$

या $\quad [x-(a+b)]^2 + [y-(b-a)]^2 = [x-(a-b)]^2 + [y-(a+b)]^2$

या $\quad x^2 - 2(a+b)x + (a+b)^2 + y^2 - 2(b-a)y + (b-a)^2$

$$= x^2 - 2(a-b)x + (a-b)^2 + y^2 - 2(a+b)y + (a+b)^2$$

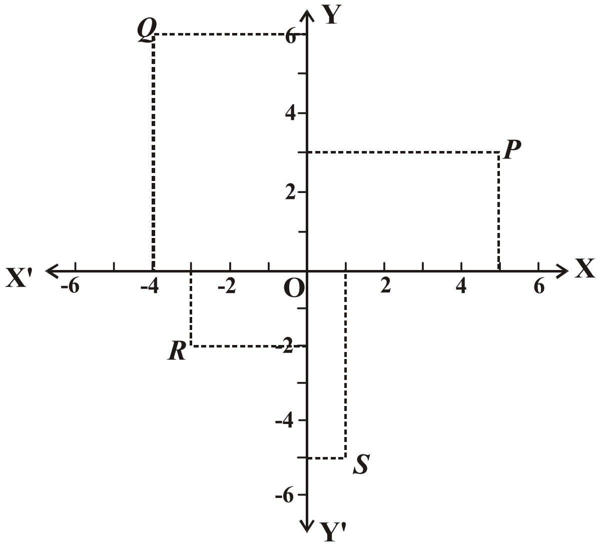
या $-2(a+b)x-2(b-a)y=-2(a-b)x-2(a+b)y$

या $ax+bx+by-ay=ax-bx-ay-by$

या $2bx=2ay \Rightarrow bx=ay$

## प्रश्नमाला–9.1

1. दिये गये आकृति से बिन्दुओं $P, Q, R$ व $S$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।




आकृति 9.07

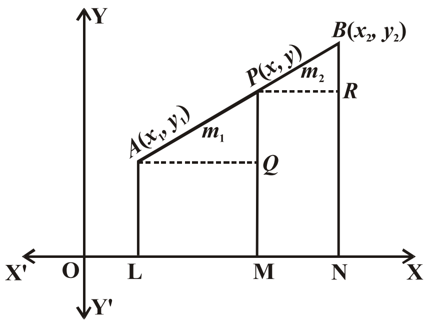
2. निम्नलिखित निर्देशांकों वाले बिन्दुओं को आलेखित कीजिए।
   (1, 2), (–1, 3), (–2, –4), (3, –2), (2, 0), (0, 3)
3. आयतीय निर्देशांक अक्षों को लेते हुए बिन्दु $O$ (0,0), $P$ (3, 0) और $R$(0, 4) को आलेखित कीजिए। यदि $OPQR$ एक आयत हों, तो बिन्दु $Q$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
4. बिन्दुओं (–1, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 2), (–1, 1) को आलेखित कीजिए और इन्हें क्रम से मिलाने पर कौन सी आकृति प्राप्त होती है।
5. चतुर्भुज बनाइए, यदि उसके शीर्ष निम्नलिखित हों :
   (i) (1,1), (2, 4), (8, 4) और (10, 1) (ii) (–2, –2), (–4, 2), (–6, –2) और (–4, –6)
   प्रत्येक स्थिति में बने चतुर्भुज का प्रकार भी बताइए।
6. निम्नलिखित बिन्दुओं के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए :
   (i) (–6, 7) और (–1, –5) (ii) (–1, –1) और (8, –2) (iii) $(at_1^2, 2at_1)$ और $(at_2^2, 2at_2)$
7. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (2, –2), (–2, 1) और (5, 2) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।
8. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (1, –2), (3, 0), (1, 2) और (–1, 0) एक वर्ग के शीर्ष हैं।
9. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(a, a)$, $(-a, -a)$ और $(-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a)$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।
10. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (1, 1), (–2, 7) और (3, –3) संरेख हैं।
11. $x$–अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (–2, –5) और (2, –3) से समान दूरी पर स्थित है।
12. $y$–अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (–5, –2) और (3, 2) से समान दूरी पर स्थित है।
13. यदि बिन्दुओं (3, K) और (K, 5) से बिन्दु (0, 2) की दूरियाँ बराबर हो, तो K का मान ज्ञात कीजिए।
14. यदि P और Q के निर्देशांक क्रमशः $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ और $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $OP^2+OQ^2=a^2+b^2$, जहाँ O मूल बिन्दु है।
15. यदि एक समबाहु त्रिभुज के दो शीर्ष (0, 0), $(3, \sqrt{3})$ हों, तो तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

## 9.05 दो बिन्दुओं के मध्य दूरी का अन्तः और बाह्य विभाजन (Internal and external division of distance between two points)

माना समतल में दो बिन्दु $A$ और $B$ हैं, यदि रेखा $AB$ पर कोई बिन्दु $P$, $A$ व $B$ के मध्य स्थित हो, तो इस प्रकार के विभाजन को अन्तः विभाजन कहते हैं। यदि विभाजन बिन्दु, $P$, $A$ और $B$ के मध्य में नहीं होकर $A$ के बायीं ओर या $B$ के दायीं ओर स्थित हो, तो ऐसे विभाजन को बाह्य विभाजन कहते हैं।

### (i) अन्तः विभाजन (Internal division) :

माना समतल में स्थित दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ हैं और बिन्दु $P(x, y)$ रेखाखण्ड $AB$ को $m_1 : m_2$ में अन्तः विभाजित करता है। बिन्दु $A$, $P$ और $B$ से $x$–अक्ष पर डाले गये लम्ब क्रमशः $AL$, $PM$ और $BN$ हैं। बिन्दु $A$ से $PM$ पर लम्ब $AQ$ और बिन्दु $P$ से $BN$ पर लम्ब $PR$ डाला। तब



आकृति 9.08

$$OL = x_1,\ OM = x,\ ON = x_2$$

$$AL = y_1,\ PM = y \text{ और } BN = y_2$$

$\therefore$ $AQ = LM = OM - OL = x - x_1$

$PR = MN = ON - OM = x_2 - x$

$PQ = PM - QM = PM - AL = y - y_1$

$BR = BN - RN = BN - PM = y_2 - y$

आकृति 9.08 में, त्रिभुज $AQP$ और त्रिभुज $PRB$ स्पष्टतः समरूप त्रिभुज हैं।

$\therefore$ $$\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{PR} = \frac{PQ}{BR}$$

या $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

अब $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

या $$m_1 x_2 - m_1 x = m_2 x - m_2 x_1$$

या $$(m_1 + m_2)x = m_1 x_2 + m_2 x_1$$

$\therefore$ $$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

पुनः $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

या $$m_1 y_2 - m_1 y = m_2 y - m_2 y_1$$

या $$(m_1 + m_2)y = m_1 y_2 + m_2 y_1$$

$\therefore$ $$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

अतः $P$ के अभीष्ट निर्देशांक

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

**(ii) बाह्य विभाजन (External division ) :**

माना समतल में स्थित बिन्दु $A(x_1,y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ हैं। बिन्दु $P(x,y)$ रेखाखण्ड $AB$ को $m_1 : m_2$ में बाह्य विभाजन करता है। बिन्दु $A, B$ और $P$ से $x$–अक्ष पर डाले गये लम्ब क्रमशः $AL, BN$ और $PM$ हैं। बिन्दु $A$ से $PM$ पर लम्ब $AQ$ और $B$ से $PM$ पर लम्ब $BR$ डाला। तब $OL = x_1$, $ON = x_2$, $OM = x$, $AL = y_1$, $BN = y_2$ और $PM = y$

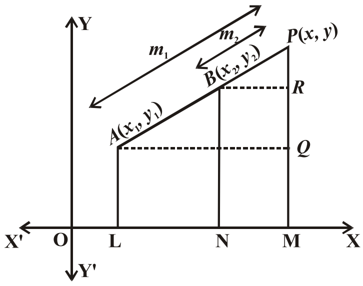
$\therefore \quad AQ = LM = OM - OL = x - x_1$

$BR = NM = OM - ON = x - x_2$

$PQ = PM - QM = PM - AL = y - y_1$

और $\quad PR = PM - RM = PM - BN = y - y_2$

आकृति 9.09 में, त्रिभुज $AQP$ और त्रिभुज $BRP$ स्पष्टतः समरूप त्रिभुज हैं।



आकृति 9.09

$$\therefore \quad \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BR} = \frac{PQ}{PR}$$

$$\text{या} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

$$\text{अब} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2}$$

या $\quad m_1 x - m_1 x_2 = m_2 x - m_2 x_1$

या $\quad (m_1 - m_2)x = m_1 x_2 - m_2 x_1$

$$\therefore \quad x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}$$

$$\text{पुनः} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

या $\quad m_1 y - m_1 y_2 = m_2 y - m_2 y_1$

या $\quad (m_1 - m_2)y = m_1 y_2 - m_2 y_1$

$$\therefore \quad y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

अतः $P$ के अभीष्ट निर्देशांक

$$\left( \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2} \right)$$

**विशेष स्थितिः** यदि बिन्दु $P$ रेखाखण्ड $AB$ का मध्य बिन्दु हो, अर्थात् $P$, $AB$ को $1 : 1$ में विभाजित करता हो, तो $P$ के निर्देशांक

$$\left( \frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

**टिप्पणीः**

(i) अन्तः विभाजन सूत्र से बाह्य विभाजन सूत्र प्राप्त करने के लिए $m_1$ या $m_2$ का चिह्न ऋण कर देते हैं।

(ii) यदि बाह्य विभाजन में $|m_1| > |m_2|$ हो, तो विभाजन बिन्दु $B$ के दायीं ओर (रेखा $AB$ को $B$ की ओर बढ़ाने पर) प्राप्त होता है। इसी प्रकार $|m_1| < |m_2|$ हो, तो विभाजन बिन्दु $A$ के बायीं ओर (रेखा $AB$ को $A$ की ओर बढ़ाने पर) प्राप्त होता है।

(iii) यदि बिन्दु $P(x,y)$ रेखाखण्ड $AB$ को $\lambda:1$ में विभाजित करता है तो $P$ के निर्देशांक $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ होते हैं।

$\lambda$ को प्राचल मानते हुए बिन्दु $(x_1, y_1)$ व $(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा पर किसी बिन्दु के निर्देशांक को उपरोक्त रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

## दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण-1.** उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-2, 1)$ और $(5, 4)$ को मिलाने वाली रेखा को 2 : 3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

**हलः** माना अभीष्ट बिन्दु $(x, y)$ है। तब सूत्र से

$$x=\frac{2\times5+3\times(-2)}{2+3}=\frac{10-6}{5}=\frac{4}{5}$$

और $$y=\frac{2\times4+3\times1}{2+3}=\frac{8+3}{5}=\frac{11}{5}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{4}{5},\frac{11}{5}\right)$ हैं।

**उदाहरण-2.** उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-4, 4)$ और $(7, 2)$ को मिलाने वाली रेखा को 4 : 7 के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है।

**हलः** माना अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $(x, y)$ हैं। तब

$$x=\frac{4\times7-7\times(-4)}{4-7}=\frac{28+28}{-3}=-\frac{56}{3}=-18\frac{2}{3}$$

और $$y=\frac{4\times2-7\times4}{4-7}=\frac{8-28}{-3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $\left(-18\frac{2}{3},6\frac{2}{3}\right)$ हैं।

**उदाहरण-3.** $x$–अक्ष बिन्दुओं $A(3, -5)$ और $B(-4, 7)$ को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करती है?

**हलः** $x$–अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु की कोटि शून्य होती है। अतः माना बिन्दु $P(x,0)$ दिए हुए रेखाखण्ड को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है

$$\therefore \quad 0=\frac{m_1\times7+m_2\times(-5)}{m_1+m_2}$$

या $$7m_1-5m_2=0$$

या $$\frac{m_1}{m_2}=\frac{5}{7}$$

अतः दिए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड $x$–अक्ष द्वारा $5:7$ के अनुपात में अन्तः विभाजित होता है।

**उदाहरण-4.** बिन्दुओं $(-3, 5)$ और $(4, -9)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड को बिन्दु $(-2, 3)$ किस अनुपात में विभाजित करता है?

**हलः** माना दिए हुए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड को बिन्दु $(-2, 3)$, $\lambda:1$ में विभाजित करता है, अन्तः विभाजन सूत्र से

$$-2=\frac{\lambda\times4+1\times(-3)}{\lambda+1}$$

$$=\frac{4\lambda-3}{\lambda+1}$$

या $\quad -2\lambda - 2 = 4\lambda - 3$

या $\quad 6\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$

अतः अभीष्ट अनुपात 1 : 6 है।

**नोट:** कोटि के मान से भी हमें यही अनुपात प्राप्त होगा।

**उदाहरण-5.** यदि बिन्दु $A(2, 5)$ और $B$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु $P(-1, 2)$, 3 :4 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है, तो $B$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना $B$ के निर्देशांक $(x_1, y_1)$ है और दिया है $AP : BP = 3 :4$

अन्तः विभाजन सूत्र से

$$-1 = \frac{3 \times x_1 + 4 \times 2}{3+4} = \frac{3x_1 + 8}{7}$$

या $\quad -7 = 3x_1 + 8 \Rightarrow x_1 = -\frac{15}{3} = -5$

और $\quad 2 = \frac{3 \times y_1 + 4 \times 5}{3+7} = \frac{3y_1 + 20}{7}$

या $\quad 14 = 3y_1 + 20$

$\Rightarrow \quad y_1 = -\frac{6}{3} = -2$

अतः $B$ के निर्देशांक $(-5, -2)$ हैं।

**उदाहरण-6.** ज्ञात कीजिए कि, रेखा $x + y = 4$, बिन्दु $(-1, 1)$ और $(5, 7)$ को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करती है?

**हल:** माना दी गई रेखा बिन्दु $A(-1, 1)$ और $B(5, 7)$ को मिलाने वाली रेखा को बिन्दु $P$ पर $\lambda : 1$ में अन्तः विभाजित करती है।

अतः $P$ के निर्देशांक होंगे

$$\left(\frac{5\lambda - 1}{\lambda + 1}, \frac{7\lambda + 1}{\lambda + 1}\right)$$

परन्तु बिन्दु $P$ रेखा $x + y = 4$ पर स्थित है

$\therefore \quad \frac{5\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{7\lambda + 1}{\lambda + 1} = 4$

या $\quad 5\lambda - 1 + 7\lambda + 1 = 4\lambda + 4$

या $\quad 8\lambda = 4$

$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}$

या $\quad \lambda : 1 = 1 : 2$

## प्रश्नमाला—9.2

1. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(3, 5)$ और $(7, 9)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2 : 3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।
2. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(5, -2)$ और $\left(-1\frac{1}{2}, 4\right)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 7 :9 में बाह्य विभाजित करता है।
3. सिद्ध कीजिए कि मूल बिन्दु O बिन्दुओं $A(1, -3)$ और $B(-3, 9)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 1 : 3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है। बाह्य विभाजन करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

4. बिन्दुओं (22, 20) और (0, 16) को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
5. बिन्दुओं (5, 3) और (–3, –2) को मिलाने वाली रेखाखण्ड $x$–अक्ष द्वारा किस अनुपात में विभाजित होता है ?
6. बिन्दुओं (2, –3) और (5, 6) को मिलाने वाली रेखाखण्ड $y$–अक्ष से किस अनुपात में विभाजित होता है ?
7. बिन्दुओं (15, 5) और (9, 20) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (11, 15) किस अनुपात में विभाजित करता है ?
8. यदि बिन्दु $P(3, 5)$ बिन्दुओं $A(-2, 3)$ और $B$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 4 : 7 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है, तो B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
9. बिन्दुओं (11,9) और (1, 2) को मिलाने वाली रेखा को समत्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
10. बिन्दुओं (–4, 0) और (0, 6) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 4 बराबर भागों में बाँटने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
11. ज्ञात कीजिए कि रेखा $3x + y = 9$ बिन्दुओं (1, 3) और (2, 7) मिलाने वाले रेखाखण्ड को किस अनुपात में विभाजित करती है?
12. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि बिन्दु (–3, p) बिन्दुओं (–5, –4) और (–2, 3) को अन्तः विभाजित करता है। p का मान भी ज्ञात कीजिए।

## विविध प्रश्नमाला–9

### वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 10 तक )

1. बिन्दु (3, 4) की $y$–अक्ष से दूरी होगी
(क) 1 (ख) 4 (ग) 2 (घ) 3
2. बिन्दु (5, –2) की $x$–अक्ष से दूरी होगी
(क) 5 (ख) 2 (ग) 3 (घ) 4
3. बिन्दु (0, 3) और (–2, 0) के बीच की दूरी होगी
(क) $\sqrt{14}$ (ख) $\sqrt{15}$ (ग) $\sqrt{13}$ (घ) $\sqrt{5}$
4. (–2, 1), (2, –2) और (5, 2) शीर्ष वाला त्रिभुज है
(क) समकोण (ख) समबाहु (ग) समद्विबाहु (घ) इनमें से कोई नहीं
5. बिन्दुओं (–1, 1), (0, –3), (5, 2) और (4, 6) से निर्मित चतुर्भुज होगा–
(क) वर्ग (ख) आयत (ग) सम चतुर्भुज (घ) समान्तर चतुर्भुज
6. बिन्दुओं (0, 0), (2, 0) और (0, 2) से समान दूरी वाला बिन्दु है
(क) (1, 2) (ख) (2, 1) (ग) (2, 2) (घ) (1, 1)
7. बिन्दु (5, 0) और (0, 4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु P, 2:3 के अनुपात में अन्त विभाजित करता है। P के निर्देशांक है
(क) $\left(3, \frac{8}{5}\right)$ (ख) $\left(1, \frac{4}{5}\right)$ (ग) $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$ (घ) $\left(2, \frac{12}{5}\right)$
8. यदि बिन्दु (1, 2), (–1, x) और (2, 3) संरेख हो, तो $x$ का मान होगा
(क) 2 (ख) 0 (ग) –1 (घ) 1
9. बिन्दुओं $(3, a)$ और (4, 1) की बीच की दूरी $\sqrt{10}$ हो तो a का मान होगा
(क) 3, –1 (ख) 2, –2 (ग) 4, –2 (घ) 5, –3
10. यदि बिन्दु (x, y), बिन्दुओं (2, 1) और (1, –2) से समान दूरी पर हो, तो निम्नांकित में से सत्य कथन है–
(क) $x+3y=0$ (ख) $3x+y=0$ (ग) $x+2y=0$ (घ) $2y+3x=0$
11. यदि एक चतुर्भुज के शीर्ष (1, 4), (–5, 4), (–5, –3) और (1,–3) हो, तो चतुर्भुज का प्रकार बताइए।
12. बिन्दुओं (–2, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 4), (–2, 2) को क्रम से मिलाने पर कौन सी आकृति प्राप्त होगी?
13. बिन्दु (1, 2) और (6, 7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (3, 4) किस अनुपात में विभाजित करता है?
14. किसी वर्ग के सम्मुख शीर्ष (5, –4) और (–3, 2) हैं इसके विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
15. एक रेखा खण्ड का एक सिरा (4, 0) है और मध्य बिन्दु (4, 1) है, तो रेखा खण्ड के दूसरे सिरे के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

16. बिन्दुओं (6, 8) और (2, 4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु से बिन्दु (1, 2) की दूरी ज्ञात कीजिए।

17. किसी समतल में चार बिन्दु P(2, –1), Q(3, 4), R(–2, 3) और S(–3, –2) है, तो सिद्ध कीजिए कि PQRS वर्ग नहीं एक समचतुर्भुज है।

18. सिद्ध कीजिए कि समकोण त्रिभुज AOB में कर्ण का मध्य बिन्दु C त्रिभुज के शीर्षों O, A और B से बराबर दूरी पर स्थित है।

19. उस त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष (1,–1), (0, 4) और (–5, 3) हैं।

20. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (5, 7) और (3, 9) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु वहीं है जो बिन्दुओं (8, 6) और (0, 10) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु है।

21. यदि त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु (1, 2), (0, –1) और (2, –1) हैं, तो त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

## महत्वपूर्ण बिन्दु

1. nksfcUnqvksa $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी का सूत्र

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

या $$PQ = \sqrt{(\text{भुजों का अन्तर})^2 + (\text{कोटियों का अन्तर})^2}$$

2. बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड का बिन्दु $P(x, y)$ पर $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजक बिन्दु के निर्देशांक

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

3. बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड का बिन्दु $P(x, y)$ पर $m_1 : m_2$ के अनुपात में बाह्य विभाजक बिन्दु के निर्देशांक

$$x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}$$

$$y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

4. बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$$

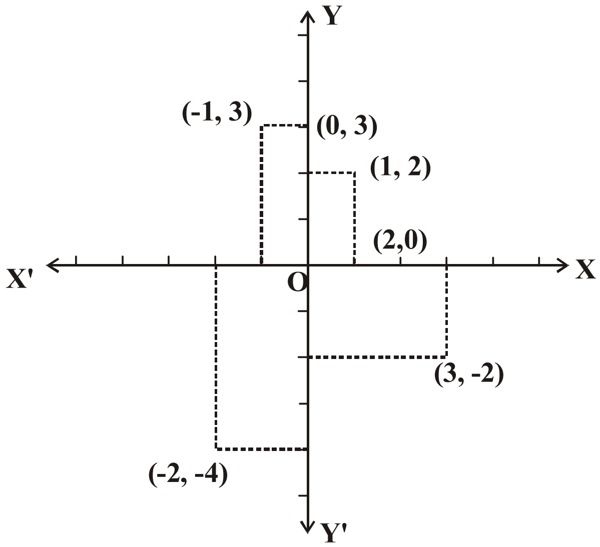
या $$\left(\frac{x - \text{निर्देशांकों का योग}}{2}, \frac{y - \text{निर्देशांकों का योग}}{2}\right)$$

# उत्तरमाला–9

## प्रश्नमाला 9.1

1. $P(5,3), Q(-4,6), R(-3,-2), S(1,-5)$

2.




3. (3, 4)   4. पंचभुज   5. (i) समलम्ब (ii) समचतुर्भुज   6. (i) 13 (ii) $\sqrt{82}$ (iii) $a(t_2-t_1)\sqrt{(t_2+t_1)^2+4}$

11. (–2, 0)   12. (0, –2)   13. 1   15. $(0,2\sqrt{3})$ या $(3,-\sqrt{3})$

## प्रश्नमाला 9.2

1. $\left(\frac{23}{5},\frac{33}{5}\right)$   2. $\left(27\frac{3}{4},-23\right)$   3. (3, –9)   4. (11, 18)   5. 3 : 2

6. 2 :5 बाह्य विभाजन   7. 2 :1   8. $\left(\frac{47}{4},\frac{17}{2}\right)$   9. $\left(\frac{13}{3},\frac{13}{3}\right),\left(\frac{23}{3},\frac{20}{3}\right)$

10. $\left(-3,\frac{3}{2}\right),(-2,3),\left(-1,\frac{9}{2}\right)$   11. 3 : 4   12. $2:1, p=\frac{2}{3}$

## विविध प्रश्नमाला–9

1. (घ)   2. (ख)   3. (ग)   4. (क)   5. (घ)   6. (घ)   7. (क)
8. (ख)   9. (ग)   10. (क)   11. आयत.   12. पंचभुज   13. 2 :3.   14. 10

15. (4, 2)   16. 5   19. $\frac{\sqrt{130}}{2},\frac{\sqrt{130}}{2},\sqrt{13}$   21. (1, –4), (3, 2), (–1, 2)