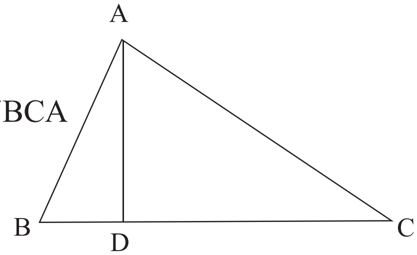
*যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,*

**উপপাদ্য :48.** যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করলে, এই লম্বের উভয় পার্শ্বস্থিত ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ এবং ওই ত্রিভুজগুলির প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সঙ্গে সদৃশ।

**প্রদত্ত :** ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ সমকোণ এবং সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব।

**প্রমাণ করতে হবে :** (i) $\Delta DBA$ ও $\Delta ABC$ পরস্পর সদৃশ। (ii) $\Delta DAC$ ও $\Delta ABC$ পরস্পর সদৃশ।
(iii) $\Delta DBA$ ও $\Delta DAC$ পরস্পর সদৃশ।




**প্রমাণ :** $\Delta DBA$ ও $\Delta ABC$ -এর মধ্যে,
$\angle BDA = \angle BAC = 90^\circ$
এবং $\angle ABD = \angle CBA$. সুতরাং অবশিষ্ট $\angle BAD = \angle BCA$
$\therefore \Delta DBA$ ও $\Delta ABC$ সদৃশকোণী।
$\therefore \Delta DBA$ ও $\Delta ABC$ পরস্পর সদৃশ। **[(i) প্রমাণিত]**
আবার, $\Delta DAC$ ও $\Delta ABC$-এর মধ্যে,
$\angle ADC = \angle BAC = 90^\circ$
$\angle ACD = \angle BCA$. সুতরাং অবশিষ্ট $\angle CAD = \angle CBA$
$\therefore \Delta DAC$ ও $\Delta ABC$ সদৃশকোণী।
$\therefore \Delta DAC$ ও $\Delta ABC$ সদৃশ। **[(ii) প্রমাণিত]**
$\Delta DBA$ ও $\Delta ABC$ পরস্পর সদৃশ।
আবার, $\Delta DAC$ ও $\Delta ABC$ পরস্পর সদৃশ।
সুতরাং $\Delta DBA$ ও $\Delta DAC$ পরস্পর সদৃশ। **[(iii) প্রমাণিত]**

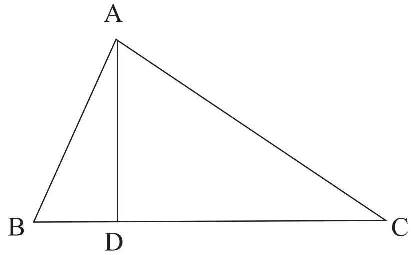
দুটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি করে সূক্ষ্মকোণ যদি সমান হয় তবে সমকোণী ত্রিভুজদুটি ☐ হবে। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ :19.** ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম। প্রমাণ করি (i) $AB^2 = BC.BD$, (ii) $AD^2 = BD.CD$ এবং (iii) $AC^2 = BC.CD$

প্রদত্ত : ABC ত্রিভুজের $\angle BAC = 90^\circ$ ; $AD \perp BC$.

**প্রমাণ করতে হবে :** (i) $AB^2 = BC \cdot BD$, (ii) $AD^2 = BD \cdot CD$ এবং (iii) $AC^2 = BC \cdot CD$

প্রমাণ :(i) $\Delta DBA$ ও $\Delta ABC$ সদৃশ। ($\because$ ABC ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব)




$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$ সুতরাং, $AB^2 = BC.BD$ **[(i) প্রমাণিত]**

(ii) $\Delta DBA$ ও $\Delta DAC$ সদৃশ।

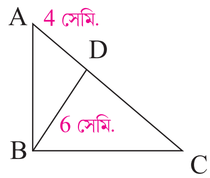
$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$ সুতরাং, $AD^2 = BD.CD$ **[(ii) প্রমাণিত]**

(iii) $\Delta DAC$ ও $\Delta ABC$ সদৃশ।

$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$ সুতরাং, $AC^2 = BC.CD$ **[(iii) প্রমাণিত]**

উপরের প্রমাণের (ii) নং ক্ষেত্রে দেখছি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের ($\angle A$ সমকোণ) সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলে AD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য, AD সরলরেখাংশ অতিভুজকে যে দুটি অংশে বিভক্ত করে সেই অংশ দুটির দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

**প্রয়োগ :20.** $\Delta ABC$-এর $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $BD \perp AC$; যদি $BD = 6$ সেমি. এবং $AD = 4$ সেমি. হয়, তবে CD-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।




$\Delta DAB$ ও $\Delta DBC$ সদৃশ।

$\therefore BD^2 = AD \cdot CD$ বা, $6^2 = 4 \times CD$ $\therefore$ CD = ☐ **[নিজে লিখি]**

**প্রয়োগ :21.** $\Delta ABC$-এর $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $BD \perp AC$; যদি $AB = 6$ সেমি. এবং $BD = 3$ সেমি. এবং $CD = 5.4$ সেমি. হয়, তবে BC বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে লিখি]**

**প্রয়োগ :22.** $\Delta ABC$-এর শীর্ষবিন্দু A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম। যদি $\frac{BD}{DA} = \frac{DA}{DC}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

**প্রমাণ :** $\Delta BDA$ ও $\Delta ADC$-এর $\angle BDA = \angle ADC = 90^\circ$ [$\because AD \perp BC$] এবং $\frac{BD}{DA} = \frac{DA}{DC}$

$\therefore \Delta BDA$ ও $\Delta ADC$ সদৃশ। [যেহেতু দুটি ত্রিভুজের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান হলে এবং কোণগুলির ধারক বাহুগুলি সমানুপাতী হলে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হয়]

সুতরাং, $\angle ABD = \angle CAD$ এবং $\angle BAD = \angle ACD$

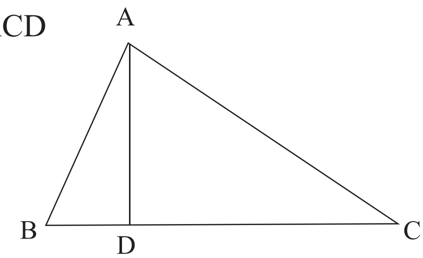
$\therefore \angle ABD + \angle ACD = \angle CAD + \angle BAD$

বা, $\angle B + \angle C = \angle A$

বা, $\angle A + \angle B + \angle C = 2\angle A$

বা, $2\angle A = 180^\circ$ $\therefore \angle A = 90^\circ$

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।




**প্রয়োগ :23.** যদি কোনো সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজের উপর লম্ব অঙ্কন করি এবং যদি AC, AB ও BC ক্রমিক সমানুপাতী হয়, তবে প্রমাণ করি যে, অতিভুজটির বৃহত্তম অংশ ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর সমান হবে।

**প্রদত্ত :** সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $\angle A$ সমকোণ; A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম। ধরি, AC ক্ষুদ্রতম বাহু। $AC : AB = AB : BC$

**প্রমাণ করতে হবে :** অতিভুজ BC-এর বৃহত্তম অংশ AC বাহুর সমান। যেহেতু ADC সমকোণী ত্রিভুজের DC, অতিভুজ AC-এর সমান হতে পারে না,

সুতরাং, প্রমাণ করতে হবে $BD = AC$

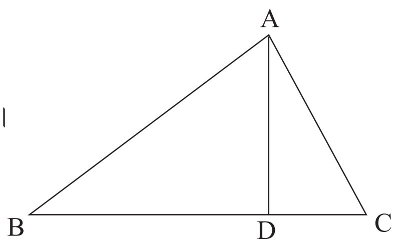
**প্রমাণ :** সমকৌণিক বিন্দু A থেকে BC-এর উপর AD লম্ব।

$\therefore \Delta ABD$ ও $\Delta ABC$ সদৃশ।

$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$

কিন্তু, $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$ [প্রদত্ত] সুতরাং, $\frac{BD}{AB} = \frac{AC}{AB}$

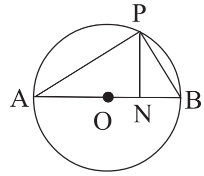
$\therefore BD = AC$ **[প্রমাণিত]**



**প্রয়োগ : 24.** একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছি যার ব্যাস AB এবং কেন্দ্র O; বৃত্তের উপরিস্থিত কোনো বিন্দু P থেকে AB ব্যাসের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করলাম যা AB কে N বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে, $PB^2 = AB.BN$

**প্রদত্ত :** O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস। P বৃত্তের উপরিস্থ যেকোনো একটি বিন্দু এবং $PN \perp AB$

**প্রমাণ করতে হবে :** $PB^2 = AB.BN$




**প্রমাণ:** AB বৃত্তের ব্যাস। সুতরাং $\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle APB = 1$ সমকোণ।

সমকোণী ত্রিভুজ APB-এর সমকৌণিক বিন্দু P থেকে অতিভুজ AB-এর উপর PN লম্ব।

$\therefore \Delta ABP$ ও $\Delta PBN$ পরস্পর সদৃশ।

সুতরাং, $\frac{PB}{BN} = \frac{AB}{PB}$

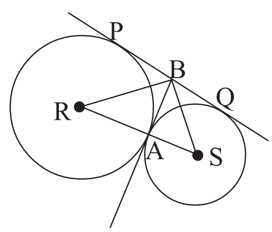
$\therefore PB^2 = AB.BN$ **[প্রমাণিত]**

**প্রয়োগ : 25.** দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। PQ ওই দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক। যদি বৃত্ত দুটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে r ও r′ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $PQ^2 = 4rr'$

**প্রদত্ত :** R ও S কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্ত যাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে r ও r′, পরস্পরকে A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। PQ ওই দুটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক এবং বৃত্তদুটিকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

**প্রমাণ করতে হবে :** $PQ^2 = 4rr'$

**অঙ্কন:** R, A ও A, S যোগ করলাম, A বিন্দুতে বৃত্তদুটির সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করলাম যা PQ-কে B বিন্দুতে ছেদ করল। R, B ও S, B যোগ করলাম।




**প্রমাণ :** B বিন্দু থেকে R কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি স্পর্শক BP ও BA.

$\therefore BP = BA$ এবং RB , $\angle ABP$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

সুতরাং, $\angle RBA = \frac{1}{2} \angle PBA$

আবার, B বিন্দু থেকে S কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি স্পর্শক BQ ও BA

$\therefore BQ = BA$ এবং BS, $\angle ABQ$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \angle SBA = \frac{1}{2} \angle QBA$

$\angle RBA + \angle SBA = \frac{1}{2} (\angle PBA + \angle QBA)$

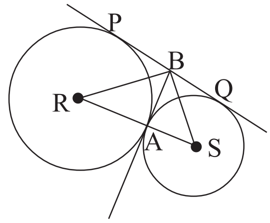
বা, $\angle RBS = \frac{1}{2} \angle PBQ = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$

$\therefore \angle RBS = 1$ সমকোণ

R, S দুটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং A স্পর্শবিন্দু।

$\therefore$ R, A, S বিন্দু তিনটি সমরেখ এবং $AB \perp RS$ [$\because$ বৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্ব]

সমকোণী ত্রিভুজ RBS-এর সমকৌণিক বিন্দু B থেকে অতিভুজ RS-এর উপর BA লম্ব।




$\therefore \Delta ABR$ ও $\Delta ASB$ পরস্পর সদৃশ।

সুতরাং, $\dfrac{AB}{AS} = \dfrac{AR}{AB}$

বা, $AB^2 = AR.AS$

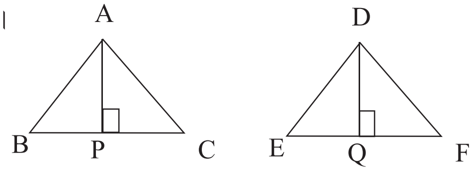
$= r.r' \quad [\because AR = r$ এবং $AS = r']$

$\therefore 4AB^2 = 4r.r'$

বা, $(2AB)^2 = 4rr'$

$\therefore \quad PQ^2 = 4r.r' \quad [\because PQ = PB + BQ = 2AB; \quad \because PB = BA$ এবং $QB = BA]$ **(প্রমাণিত)**

**প্রয়োগ : 26.** *যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, দুটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত অনুরূপ বাহুর বর্গের অনুপাতের সঙ্গে সমান [প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়]*




**প্রদত্ত :** $\Delta ABC \sim \Delta DEF$; সুতরাং, ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী।

$\therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

**প্রমাণ করতে হবে :** $\dfrac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$

**অঙ্কন :** ABC ত্রিভুজে $AP \perp BC$ এবং DEF ত্রিভুজে $DQ \perp EF$ অঙ্কন করি।

**প্রমাণ :** $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} BC.AP$

এবং $\Delta DEF = \dfrac{1}{2} EF.DQ$

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC.AP}{\frac{1}{2}EF.DQ} = \frac{BC}{EF}.\frac{AP}{DQ}$$

$\Delta ABP$ ও $\Delta DEQ$-তে, $\angle ABP = \angle DEQ \quad (\because \angle B = \angle E)$

$\angle APB = \angle DQE$ (প্রত্যেকটি সমকোণ)

সুতরাং, অবশিষ্ট $\angle PAB = \angle QDE$.

$\therefore \Delta ABP$ ও $\Delta DEQ$ সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AP}{DQ}$

আবার, $\Delta ABC$ ও $\Delta DEF$ সদৃশ।

সুতরাং $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} \quad \therefore \dfrac{AP}{DQ} = \dfrac{BC}{EF}$

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEC} = \frac{BC}{EF}.\frac{AP}{DQ} = \frac{BC}{EF}.\frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

যেহেতু, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

সুতরাং, $\dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2} \quad \therefore \dfrac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$ **[প্রমাণিত]**

## কষে দেখি 18.4

1. $\Delta ABC$-এর $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $BD \perp AC$; যদি BD = 8 সেমি. এবং AD = 5 সেমি. হয়, তবে CD-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

2. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ এবং $BD \perp AC$; যদি AD = 4 সেমি. এবং CD = 16 সেমি. হয়, তবে BD ও AB-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

3. O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের AB একটি ব্যাস। P বৃত্তের উপর যে-কোনো একটি বিন্দু। A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুটিকে P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করেছে। যদি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হয়, প্রমাণ করি যে, $PQ.PR = r^2$

4. AB-কে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করেছি। AB-এর উপর যে-কোনো বিন্দু C থেকে AB-এর উপর লম্ব অঙ্কন করেছি যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, CD, AC ও BC-এর মধ্যসমানুপাতী।

5. সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $\angle A$ সমকোণ। অতিভুজ BC-এর উপর লম্ব AD হলে, প্রমাণ করি যে,

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta ACD} = \frac{BC^2}{AC^2}$$

6. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস। A বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত একটি সরলরেখা বৃত্তকে C বিন্দুতে এবং B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শককে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে,

(i) $BD^2 = AD.DC$ (ii) যে-কোনো সরলরেখার জন্য AC এবং AD দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সর্বদা সমান।

7. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

**(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :**

(i) $\Delta ABC$ ও $\Delta DEF$-এ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{FD} = \frac{AC}{EF}$ হলে,

(a) $\angle B = \angle E$ (b) $\angle A = \angle D$ (c) $\angle B = \angle D$ (d) $\angle A = \angle F$

(ii) $\Delta DEF$ ও $\Delta PQR$-এ $\angle D = \angle Q$ এবং $\angle R = \angle E$ হলে, নীচের কোনটি সঠিক নয় লিখি।

(a) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (b) $\frac{QR}{PQ} = \frac{EF}{DF}$ (c) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (d) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$

(iii) ABC ও DEF ত্রিভুজে $\angle A = \angle E = 40^\circ$, AB : ED = AC : EF এবং $\angle F = 65^\circ$ হলে $\angle B$-এর মান

(a) $35^\circ$ (b) $65^\circ$ (c) $75^\circ$ (d) $85^\circ$

(iv) $\Delta ABC$ এবং $\Delta PQR$-এ $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ হলে,

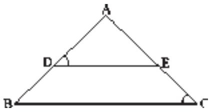
(a) $\angle A = \angle Q$ (b) $\angle A = \angle P$ (c) $\angle A = \angle R$ (d) $\angle B = \angle Q$

(v) ABC ত্রিভুজে AB = 9সেমি., BC = 6সেমি. এবং CA = 7.5সেমি.। DEF ত্রিভুজে BC বাহুর অনুরূপ বাহু EF; EF = 8সেমি. এবং $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ হলে $\Delta DEF$-এর পরিসীমা

(a) 22.5 সেমি. (b) 25 সেমি. (c) 27 সেমি. (d) 30 সেমি.

**(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :**

(i) দুটি চতুর্ভুজের অনুরূপ কোণগুলি সমান হলে চতুর্ভুজ দুটি সদৃশ।

(ii) 

পাশের চিত্রে $\angle ADE = \angle ACB$ হলে, $\Delta ADE \sim \Delta ACB$

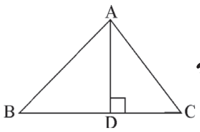
(iii) $\Delta PQR$-এর QR বাহুর উপর D এমন একটি বিন্দু যে $PD \perp QR$; সুতরাং, $\Delta PQD \sim \Delta RPD$

**(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :**

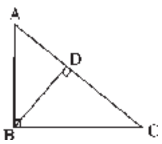
(i) দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হবে যদি তাদের ________ বাহুগুলি সমানুপাতী হয়।

(ii) $\Delta ABC$ ও $\Delta DEF$-এর পরিসীমা যথাক্রমে 30সেমি. এবং 18সেমি.। $\Delta ABC \sim \Delta DEF$; BC ও EF অনুরূপ বাহু। যদি BC = 9সেমি. হয়, তাহলে EF = ________সেমি.।

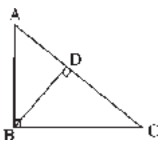
8. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) 

পাশের চিত্রে, $\angle ACB = \angle BAD$ এবং $AD \perp BC$; AC = 15সেমি., AB = 20সেমি. এবং BC = 25সেমি. হলে, AD-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(ii) 

পাশের চিত্রে, $\angle ABC = 90^{\circ}$ এবং $BD \perp AC$; যদি AB = 30সেমি., BD = 24সেমি. এবং AD = 18সেমি. হলে, BC-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iii) 

পাশের চিত্রে, $\angle ABC = 90^{\circ}$ এবং $BD \perp AC$; যদি BD = 8সেমি. এবং AD = 4সেমি. হয়, তাহলে CD-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

(iv) ABCD ট্রাপিজিয়ামের $BC \parallel AD$ এবং AD = 4সেমি.। AC ও BD কর্ণদ্বয় এমনভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে যে $\frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} = \frac{1}{2}$ হয়। BC-এর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।

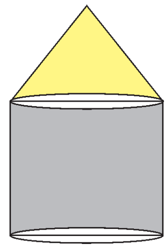
(v) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ এবং $\Delta ABC$ ও $\Delta DEF$ -এ AB,BC ও CA বাহুর অনুরূপ বাহুগুলি যথাক্রমে DE, EF ও DF; $\angle A = 47^{\circ}$ এবং $\angle E = 83^{\circ}$ হলে, $\angle C$-এর পরিমাপ কত তা লিখি।

# 19 বিভিন্ন ঘনবস্তু সংক্রান্ত বাস্তব সমস্যা

## REAL LIFE PROBLEMS RELATED TO DIFFERENT SOLID OBJECTS

গত বছরের ডিসেম্বর মাসের শীতের ছুটিতে আমরা ও পিসিমণিরা একসঙ্গে আঁটপুরে আমাদের গ্রামের বাড়িতে বেড়াতে গিয়েছিলাম। তখন মাঠে মাঠে ধান ঝাড়া হচ্ছিল এবং মরাই-এ ধান ভরতি করে রাখা হচ্ছিল।

**প্রয়োগ : 1.** আমাদের বাড়ির ধানের মরাই-এর নীচের অংশ লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি এবং উপরের অংশ শঙ্কু আকৃতির। এই মরাইটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 2.1 মিটার, চোঙাকৃতি অংশের উচ্চতা 2 মিটার এবং শঙ্কু আকৃতি অংশের উচ্চতা 1.4 মিটার। কিন্তু এই মরাইটিতে, এর আয়তনের $\frac{2}{3}$ অংশ ধান রাখা হয়েছে। মরাইয়ে রাখা ধানের আয়তন কীভাবে পাব দেখি।



মরাই-এর ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{2.1}{2}$ মিটার $= \frac{21}{20}$ মিটার

চোঙাকৃতি অংশের আয়তন $= \frac{22}{7} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times 2$ ঘন মিটার $= 6.93$ ঘন মিটার

শঙ্কু-আকৃতির অংশের আয়তন $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \times \frac{14}{10}$ ঘন মিটার

$= \frac{77 \times 21}{1000}$ ঘন মিটার $= 1.617$ ঘন মিটার

$\therefore$ ওই মরাইটির আয়তন $= (6.93 + 1.617)$ ঘন মিটার $= 8.547$ ঘন মিটার।

$\therefore$ ওই মরাইটিতে রাখা ধানের আয়তন $\frac{2}{3} \times 8.547$ ঘন মিটার $= 5.698$ ঘন মিটার।

বুঝেছি, যেহেতু মরাইটির কিছু অংশ চোঙাকৃতি এবং কিছু অংশ শঙ্কু আকৃতির, তাই দুটি আয়তন আলাদাভাবে নির্ণয় করে তাদের সমষ্টি নিয়ে মরাইটির আয়তন পেলাম।

**প্রয়োগ : 2.** কিন্তু যদি 25 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লোহার তৈরি ফাঁপা চোঙের বহির্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 14 সেমি. এবং অন্তর্ব্যাসের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হয় এবং চোঙটি গলিয়ে এর অর্ধেক উচ্চতাবিশিষ্ট একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করা হয়, তবে শঙ্কুটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত হবে নির্ণয় করি।

ফাঁপা চোঙটির বহিঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য (R) $= \frac{14}{2}$ সেমি. $= 7$ সেমি., অন্তঃব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য (r) $= \frac{10}{2}$ সেমি. $= 5$ সেমি., চোঙটির উচ্চতা $= 25$ সেমি.

$\therefore$ চোঙটিতে লোহার পরিমাণ $= \pi\,(R^2 - r^2) \times$ উচ্চতা $= \pi\,(7^2 - 5^2) \times 25$ ঘন সেমি.

$= \pi \times 24 \times 25$ ঘন সেমি.

নিরেট শঙ্কুর উচ্চতা $= \frac{25}{2}$ সেমি.

ধরি, শঙ্কুটির ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = r সেমি.

শর্তানুসারে, $\frac{1}{3}\pi \times r^2 \times \frac{25}{2} = \pi \times 24 \times 25$

$\therefore r = \pm$ ☐ [নিজে হিসাব করে লিখি]

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore r \neq -$ ☐ সুতরাং r = ☐

$\therefore$ শঙ্কুটির ভূমিতলের ব্যাস $= 2 \times r$ সেমি. = ☐ সেমি.।

**প্রয়োগ : 3.** রূপার পাত দিয়ে তৈরি একটি অর্ধগোলাকার বাটির মুখের বাইরের দিকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 8 সেমি. এবং ভিতরের দিকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 4 সেমি.। বাটিটিকে গলিয়ে 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট শঙ্কু তৈরি করা হলো। শঙ্কুটির উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 4.** একটি লম্ব বৃত্তাকার ড্রামে কিছু জল আছে। 2.8 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ব্যাস ও 3 ডেসিমি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরো ওই জলে সম্পূর্ণ ডোবালাম। এর ফলে ড্রামের জলতল 0.64 ডেসিমি. উপরে উঠে এল। ড্রামটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $= \frac{2.8}{2}$ ডেসিমি. $= 1.4$ ডেসিমি. এবং উচ্চতা $= 3$ ডেসিমি.

$\therefore$ শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi \times (1.4)^2 \times 3$ ঘন ডেসিমি.

ধরি, ড্রামটির ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r ডেসিমি.

শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরোটি ড্রামের জলে ডোবানোর ফলে ড্রামে জলতল 0.64 ডেসিমি. উপরে উঠেছে।

$\therefore$ ড্রামে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত জলের আয়তন = শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরোর আয়তন।

$\therefore \pi r^2 \times 0.64 = \frac{1}{3}\pi \times (1.4)^2 \times 3$ বা, $r^2 = \square$ বা, $r = \pm\square$ **[নিজে করি]**

কিন্তু, ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore r \neq -\square$ , সুতরাং, $r = \square$

$\therefore$ ড্রামটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য $= \square$ ডেসিমি.।

**প্রয়োগ : 5.** 28 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙে কিছু জল আছে এবং তাতে সমান ব্যাসের তিনটি নিরেট লোহার গোলক সম্পূর্ণ ডোবানো যায়। গোলকগুলি ডোবানোর আগে জলতলের যে উচ্চতা ছিল গোলকগুলি ডোবানোর ফলে জলতলের উচ্চতা তার থেকে 7 সেমি. বৃদ্ধি পায়। গোলকগুলির ব্যাসের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

**উত্তর সংকেত :** ধরি, গোলকগুলির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.

শর্তানুযায়ী, $3 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \times 14^2 \times 7$ $\therefore r = \square$

**প্রয়োগ : 6.** 21 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ ও 21 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার ড্রাম এবং 21 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট লোহার গোলক নিলাম। ওই ড্রাম ও নিরেট লোহার গোলকটির আয়তন অনুপাত হিসাব করে লিখি। (ড্রামের বেধ অগ্রাহ্য করব)। এবার ড্রামটি সম্পূর্ণ জলপূর্ণ করে ওই গোলকটি ড্রামটিতে সম্পূর্ণ ডুবিয়ে তুলে নিলাম। এরফলে এখন ড্রামে জলের গভীরতা কত হলো নির্ণয় করি।

ড্রামটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 21 সেমি. এবং উচ্চতা 21 সেমি.

$\therefore$ ড্রামটির আয়তন $= \pi \times 21^2 \times 21$ ঘন সেমি.

গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 21 সেমি. $\therefore$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{21}{2}$ সেমি.

$\therefore$ গোলকটির আয়তন $\frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{21}{2}\right)^3$ ঘন সেমি.

$\therefore$ ড্রামের আয়তন : গোলকের আয়তন $= \pi \times 21 \times 21 \times 21 : \frac{4}{3}\pi \times \frac{21 \times 21 \times 21}{2 \times 2 \times 2} = 6:1$

গোলকটিকে সম্পূর্ণ ডুবিয়ে তুলে নেওয়ায় গোলকটি তার সমআয়তন জল অপসারিত করল।

ধরি, গোলকটি h সেমি. উচ্চতার জল অপসারণ করে।

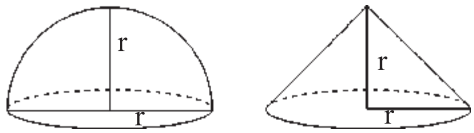
শর্তানুসারে, $\pi \times 21^2 \times h = \frac{4}{3}\pi \times \frac{21 \times 21 \times 21}{2 \times 2 \times 2}$ বা, $\pi \times 21 \times 21 \times h = \frac{4}{3}\pi \times \frac{21 \times 21 \times 21}{8}$ $\therefore h = 3.5$

$\therefore$ ড্রামে এখন জলের গভীরতা 21 সেমি. – 3.5 সেমি. = 17.5 সেমি.।

**প্রয়োগ : 7.** একটি নিরেট অর্ধগোলক ও একটি নিরেট শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য সমান ও উচ্চতা সমান হলে তাদের আয়তনের অনুপাত এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত হিসাব করে লিখি।

অর্ধগোলক ও শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য সমান। সুতরাং তাদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান।

মনে করি, অর্ধগোলক ও শঙ্কুটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক।




অর্ধগোলকের উচ্চতা = অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

প্রদত্ত শর্তানুসারে, শঙ্কুর উচ্চতা = r একক।

$\therefore$ শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা $= \sqrt{r^2+r^2}$ একক $= \sqrt{2}\, r$ একক

এখানে, $\dfrac{\text{অর্ধগোলকের আয়তন}}{\text{শঙ্কুর আয়তন}} = \dfrac{\frac{2}{3}\pi r^3}{\frac{1}{3}\pi r^2 . r} = \dfrac{2}{1}$ $\therefore$ অর্ধগোলক ও শঙ্কুর আয়তনের অনুপাত $2:1$

এবং অর্ধগোলক এবং শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত $= \dfrac{2\pi r^2}{\pi . r . \sqrt{2} . r} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}:1$

**প্রয়োগ : 8.** 2.1 ডেসিমি. দৈর্ঘের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট পিতলের গোলককে পিটিয়ে 7 সেমি. লম্বা একটি লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে দণ্ডটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।
দণ্ডটি ও গোলকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করি।

ধরি, লম্ব বৃত্তাকার দণ্ডের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি.

শর্তানুসারে, $\pi r^2 \times 7 = \frac{4}{3}\pi \times (21)^3$ [$\because$ 2.1 ডেসিমি. = 21 সেমি.]

$\therefore r^2 = \frac{4}{3} \times \frac{21\times 21\times 21}{7}$ বা, r = ± ☐ **[নিজে করি]**

কিন্তু ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং, $r \neq -$ ☐ $\therefore r =$ ☐

$\therefore$ দণ্ডের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 42 সেমি.। $\therefore$ দণ্ডের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 84 সেমি.

দণ্ড ও গোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত = ☐ : ☐ **[নিজে হিসাব করে লিখি]**

**প্রয়োগ : 9.** 9 সেমি. দৈর্ঘ্যের অন্তর্ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি অর্ধগোলাকার পাত্র সম্পূর্ণ জলপূর্ণ আছে। এই জল 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাস ও 4 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট চোঙাকৃতি বোতলে ভর্তি করে রাখব। হিসাব করে দেখি পাত্রটি খালি করতে কতগুলি বোতল দরকার।

মনে করি, n সংখ্যক বোতল দরকার।

1 টি বোতলে জল রাখা যায় $= \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4$ ঘন সেমি. [$\because$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য $\frac{3}{2}$ সেমি.]

$\therefore$ n টি বোতলে জল রাখা যায় $= \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4 \times n$ ঘন সেমি.

শর্তানুসারে, $\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 4 \times n = \frac{2}{3}\pi (9)^3$ $\therefore n = \dfrac{\frac{2}{3}\times 9\times 9\times 9}{4\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}} = \dfrac{6\times 9\times 9}{3\times 3} = 54$

$\therefore$ জলপূর্ণ পাত্রটি খালি করতে 54 টি বোতল দরকার।

**প্রয়োগ : 10.** $12\sqrt{2}$ সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট এবং 21 মিটার লম্বা একটি লম্ব বৃত্তাকার কাঠের গুঁড়ি থেকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি আয়তঘনকাকার কাঠের লগ তৈরি করলে তাতে কত পরিমাণ কাঠ থাকবে এবং কত পরিমাণ কাঠ নষ্ট হবে হিসাব করি।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি কাঠের গুঁড়ির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{12\sqrt{2}}{2}$ সেমি. = $6\sqrt{2}$ সেমি.

কাঠের গুঁড়ির দৈর্ঘ্য = 21 মিটার = 2100 সেমি.

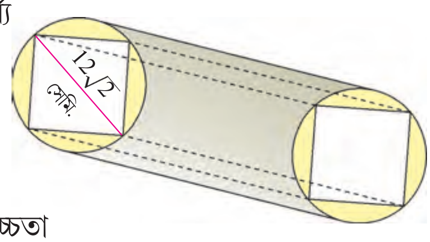
কাঠের গুঁড়ির আয়তন = ভূমিতলের ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= $\frac{22}{7} \times 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} \times 2100$ ঘন সেমি.

= 475200 ঘন সেমি. = 475.2 ঘন ডেসিমি.

বৃত্তাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট কাঠের গুঁড়িকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট কাঠের লগে পরিণত করতে হবে।

সুতরাং, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য = বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসের দৈর্ঘ্য




ধরি, বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য a সেমি.

সুতরাং, $\sqrt{2}\,a = 12\sqrt{2}$

$\therefore a = 12$

$\therefore$ আয়তঘনাকার কাঠের লগের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= 12 × 12 × 2100 ঘন সেমি.

= 302400 ঘন সেমি.

= 302.4 ঘন ডেসিমি.

$\therefore$ আয়তঘনাকার কাঠের লগে কাঠ থাকবে 302.4 ঘন ডেসিমি.

এবং কাঠ নষ্ট হবে (475.2 – 302.4) ঘন ডেসিমি. = 172.8 ঘন ডেসিমি.

**প্রয়োগ : 11.** 13 মিটার দীর্ঘ এবং 11 মিটার প্রশস্ত একটি ছাদের জল বের হওয়ার নলটি বৃষ্টির সময় বন্ধ ছিল। বৃষ্টির পর দেখা গেল ছাদে 7 সেমি. গভীর জল দাঁড়িয়ে গেছে। যে নলটি দিয়ে জল বের হয় তার ব্যাসের দৈর্ঘ্য 7 সেমি. এবং চোঙাকারে মিনিটে 200 মিটার দৈর্ঘ্যের জল বের হয়। নলটি খুলে দিলে কতক্ষণে সব জল বেরিয়ে যাবে হিসাব করি।

ছাদে যে জল দাঁড়িয়েছে তার আয়তন = 1300 × 1100 × 7 ঘন সেমি.

নল দিয়ে প্রতি মিনিটে জল বের হয় $\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 200 \times 100$ ঘন সেমি.

= 11 × 7 × 100 × 100 ঘন সেমি.

[$\because$ চোঙাকৃতি জলস্তম্ভের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য = $\frac{7}{2}$ সেমি. এবং জলস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 200 মিটার = 200 × 100 সেমি.]

নলটি খুলে দিলে সব জল বেরিয়ে যেতে সময় লাগবে = $\frac{1300 \times 1100 \times 7}{11 \times 7 \times 100 \times 100}$ মিনিট

= 13 মিনিট

## কষে দেখি 19

1. আনোয়ারদের বাড়ির সামনে একটি নিরেট লোহার স্তম্ভ আছে যার নীচের অংশ লম্ব বৃত্তাকার চোঙ আকৃতির এবং উপরের অংশ শঙ্কু আকৃতির। এদের ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 20 সেমি., চোঙাকৃতি অংশের উচ্চতা 2.8 মিটার এবং শঙ্কু আকৃতি অংশের উচ্চতা 42 সেমি.। 1 ঘন সেমি. লোহার ওজন 7.5 গ্রাম হলে, লোহার স্তম্ভের ওজন কত হবে তা হিসাব করে লিখি।

2. একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা 20 সেমি. এবং তির্যক উচ্চতা 25 সেমি.। শঙ্কুটির সমান আয়তনবিশিষ্ট একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 15 সেমি. হলে, চোঙটির ভূমিতলের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

3. 24 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙাকৃতি পাত্রে কিছু জল আছে। 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের ভূমিতলের ব্যাস ও 4 সেমি উচ্চতাবিশিষ্ট 60 টি নিরেট শঙ্কু আকৃতির লোহার টুকরো ওই জলে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত করলে, জলতলের উচ্চতা কতটা বৃদ্ধি পাবে হিসাব করে লিখি।

4. একই দৈর্ঘ্যের ভূমিতলের ব্যাসার্ধ এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট একটি নিরেট শঙ্কু ও একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 5:8 হলে, উহাদের ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতার অনুপাত নির্ণয় করি।

5. 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট লোহার গোলককে গলিয়ে 1 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের কয়টি নিরেট গুলি পাওয়া যাবে হিসাব করে দেখি।

6. একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার লোহার দণ্ডের ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 32 সেমি. এবং দৈর্ঘ্য 35 সেমি.। দণ্ডটি গলিয়ে 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ ও 28 সেমি. উচ্চতাবিশিষ্ট কতগুলি নিরেট শঙ্কু তৈরি করা যাবে তা হিসাব করে লিখি।

7. 4.2 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ধারবিশিষ্ট একটি নিরেট কাঠের ঘনক থেকে সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে যে নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু পাওয়া যাবে তার আয়তন নির্ণয় করি।

8. একটি নিরেট গোলক ও একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান ও তাদের ঘনফলও সমান হলে, চোঙটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ও উচ্চতার অনুপাত হিসাব করে লিখি।

9. 6.6 ডেসিমি. দীর্ঘ, 4.2 ডেসিমি. প্রশস্ত এবং 1.4 ডেসিমি. পুরু একটি তামার নিরেট আয়তঘনাকার টুকরো গলিয়ে 2.1 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের কয়টি নিরেট গোলক ঢালাই করা যাবে এবং প্রতিটি গোলকে কত ঘন ডেসিমি. ধাতু থাকবে হিসাব করে দেখি।

10. 4.2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি সোনার নিরেট গোলক পিটিয়ে 2.8 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে, দণ্ডটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

11. 6 ডেসিমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের একটি নিরেট রৌপ্য গোলক গলিয়ে 1 ডেসিমি. লম্বা একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে, দণ্ডটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

12. একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ডের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 3.2 ডেসিমি.। সেই দণ্ডটি গলিয়ে 21টি নিরেট গোলক তৈরি করা হলো। গোলকগুলির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য যদি 8 সেমি. হয়, তবে দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত ছিল তা হিসাব করে লিখি।

13. 21 ডেসিমি. দীর্ঘ, 11 ডেসিমি. প্রশস্ত এবং 6 ডেসিমি. গভীর একটি চৌবাচ্চা অর্ধেক জলপূর্ণ আছে। এখন সেই চৌবাচ্চায় যদি 21 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসের 100টি লোহার গোলক সম্পূর্ণ ডুবিয়ে দেওয়া হয়, তবে জলতল কত ডেসিমি. উঠবে তা হিসাব করে লিখি।

14. সমান ভূমিতলের ব্যাস এবং সমান উচ্চতাবিশিষ্ট একটি নিরেট শঙ্কু, একটি নিরেট অর্ধগোলক এবং একটি নিরেট চোঙের আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করি।

15. 1 সেমি. পুরু সিসার পাতের তৈরি একটি ফাঁপা গোলকের বাহিরের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 6 সেমি.। গোলকটি গলিয়ে 2 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার দণ্ড তৈরি করা হলে, দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

16. 2 মিটার লম্বা একটি আয়তঘনাকার কাঠের লগের প্রস্থচ্ছেদ বর্গাকার এবং তার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 14 ডেসিমি.। সবচেয়ে কম কাঠ নষ্ট করে ওই লগটিকে যদি একটি লম্ব বৃত্তাকার গুঁড়িতে পরিণত করা যায়, তবে তাতে কত ঘন মিটার কাঠ থাকবে এবং কত ঘন মিটার কাঠ নষ্ট হবে হিসাব করি।
[**উত্তর সংকেত :** বর্গাকার চিত্রের অন্তর্লিখিত পরিবৃত্ত হলে, বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য বর্গাকার চিত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান।]

17. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.)

(i) r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে r একক উচ্চতার একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু তৈরি করা হলো। শঙ্কুটির ভূমির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

(a) 2r একক (a) 3r একক (a) r একক (a) 4r একক

(ii) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুকে গলিয়ে একই দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো যার উচ্চতা 5 সেমি.। শঙ্কুটির উচ্চতা

(a) 10 সেমি. (b) 15 সেমি. (c) 18 সেমি. (d) 24 সেমি.

(iii) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং উচ্চতা 2r একক। চোঙটির মধ্যে সর্ববৃহৎ যে গোলকটি রাখা যাবে তার ব্যাসের দৈর্ঘ্য

(a) r একক (b) 2r একক (c) $\frac{r}{2}$ একক (d) 4r একক

(iv) r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট অর্ধগোলক থেকে সর্ববৃহৎ সে নিরেট শঙ্কু কেটে নেওয়া যাবে তার আয়তন

(a) $4\pi r^3$ ঘন একক (b) $3\pi r^3$ ঘন একক (c) $\frac{\pi r^3}{4}$ ঘন একক (d) $\frac{\pi r^3}{3}$ ঘন একক

(v) x একক দৈর্ঘ্যের ধারবিশিষ্ট একটি নিরেট ঘনক থেকে সর্ববৃহৎ একটি নিরেট গোলক কেটে নেওয়া হলে, গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য

(a) x একক (b) 2x একক (c) $\frac{x}{2}$ একক (d) 4x একক

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) দুটি একই ধরনের নিরেট অর্ধগোলক যাদের ভূমিতলের প্রত্যেকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং তা ভূমি বরাবর জোড়া হলে, মিলিত ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হবে $6\pi r^2$ বর্গ একক।

(ii) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r একক এবং উচ্চতা h একক এবং তির্যক উচ্চতা $\ell$ একক। শঙ্কুটির ভূমিতলকে একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমিতল বরাবর জুড়ে দেওয়া হলো। যদি চোঙের ও শঙ্কুর ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা একই হয় তবে মিলিত ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $(\pi r\ell + 2\pi rh + 2\pi r^2)$ বর্গ একক।

**(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :**

(i) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ ও দুটি অর্ধগোলকের ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান। দুটি অর্ধগোলককে চোঙটির দুটি সমতলে আটকে দেওয়া হলে নতুন ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = একটি অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল + _____ বক্রতলের ক্ষেত্রফল + অপর অর্ধগোলকটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল।

(ii) একমুখ কাটা একটি পেনসিলের আকার শঙ্কু ও _____ সমন্বয়।

(iii) একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো। গোলক ও চোঙের আয়তন _____।

18. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুকে গলিয়ে একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা হলো। উভয়ের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান। যদি শঙ্কুর উচ্চতা 15 সেমি. হয়, তাহলে নিরেট চোঙের উচ্চতা কত হিসাব করে লিখি।

(ii) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু এবং একটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান এবং আয়তন সমান। গোলকের ব্যাসের দৈর্ঘ্য এবং শঙ্কুর উচ্চতা অনুপাত কত তা হিসাব করে লিখি।

(iii) সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাস এবং সমান উচ্চতাবিশিষ্ট নিরেট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ, নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু এবং নিরেট গোলকের আয়তনের অনুপাত কত তা লিখি।

(iv) একটি ঘনবস্তুর নীচের অংশ অর্ধগোলক আকারের এবং উপরের অংশ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকারের। যদি দুটি অংশের তলের ক্ষেত্রফল সমান হয়, তাহলে ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য এবং শঙ্কুর উচ্চতার অনুপাত হিসাব করে লিখি।

(v) একটি নিরেট লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর, ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য একটি নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান। গোলকের আয়তন শঙ্কুর আয়তনের দ্বিগুণ হলে, শঙ্কুর উচ্চতা এবং ভূমিতলের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কত তা লিখি।

# 20 ত্রিকোণমিতি : কোণ পরিমাপের ধারণা

## TRIGONOMETRY : CONCEPT OF MEASUREMENT OF ANGLE

প্রতিদিন বিকালে আমরা বন্ধুরা পুকুরের ধারের বড়ো মাঠে নানান ধরনের খেলা খেলি। আমরা ঠিক করেছি আজ বিকালে মাঠে ঘুড়ি ওড়াব। তাই আজ বিকাল 4টের সময়ে আমরা সকলে কিছু ঘুড়ি ও লাটাই নিয়ে মাঠে জড়ো হয়েছি।

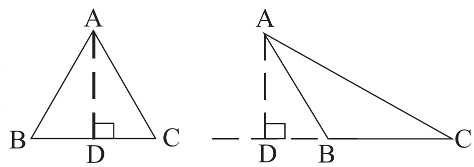
আমি ও শুভ ভালো ঘুড়ি ওড়াতে পারি না। তাই আমরা মাঠের ধারে বসে বন্ধুদের ঘুড়ি ওড়ানো দেখছি। প্রথমে রীনা অন্য বন্ধুদের সাহায্য নিয়ে ঘুড়ি ওড়াল। দেখছি, রীনার লাল ঘুড়ি ভূমি থেকে অনেক উপরে উঠেছে।

**1** কিন্তু রীনার ঘুড়ি ভূমি থেকে কতটা উপরে উঠল কীভাবে পাব?

এমন ধরনের উচ্চতা, উঁচু স্তম্ভের উচ্চতা [স্তম্ভের উপরে না উঠেও], খরস্রোতা নদী কতটা চওড়া ইত্যাদি দূরত্ব সহজে পরিমাপের পদ্ধতি গণিতের একটি বিশেষ শাখায় আলোচনা করা হয়। গণিতের এই বিশেষ শাখাটি হলো 'ত্রিকোণমিতি' [Trigonometry]।

এই ত্রিকোণমিতি শব্দটি এসেছে গ্রিক শব্দ 'Tri' [যার অর্থ তিন], 'gon' [যার অর্থ কোণ] এবং 'metron' [যার অর্থ পরিমাপ] থেকে।

'ত্রিকোণমিতি' হলো সমকোণী ত্রিভুজের কোণ এবং বাহুর মধ্যে সম্পর্কের আলোচনা। এছাড়াও সূক্ষ্মকোণী ও স্থূলকোণী ত্রিভুজের আলোচনাও ত্রিকোণমিতিতে করা হবে। কিন্তু সেক্ষেত্রে ত্রিভুজগুলিকে সমকোণী ত্রিভুজে ভেঙে নেওয়া হয়। যেমন :




পূর্বে পৃথিবী থেকে গ্রহ এবং নক্ষত্রের দূরত্ব নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করা হতো। কিন্তু এখন ইঞ্জিনিয়ারিং-এ ত্রিকোণমিতির উন্নত কৌশল ব্যবহার করা হয় এবং ভৌতবিজ্ঞানেও ত্রিকোণমিতির ধারণা ব্যবহার করা হয়।

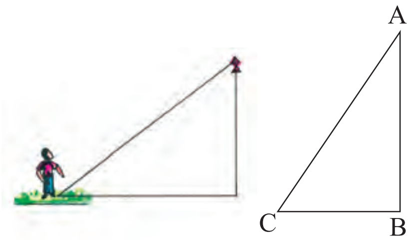
আমি রীনার ঘুড়ির অবস্থান খাতায় আঁকি ও কী পাই দেখি।

ধরি, পাশের ছবির,

C বিন্দু ভূমিতে রীনার অবস্থান

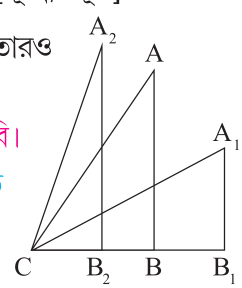
A বিন্দু রীনার ঘুড়ির অবস্থান

এবং AB ভূমি থেকে ঘুড়ির অবস্থানের লম্ব দূরত্ব বা উচ্চতা।




দেখছি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ পেয়েছি যার $\angle ACB$ একটি ______ কোণ। [সূক্ষ্ম/স্থূল]

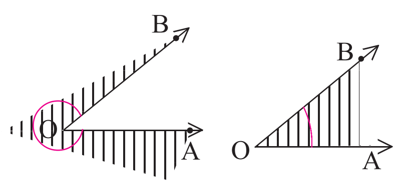
আবার, সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $\angle ACB$-এর মানের পরিবর্তনের সঙ্গে AB উচ্চতারও পরিবর্তন হচ্ছে।



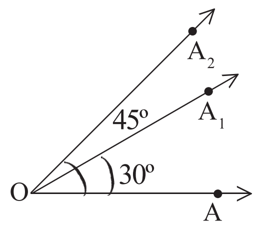

**2** একটি কোণের মান $360^o$-এর চেয়ে বেশি হতে পারে কি? ছবি এঁকে জানার চেষ্টা করি।

কোনো একটি বিন্দু থেকে যদি দুটি রশ্মি নির্গত হয় তবে রশ্মি দুটি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলকে দুটি অঞ্চলে বিভক্ত করে। ওই রশ্মিদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন অঞ্চলদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে ওই বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ বলা হয়।

পাশের চিত্রে, O বিন্দু থেকে OA এবং OB রশ্মিদুটি নির্গত হওয়ায় O বিন্দুতে $\angle AOB$ ও প্রবৃদ্ধকোণ $\angle BOA$ উৎপন্ন হয়েছে, এদের '**জ্যামিতিক কোণ**' বলা হয়। **জ্যামিতিক কোণের** ক্ষেত্রে দিক ছাড়া কোণের পরিমাণই মূল বিচার্য বিষয়।



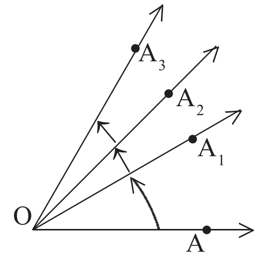
বুঝেছি, জ্যামিতিক কোণ $0^\circ$ থেকে $360^\circ$ পর্যন্ত যে-কোনো পরিমাপের হতে পারে।




**রশ্মির ঘূর্ণনের দ্বারাও কি কোণের ধারণা করা যায়?**

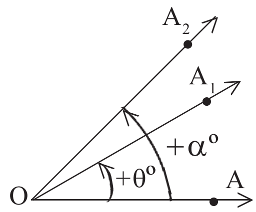
রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ও ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরলে কী কী পাব দেখি।

একটি রশ্মির প্রান্তবিন্দু, যে বিন্দু থেকে রশ্মিটি নির্গত হয় তাকে স্থির রেখে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে যদি একই তলে রশ্মিটি ঘোরাই, তবে সেই রশ্মি ঘূর্ণনের পর প্রথম অবস্থানের সঙ্গে তার পরবর্তী প্রতিটি অবস্থানে সেই প্রান্তবিন্দুতে এক একটি কোণ উৎপন্ন করে।



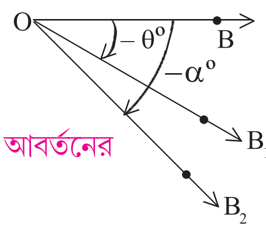

পাশের চিত্রে, OA রশ্মির প্রান্তবিন্দু O-কে স্থির রেখে একই তলে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়ে রশ্মির $OA_1$, $OA_2$, $OA_3$ ইত্যাদি অবস্থান পেয়েছি যারা O বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle AOA_1$, $\angle AOA_2$, $\angle AOA_3$ ইত্যাদি বিভিন্ন কোণ উৎপন্ন করেছে। এই কোণগুলিকে **ত্রিকোণমিতিক কোণ** বলা হয়।

ত্রিকোণমিতিক কোণের ক্ষেত্রে ঘূর্ণায়মান রশ্মির দিক ও তার ফলে সৃষ্ট কোণের পরিমাপ উভয়ই বিচার করা হয়। ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরলে উৎপন্ন কোণটিকে রীতি অনুসারে **ধনাত্মক কোণ** বলে এবং রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরলে **ঋণাত্মক কোণ** সৃষ্টি হয়।




পাশের চিত্রে, OA রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle AOA_1 = +\theta^\circ$ (Theta) এবং $\angle AOA_2 = +\alpha^\circ$ (Alpha) কোণ উৎপন্ন করেছে।

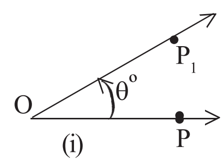
$\angle AOA_1 = \theta^\circ$ এবং $\angle AOA_2 = \alpha^\circ$ লেখা হয় [(+) চিহ্ন ব্যবহার করা হয় না]



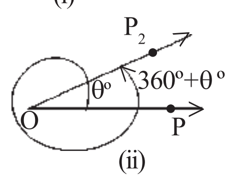

কিন্তু পাশের চিত্রে, OB রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle BOB_1 = -\theta^\circ$ এবং $\angle BOB_2 = -\alpha^\circ$ কোণ উৎপন্ন করেছে। $(\theta > 0, \alpha > 0)$

কিন্তু কোনো কোণের একটি রশ্মি যদি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সম্পূর্ণ একবার আবর্তনের পর আবার প্রথম অবস্থানে আসে তখন কী পরিমাণ কোণ পাব দেখি।

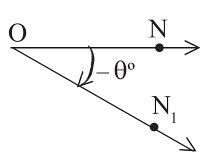
কোনো কোণের একটি রশ্মির ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে যতবার পূর্ণ আবর্তন হবে কোণের পরিমাণ ততবার $360^\circ$ করে বেড়ে যাবে। আবার রশ্মিটির ঘড়ির কাঁটার দিকে যতবার পূর্ণ আবর্তন হবে কোণের পরিমাণ ততবার $360^\circ$ করে কমে যাবে।



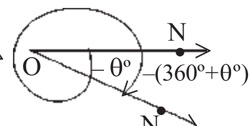

বুঝেছি, পাশের চিত্রে $OP_1$ রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে $OP_1$ অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে একবার সম্পূর্ণ আবতর্নের পর [অর্থাৎ আরও $360^\circ$ ঘূর্ণনের পরে] আবার, $OP_1$ অবস্থানে এসেছে এবং সেক্ষেত্রে পেয়েছি, $\angle POP_2 = 360^\circ + \theta^\circ$ যখন, $\angle POP_1 = \theta^\circ$




[এখানে (ii) নং চিত্রে, $OP_2$ ও $OP_1$ রশ্মিদ্বয় সমাপতিত হয়েছে]




একইভাবে পাশের চিত্র থেকে দেখছি, $ON_1$ রশ্মিটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার দিকে একবার সম্পূর্ণ আবর্তনের পর $ON_2$ ($ON_1$ রশ্মির উপর সমাপতিত হয়েছে) অবস্থানে এসেছে এবং এক্ষেত্রে $\angle NON_2 = -(360^\circ + \theta^\circ)$ যখন, $\angle NON_1 = -\theta^\circ$



**3** যে-কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি যদি তার প্রাথমিক অবস্থান থেকে প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে দু-বার সম্পূর্ণ আবর্তনের পর আরও $30^\circ$ কোণ ঘূর্ণন সম্পন্ন করে, তবে সেক্ষেত্রে কোণের পরিমাণ কী হবে, হিসাব করি।

নির্ণেয় কোণের পরিমাপ = $2\times360^\circ+30^\circ$ = ☐

যদি কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি তার প্রাথমিক অবস্থান থেকে প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে 3 বার সম্পূর্ণ আবর্তনের পর আরও $45^\circ$ ঘূর্ণন সম্পন্ন করে,সেক্ষেত্রে কোণের পরিমাণ কত হবে হিসাব করি। **[নিজে করি]**

> জ্যামিতিক কোণের সর্বনিম্ন ও সর্বাধিক পরিমাপ হয় যথাক্রম $0^\circ$ এবং $360^\circ$; কিন্তু ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ $0^\circ$ থেকে $360^\circ$ ছাড়াও $0^\circ$-এর কম যে-কোনো পরিমাপ ও $360^\circ$-এর বেশি যে-কোনো পরিমাপ হতে পারে।

**4** কিন্তু ত্রিকোণমিতিক কোণ কী কী পদ্ধতিতে পরিমাপ করা হয় দেখি।

ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের সাধারণভাবে দুটি পদ্ধতি হলো **(i) ষষ্টিক পদ্ধতি (Sexagesimal System), (ii) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)**

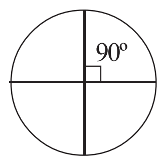
**ষষ্টিক পদ্ধতি :** দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখা একে অপরের উপর লম্বভাবে দাঁড়ালে যে কোণ তৈরি হয় তাকে সমকোণ বলা হয়।

এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে 90টি সমান ভাগে বিভক্ত করা হয় এবং তার প্রতিটি ভাগকে এক ডিগ্রি ($1^\circ$) বলা হয় এবং এই কারণেই এক সমকোণ = $90^\circ$; এক ডিগ্রিকে পুনরায় 60 টি সমান ষষ্টিক মিনিটে (Minutes) ও প্রতি মিনিটকে সমান 60টি ষষ্টিক সেকেন্ডে (Seconds) বিভক্ত করা হয়।

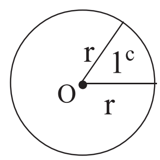
$\therefore$ পেলাম, 1 সমকোণ = $90^\circ$ (ডিগ্রি)

$1^\circ$ (ডিগ্রি) = $60'$ (মিনিট)

$1'$ (মিনিট) = $60''$ (সেকেন্ড)




**বৃত্তীয় পদ্ধতি :** একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ ওই বৃত্তের কেন্দ্রে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তার পরিমাপকে এক রেডিয়ান [Radian] বলা হয় এবং লেখা হয় $1^c$; যে-কোনো একটি বৃত্তের পরিধি এবং ব্যাসের দৈর্ঘ্যের অনুপাত ধ্রুবক। এই সম্পর্কটির উপর ভিত্তি করেই এই পদ্ধতির একক নির্ধারিত হয়েছে।



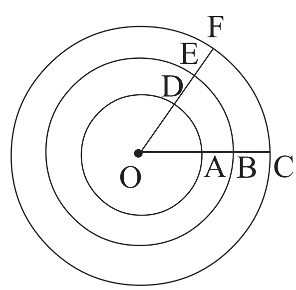

কিন্তু যে-কোনো ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বৃত্তের সাহায্যে রেডিয়ানের সংজ্ঞা প্রকাশ করলে সর্বদা কি এটি একটি ধ্রুবক কোণ হবে? বিভিন্ন ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের বৃত্ত এঁকে হাতেকলমে যাচাই করি।

**হাতেকলমে**

(1) একটি আর্টপেপারে তিনটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকলাম।

(2) সবচেয়ে ছোটো বৃত্তটির বৃত্ত থেকে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের একটি বৃত্তচাপ AD বৃত্ত বরাবর সরু তার বসিয়ে কেটে নিলাম এবং O, A ও O, D যোগ করে $\angle AOD$ পেলাম যা ওই ছোটো বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের চাপের দ্বারা উৎপন্ন সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ।

(3) OA ও OD বর্ধিত করলাম যা অন্য দুটি বৃত্তকে যথাক্রমে B, C ও E, F বিন্দুতে ছেদ করল।



মেপে দেখছি, BE চাপটির দৈর্ঘ্য অর্থাৎ BE চাপ বরাবর রাখা সুতোর দৈর্ঘ্য=OB=সংশ্লিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

আবার CF চাপটির দৈর্ঘ্য = ☐ [নিজে হাতেকলমে যাচাই করে লিখি]

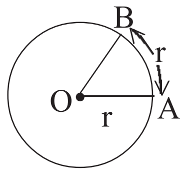
= সংশ্লিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য

∴ পেলাম, ∠BOE এবং ∠COF-ও সংশ্লিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপের দ্বারা উৎপন্ন সম্মুখ কেন্দ্রস্থ কোণ।

∴ হাতেকলমে পেলাম, যে-কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট চাপ সবসময় কেন্দ্রে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণের কোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ, রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

আমি যে-কোনো বৃত্ত এঁকে হাতেকলমে যাচাই করে দেখছি রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ। **[নিজে করি]**

**5** **আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।**




**প্রমাণ :** ধরি কোনো বৃত্তের কেন্দ্র O এবং তার ব্যাসার্ধ OA

ধরি, OA = r একক

OA ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দৈর্ঘ্যের একটি চাপ AB বৃত্তের কেন্দ্র O-তে ∠AOB উৎপন্ন করেছে। সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে, ∠AOB = 1 রেডিয়ান।

আমরা জানি যে, বৃত্ত দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ চার সমকোণের সমান।

$$\therefore \frac{\text{বৃত্তচাপ AB-এর দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}$$

আবার, $\dfrac{\angle AOB}{4 \text{ সমকোণ}} = \dfrac{1 \text{ রেডিয়ান}}{4 \text{ সমকোণ}}$

জ্যামিতি থেকে পাওয়া যায়, যে-কোনো বৃত্তের বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের চাপের দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত সেইসব চাপের দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।

সুতরাং, $\dfrac{\angle AOB}{4 \text{ সমকোণ}} = \dfrac{\text{বৃত্তচাপ AB-এর দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}}$

বা, $\dfrac{1 \text{ রেডিয়ান}}{4 \text{ সমকোণ}} = \dfrac{1}{2\pi}$

বা, 1 রেডিয়ান $= \dfrac{4 \text{ সমকোণ}}{2\pi} = \dfrac{2 \text{ সমকোণ}}{\pi}$ এবং এই মানটি একটি ধ্রুবক সংখ্যা

কারণ 2 সমকোণ ও $\pi$ উভয়েই ধ্রুবক।

∴ পেলাম, 1 রেডিয়ান $= \dfrac{2 \text{ সমকোণ}}{\pi}$

বা, $1^c = \dfrac{2 \text{ সমকোণ}}{\pi}$

অর্থাৎ, $\pi$ রেডিয়ান = 2 সমকোণ বা $180^\circ$

বা, $\pi^c$ = 2 সমকোণ বা, $180^\circ$

**6** আমি 1 রেডিয়ানের মান ষষ্ঠিক পদ্ধতিতে কী হবে হিসাব করে লিখি।

$\pi$ রেডিয়ান = 2 সমকোণ = $180^\circ$

$\therefore$ 1 রেডিয়ান $= \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{\frac{22}{7}}$ [গণনার জন্য $\pi$-এর আসন্ন মান $\frac{22}{7}$ নেওয়া হয়]

$= \frac{180^\circ \times 7}{22} = 57^\circ16'22''$ (প্রায়)  $\therefore$ 1 রেডিয়ান = $57^\circ16'22''$ (প্রায়)

$\frac{630^\circ}{11} \rightarrow$

```
     57
11 | 630
   – 55
     80
    –77
      3
```

$3^\circ = 3\times60' = 180'$

```
     16
11 | 180
   – 11
     70
    –66
      4
```

$4' = 4\times60'' = 240''$

```
     21.8
11 | 240
   – 22
     20
    –11
     90
   – 88
      2
```

$\frac{630^\circ}{11} = 57^\circ16'22''$ (প্রায়)

$21.8'' \approx 22''$

**7** আমি $1^\circ$-র মান বৃত্তীয় পদ্ধতিতে কী হবে হিসাব করে দেখি।

$180^\circ = \pi^c$

বা, $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{22}{7\times180}\right)^c$  $\therefore$ দেখছি, $1^\circ < 1^c$ $\left[\because \frac{22}{7\times180} < 1\right]$

বুঝেছি, পদ্ধতি দুটির এককাবলির মধ্যে সম্পর্ক পেলাম।

[ফাঁকা ঘরে নিজে লিখি]

| ষষ্টিক পদ্ধতি | বৃত্তীয় পদ্ধতি |
|---|---|
| $360^\circ$ | $2\pi$ রেডিয়ান = $2\pi^c$ |
| $180^\circ$ | ☐ = $\pi^c$ |
| $90^\circ$ | $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান = ☐ |
| $60^\circ$ | ☐ = $\frac{\pi^c}{3}$ |
| ☐ | $\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান = $\frac{\pi^c}{4}$ |
| $30^\circ$ | $\frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান = ☐ |

**মনে রাখব :** (1) ষষ্টিক পদ্ধতির কোণ বোঝানোর জন্য কোণের পরিমাণের উপরে '$^\circ$' চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়, যেমন 60 ডিগ্রি = $60^\circ$; আবার বৃত্তীয় পদ্ধতিতে কোণ বোঝানোর জন্য কোণের পরিমাণের উপরে '$^c$' -এই চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। যেমন, 1 রেডিয়ান = $1^c$

(2) বৃত্তীয় পদ্ধতিতে কোণের মান প্রকাশ করার সময় আমরা $\pi$ ও তার অংশ দিয়ে তা প্রকাশ করি। $\pi$ দিয়ে প্রকাশ করলে সাধারণত আমরা '$^c$' এই চিহ্নটি সর্বদা ব্যবহার করি না। যেমন, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ লেখা হয়।

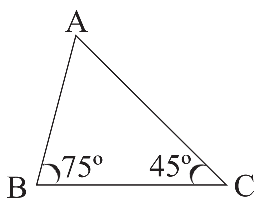
**প্রয়োগ : 1.** একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের ষষ্টিক মান যথাক্রমে $75^\circ$ ও $45^\circ$; তৃতীয় কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

ধরি, $\Delta ABC$ -এর $\angle ABC = 75^\circ$ এবং $\angle ACB = 45^\circ$

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) =$ ☐

আবার, $180^\circ = \pi$ $\therefore 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় কোণের বৃত্তীয় মান $\frac{\pi}{3}$



**প্রয়োগ : 2.** একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের ষষ্টিক মান যথাক্রমে $65^\circ$ ও $85^\circ$ হলে, তৃতীয় কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 3.** একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি কোনো একটি অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে দু-বার পূর্ণ আবর্তনের পরেও আরও $30^\circ$ কোণ আবর্তন করে। ত্রিকোণমিতিক পরিমাপে কোণটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

যেহেতু রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরছে,

$\therefore$ কোণটি ☐ [ধনাত্মক/ঋণাত্মক] হবে।

ঘূর্ণায়মান রশ্মির একবার পূর্ণ আবর্তনের জন্য ☐ ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন হয়।

$\therefore$ 2 বার পূর্ণ আবর্তনের জন্য কোণ উৎপন্ন করবে $2\times360^\circ = 720^\circ$

যেহেতু 2 বার পূর্ণ আবর্তনের পরেও $30^\circ$ কোণ আবর্তন করেছে,

সুতরাং, ষষ্টিক পদ্ধতিতে কোণের মান $720^\circ+30^\circ = 750^\circ$

আবার, $180^\circ = \pi \quad \therefore 750^\circ = \left(\frac{750}{180}\pi\right) = 4\frac{1}{6}\pi$

**প্রয়োগ : 4.** আমি $3750''$ কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ করি।

$60'' = 1'$

$$\therefore 60 \overline{)3750} \; 62, \quad 3750 - 360 = 150, \quad 150 - 120 = 30$$

$60' = 1^\circ$

$$\therefore 60 \overline{)62} \; 1, \quad 62 - 60 = 2$$

$\therefore 3750'' = 1^\circ 2' 30''$

**প্রয়োগ : 5.** আমি $85.12^\circ$ কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ করি।

$$\begin{aligned}
85.12^\circ &= 85^\circ+(0.12)^\circ \\
&= 85^\circ+(0.12\times60') \quad [\because 1^\circ = 60'] \\
&= 85^\circ + 7.2' \\
&= 85^\circ+7'+0.2' \quad = 85^\circ+7'+(0.2\times60'') \quad [\because 1' = 60''] \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = 85^\circ+7'+12'' \quad = 85^\circ7'12''
\end{aligned}$$

**প্রয়োগ : 6.** $40^\circ16'24''$ -কে রেডিয়ানে প্রকাশ করি।

$$\begin{aligned}
40^\circ16'24'' &= 40^\circ+16'+24'' \\
&= 40^\circ+16'+\left(\frac{24}{60}\right)' \quad [\because 60'' = 1'] \\
&= 40^\circ+16'+\frac{2'}{5} \quad = 40^\circ+\left(16+\frac{2}{5}\right)' \\
&\qquad = 40^\circ+\frac{82'}{5} \quad = 40^\circ+\left(\frac{82}{5\times60}\right)^\circ \quad [\because 60' = 1^\circ] \\
&\qquad\qquad = 40^\circ+\left(\frac{41}{150}\right)^\circ \quad = \square^\circ
\end{aligned}$$ **[নিজে লিখি]**

যেহেতু, $180^\circ = \pi$

$$\therefore \frac{6041}{150}^\circ = \frac{\pi}{180}\times\frac{6041}{150} = \frac{6041}{27000}\pi$$

**প্রয়োগ : 7.** $22^{\circ}30'$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 8.** একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুটির অন্তর $\frac{2\pi}{5}$ রেডিয়ান। কোণ দুটির মান রেডিয়ান ও ডিগ্রিতে প্রকাশ করি।

মনে করি, সূক্ষ্মকোণ দুটির মান $x^c$ ও $y^c$ এবং $x>y$

শর্তানুসারে, $x+y=\frac{\pi}{2}$ এবং $x-y=\frac{2\pi}{5}$

$$x+y=\frac{\pi}{2}$$
$$x-y=\frac{2\pi}{5}$$
$$2x=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}=\frac{9\pi}{10} \qquad \therefore x=\frac{9\pi}{20}$$
$$\therefore y=\frac{\pi}{2}-\frac{9\pi}{20}=\frac{\pi}{20}$$

আবার, $\pi = 180^{\circ}$

$$\therefore\ x=\frac{9\pi}{20}=\frac{9\times180^{\circ}}{20}=81^{\circ}$$

এবং $y=\frac{\pi}{20}=\frac{180^{\circ}}{20}=9^{\circ}$ $\qquad$ $\therefore$ কোণ দুটির মান $\frac{9\pi}{20}$ বা $81^{\circ}$ এবং $\frac{\pi}{20}$ বা $9^{\circ}$

**প্রয়োগ : 9.** একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত $2:5:3$; ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম কোণটির বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।

মনে করি, কোণগুলির মান $2x$, $5x$ ও $3x$ রেডিয়ান। যেখানে $x$ সাধারণ গুণিতক এবং $x>0$

$\therefore\ 2x+5x+3x=\pi$

বা, $10x=\pi$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{10}$

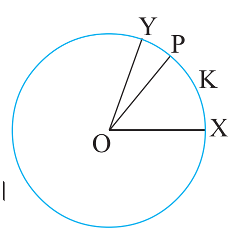
$\therefore$ ক্ষুদ্রতম কোণটির বৃত্তীয়মান হবে $2x=\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{5}$

**প্রয়োগ : 10.** ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করেছি। A শীর্ষবিন্দু থেকে BC বাহুর মধ্যবিন্দু D-এর সংযোজক সরলরেখাংশ AD; $\angle BAD$-এর বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

> **উত্তর সংকেত :** সমবাহু ত্রিভুজে ABC-এর $\angle BAC = 60^{\circ}$ এবং সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা সংশ্লিষ্ট কোণের সমদ্বিখণ্ডক হয়। $\therefore \angle BAD = 30^{\circ}$

আমার বন্ধু শুভ তার খাতায় একটি বৃত্ত এঁকেছে এবং সেই বৃত্তে যে-কোনো একটি দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ XKY এঁকেছে।

**8** ওই XKY দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কেন্দ্রস্থ কোণ উৎপন্ন করবে তার বৃত্তীয় মান কীভাবে পাব দেখি। আমি r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট যে-কোনো একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে s একক দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ কেন্দ্রে কত রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে হিসাব করি।




পাশের চিত্রে, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OX = r একক

ধরি, চাপ XKY-এর দৈর্ঘ্য s একক

s একক দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ XKY কেন্দ্রে $\angle XOY$ উৎপন্ন করেছে।

ধরি, r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যের চাপ XKP কেন্দ্র $\angle XOP$ উৎপন্ন করেছে।

$\therefore \angle XOP = 1$ রেডিয়ান [সংজ্ঞা অনুসারে]

কোনো বৃত্তের বিভিন্ন চাপের দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণগুলির অনুপাত সেইসব চাপের দৈর্ঘ্যের অনুপাতের সমান।

সুতরাং, $\frac{\angle XOY}{\angle XOP} = \frac{\text{চাপ XKY-এর দৈর্ঘ্য}}{\text{চাপ XKP -এর দৈর্ঘ্য}} = \frac{s}{r}$

বা, $\frac{\angle XOY}{1 \text{ রেডিয়ান}} = \frac{s}{r}$

বা, $\theta = \frac{s}{r}$ [ধরি, $\angle XOY = \theta$ রেডিয়ান]

$\therefore s = r\theta$

$\therefore$ **পেলাম, r একক দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে s একক দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ কেন্দ্রে যে কেন্দ্রস্থ কোণ উৎপন্ন করে তার বৃত্তীয় মান θ হলে, s = rθ হবে।**

**প্রয়োগ : 11.** যদি শুভ-র আঁকা বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 7 সেমি. হয়, তবে ওই বৃত্তে 5.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রস্থ কোণটির বৃত্তীয় মান কত হবে হিসাব করে লিখি।

এখানে, r = 7 সেমি. এবং s = 5.5 সেমি.

ধরি, 5.5 সেমি. বৃত্তচাপ দ্বারা ধৃত কেন্দ্রস্থ কোণের বৃত্তীয় মান = θ

$s = r\theta$

$\therefore 5.5 = 7\times\theta$

বা, $\theta = \frac{5.5}{7} = \frac{55}{70} = \frac{11}{14}$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণের বৃত্তীয় মান $\frac{11}{14}$ রেডিয়ান বা $\frac{11^c}{14}$ বা $\frac{\pi^c}{4}$ $\left(\because \frac{22}{7} \approx \pi\right)$

**প্রয়োগ : 12.** একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 6 সেমি. হলে, ওই বৃত্তে 15 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ কেন্দ্রে যে কেন্দ্রস্থ কোণ তৈরি করে, তার বৃত্তীয় মান কত হবে তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 13.** একটি বৃত্তের অসমান দৈর্ঘ্যের দুটি চাপ কেন্দ্রে যে দুটি কোণ ধারণ করে আছে তাদের অনুপাত 5:3 এবং দ্বিতীয় কোণটির যষ্টিক মান 45°; প্রথম কোণটির যষ্টিক মান এবং বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

মনে করি, প্রথম কোণটির যষ্টিক মান $\theta^o$

শর্তানুসারে, $\frac{\theta^o}{45^o} = \frac{5}{3}$ বা, $\theta^o = \frac{5\times45^o}{3} = 75^o$

যেহেতু, $180^o = \pi^c$ সুতরাং, $75^o = \frac{75}{180}\times\pi^c = \frac{5}{12}\pi^c$

$\therefore$ প্রথম কোণের যষ্টিক মান $75^o$ এবং বৃত্তীয় মান = $\frac{5}{12}\pi$

**প্রয়োগ : 14.** একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের পরিমাপ $35^o57'4''$ এবং $39^o2'56''$ হলে, তৃতীয় কোণটির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

ত্রিভুজের দুটি কোণের সমষ্টি $= 35^o57'4'' + 39^o2'56''$

$= 74^o59'60''$

$= 74^o60'$

$= 75^o$

$\therefore$ তৃতীয় কোণের পরিমাপ $= 180^o - 75^o = 105^o = 105\times\frac{\pi^c}{180} = \frac{7}{12}\pi^c$

সুতরাং, তৃতীয় কোণটির বৃত্তীয় মান $\frac{7}{12}\pi$

**প্রয়োগ : 15.** $65^\circ 35' 25''$ কোণটির পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি।

$$90^\circ = 89^\circ 60'$$
$$= 89^\circ 59' 60''$$

$$\begin{array}{r} 89^\circ 59' 60'' \\ -65^\circ 35' 25'' \\ \hline 24^\circ 24' 35'' \end{array}$$

$\therefore$ $65^\circ 35' 25''$ কোণটির পূরক কোণের মান $24^\circ 24' 35''$

**প্রয়োগ : 16.** $27^\circ 27' 27''$ কোণটির পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 17.** $75^\circ 36' 24''$ কোণটির সম্পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি।

$$180^\circ = 179^\circ 60'$$
$$= 179^\circ 59' 60''$$

$$\begin{array}{r} 179^\circ 59' 60'' \\ -\ 75^\circ 36' 24'' \\ \hline 104^\circ 23' 36'' \end{array}$$

$\therefore$ $75^\circ 36' 24''$ কোণটির সম্পূরক কোণের মান $104^\circ 23' 36''$

**প্রয়োগ : 18.** $85^\circ 32' 36''$ কোণটির সম্পূরক কোণের মান ষষ্টিক পদ্ধতিতে লিখি। [নিজে করি]

## কষে দেখি 20

1. নিম্নলিখিতগুলিকে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ করি :
   (i) $832'$ (ii) $6312''$ (iii) $375''$ (iv) $27\frac{1^\circ}{12}$ (v) $72.04^\circ$
2. নিম্নলিখিতগুলির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি :
   (i) $60^\circ$ (ii) $135^\circ$ (iii) $-150^\circ$ (iv) $72^\circ$ (v) $22^\circ 30'$ (vi) $-62^\circ 30'$ (vii) $52^\circ 52' 30''$ (viii) $40^\circ 16' 24''$
3. $\Delta ABC$-এর $AC = BC$ এবং BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করলাম। যদি $\angle ACD = 144^\circ$ হয়, তবে ABC ত্রিভুজের প্রতিটি কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।
4. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুটির অন্তর $\frac{2\pi}{5}$ হলে, ষষ্টিক পদ্ধতিতে ওই কোণদ্বয়ের মান লিখি।
5. একটি ত্রিভুজের একটি কোণের পরিমাপ $65^\circ$ এবং দ্বিতীয়টির পরিমাপ $\frac{\pi}{12}$ ; তৃতীয় কোণটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
6. দুটি কোণের সমষ্টি $135^\circ$ এবং তাদের অন্তর $\frac{\pi}{12}$ হলে, কোণ দুটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
7. একটি ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত 2:3:4 হলে, ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
8. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 28 সেমি.। এই বৃত্তে 5.5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ দ্বারা ধৃত কেন্দ্রীয় কোণটির বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
9. একটি বৃত্তের অসমান দৈর্ঘ্যের দুটি চাপ কেন্দ্রে যে কোণ ধারণ করে আছে তার অনুপাত 5:2 এবং দ্বিতীয় কোণটির ষষ্টিক মান $30^\circ$ হলে, প্রথম কোণটির ষষ্টিক মান ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।

10. একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি $-5\frac{1}{12}\pi$ কোণ উৎপন্ন করেছে। রশ্মিটি কোনদিকে কতবার পূর্ণ আবর্তন করেছে এবং তারপরে আরও কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করেছে তা হিসাব করে লিখি।
11. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করেছি যার সমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ $\angle ABC = 45^\circ$; $\angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডক AC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\angle ABD$, $\angle BAD$, $\angle CBD$ এবং $\angle BCD$-এর বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।
12. ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC ভূমিকে E বিন্দু পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করলাম যেন CE = BC হয়। A, E যুক্ত করে ACE ত্রিভুজের কোণগুলির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।
13. কোনো চতুর্ভুজের তিনটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ ও $90^\circ$ হলে, চতুর্থ কোণটির ষষ্টিক ও বৃত্তীয় মান হিসাব করে লিখি।
14. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটার প্রান্তবিন্দু 1 ঘণ্টায় আবর্তন করে (a) $\frac{\pi}{4}$ রেডিয়ান (b) $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান (c) $\pi$ রেডিয়ান (d) $2\pi$ রেডিয়ান

(ii) $\frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান সমান (a) $60^\circ$ (b) $45^\circ$ (c) $90^\circ$ (d) $30^\circ$

(iii) একটি সুষম ষড়ভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণের বৃত্তীয় মান (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

(iv) $s = r\theta$ সম্পর্কে $\theta$-এর পরিমাপ করা হয় (a) ষষ্টিক পদ্ধতিতে (b) বৃত্তীয় পদ্ধতিতে (c) ওই দুই পদ্ধতিতে (d) ওই দুই পদ্ধতির কোনোটিতেই নয়

(v) ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle A=120^\circ$ হলে, $\angle C$-এর বৃত্তীয় মান (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি রশ্মির প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে রশ্মিটির ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরার জন্য উৎপন্ন কোণটি ধনাত্মক।

(ii) একটি রশ্মির প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করে রশ্মিটির ঘড়ির কাঁটার দিকে দু-বার পূর্ণ আবর্তনের জন্য $720^\circ$ কোণ উৎপন্ন হয়।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $\pi$ রেডিয়ান একটি ________ কোণ।

(ii) ষষ্টিক পদ্ধতিতে 1 রেডিয়ান সমান ________ (প্রায়)।

(iii) $\frac{3\pi}{8}$ পরিমাপের কোণটির সম্পূরক কোণের বৃত্তীয় মান ________।

15. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(i) একটি কোণের ডিগ্রিতে মান D এবং ওই কোণের রেডিয়ানে মান R হলে, $\frac{R}{D}$-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $63^\circ 35' 15''$ পরিমাপের কোণটির পূরক কোণের মান লিখি।

(iii) একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের পরিমাপ $65^\circ 56' 55''$ এবং $64^\circ 3' 5''$ হলে, তৃতীয় কোণটির বৃত্তীয় মান নির্ণয় করি।

(iv) একটি বৃত্তে 220 সেমি. দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে $63^\circ$ পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(v) একটি ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটার প্রান্তবিন্দু 1 ঘণ্টা আবর্তনে যে পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করে তার বৃত্তীয় মান লিখি।

# 21 সম্পাদ্য: মধ্যসমানুপাতী নির্ণয়

## DETERMINATION OF MEAN PROPORTIONAL

আমাদের বাড়ির একতলায় একটি গানের স্কুল আছে। পাড়ার অনেক ছেলেমেয়েরা গান শিখতে আসে। আমিও সেখানে গান শিখি। গানের স্কুলের ঘরের মেঝেতে যে মাদুরটা বিছানো হয় সেটি খারাপ হয়ে গেছে। আমার বন্ধু সুমিত 4 মিটার লম্বা ও 3 মিটার চওড়া একটি আয়তক্ষেত্রাকার মাদুর অর্ডার দিয়ে তৈরি করে এনেছে। গানের স্কুলের ঘরটি বর্গক্ষেত্রাকার। তাই এই মাদুরটি ঠিক মতো বিছানো যাচ্ছে না।

কিন্তু এই আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরটি যদি বর্গক্ষেত্রাকার হতো তবে কি বর্গক্ষেত্রাকার ঘরের মেঝেতে বিছানো যেত? এই আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরের সমান ক্ষেত্রফলের বর্গক্ষেত্রাকার মাদুরের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

4 মিটার লম্বা ও 3 মিটার চওড়া আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরের সমান ক্ষেত্রফলের বর্গক্ষেত্রাকার মাদুরের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = $\sqrt{4\times3}$ মিটার।

4 ও 3-এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ , 12-এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।

কিন্তু জ্যামিতিক উপায়ে কি 4 ও 3-এর মধ্যসমানুপাতী বা $\sqrt{12}$-এর মান নির্ণয় সম্ভব? অঙ্কনের চেষ্টা করি।

**সম্পাদ্য :1.** জ্যামিতিক উপায়ে a ও b-এর মধ্যসমানুপাতী বা $\sqrt{ab}$-এর মান নির্ণয়।

**প্রথম পদ্ধতি** a একক ও b একক দৈর্ঘ্যের দুটি সরলরেখাংশ অঙ্কন করলাম। এই দুটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি।

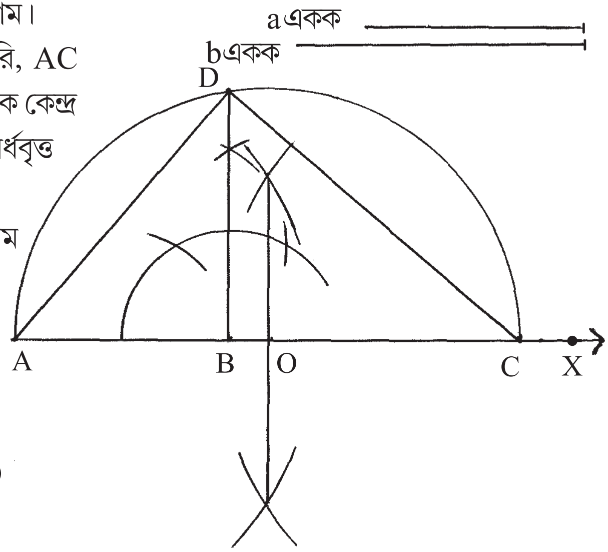
**অঙ্কন প্রণালী :**

(i)যে-কোনো রশ্মি AX অঙ্কন করলাম।

(ii)AX থেকে a একক দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশের সমান করে AB অংশ এবং BX থেকে b একক দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশের সমান করে BC অংশ কেটে নিলাম।

(iii) AC সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, AC সরলরেখাংশ O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA বা OC দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করি।

(iv) B বিন্দুতে BC-এর উপর লম্ব অঙ্কন করলাম যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করল।




তাহলে BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য হলো AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।
অর্থাৎ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মান
= (a একক ও b একক-এর মধ্যসমানুপাতীর মান)
= $\sqrt{ab}$ একক

**প্রমাণ :** A, D ও C, D যুক্ত করলাম। $\angle ADC$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle ADC = 1$ সমকোণ।

ADC সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু D থেকে DB, AC-এর উপর লম্ব।

$\therefore \Delta ABD$ ও $\Delta CBD$ সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ।

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$ বা, $BD^2 = AB.BC = a.b$

$\therefore BD = \sqrt{ab}$ একক

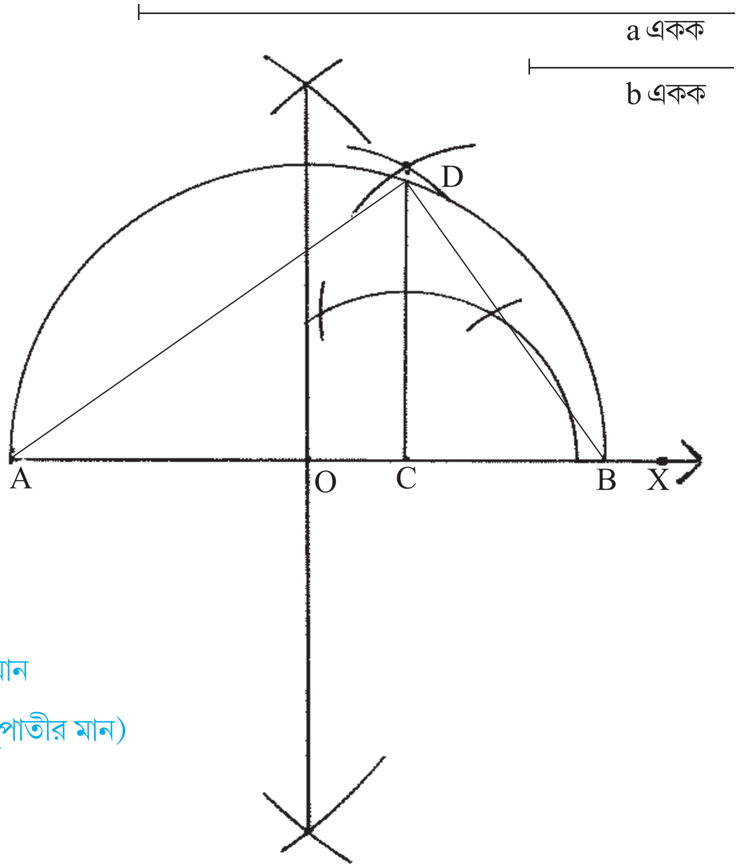
আমি অন্যভাবে দুটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি।

**দ্বিতীয় পদ্ধতি** a একক ও b একক দৈর্ঘ্যের দুটি সরলরেখাংশ অঙ্কন করলাম। এই দুটি সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি।

**অঙ্কন প্রণালী :**

(i) a একক দৈর্ঘ্যের সমান করে AX রশ্মি থেকে AB একটি সরলরেখাংশ কেটে নিলাম এবং BA থেকে b একক দৈর্ঘ্যের সমান করে BC অংশ কেটে নিলাম।

(ii) AB সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, AB সরলরেখাংশ O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। OA বা OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে O বিন্দুকে কেন্দ্র করে AB-এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করলাম।




(iii) C বিন্দুতে AB সরলরেখাংশের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করলাম যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore$ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য হলো AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

অর্থাৎ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যের মান

= (a একক ও b একক-এর মধ্যসমানুপাতীর মান)

$= \sqrt{ab}$ একক

**প্রমাণ :** A ও D যুক্ত করলাম।

$\angle ADB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle ADB = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ADB-এর সমকৌণিক বিন্দু D থেকে AB-এর উপর DC লম্ব।

$\therefore \Delta ABD$ ও $\Delta DBC$ সদৃশকোণী। সুতরাং সদৃশ।

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC}$ বা, $BD^2 = AB.BC = a.b$

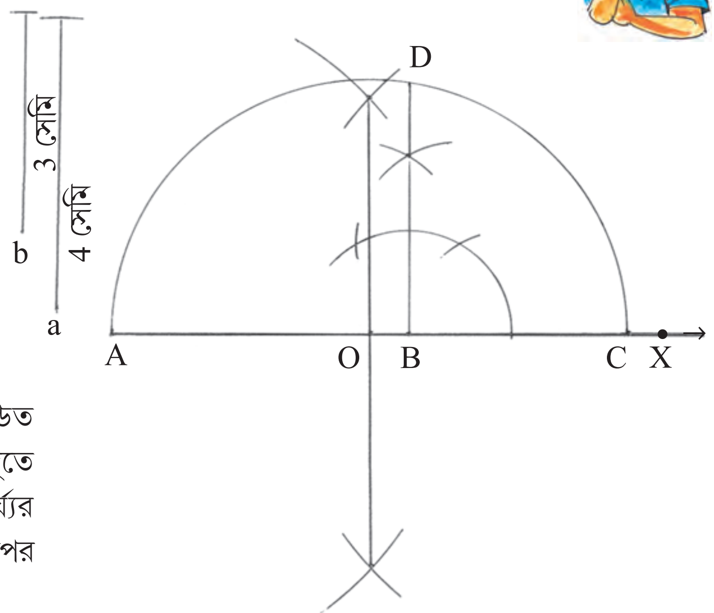
$\therefore BD = \sqrt{ab}$ একক

**প্রয়োগ :1.** এবার আমি জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{4\times3} = \sqrt{12}$ -এর মান নির্ণয় করি।

**অঙ্কন প্রণালী :**

(i) a ও b দুটি সরলরেখাংশ নিলাম যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সেমি. ও 3 সেমি.

(ii) AX রশ্মি থেকে 4 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমান করে AB সরলরেখাংশ ও BX রশ্মি থেকে 3 সেমি. দৈর্ঘ্যের সমান করে BC সরলরেখাংশ কেটে নিলাম।




(iii) AC সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, AC সরলরেখাংশ O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। OA বা OB দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে O বিন্দুকে কেন্দ্র AC-এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করি।

(iv) B বিন্দুতে BC-এর উপর একটি লম্ব অঙ্কন করলাম যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

∴ BD হলো AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

∴ BD সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্যই হচ্ছে $\sqrt{12}$ সেমি.

স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি,

BD = 3.5 সেমি. (প্রায়)

$\therefore \sqrt{12} = 3.5$ (প্রায়)

**প্রমাণ :** BD, AB ও BC-এর মধ্যসমানুপাতী

$\therefore BD^2 = AB.BC = a.b = 4.3 = 12$

$\therefore BD = \sqrt{12}$ সেমি.

**প্রয়োগ :2.** আমি জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{21}$ ও $\sqrt{15}$-এর মান নির্ণয় করি অথবা জ্যামিতিক উপায়ে 21 ও 15-এর বর্গমূল নির্ণয় করি **[নিজে করি]**

**উত্তর সংকেত :** 21 = 7×3 ∴ এক্ষেত্রে a ও b দুটি সরলরেখাংশ নেব যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 একক ও 3 একক এবং একই পদ্ধতিতে a ও b-এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করব। আবার 15 = ☐ × ☐. a ও b সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য ঠিকমতো নিয়ে আঁকি।

**প্রয়োগ :3.** আমি পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ভিত্তিতে অন্য অঙ্কন পদ্ধতিতে $\sqrt{12}$ -এর মান নির্ণয় করি।

## পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ভিত্তিতে অন্য অঙ্কন পদ্ধতি

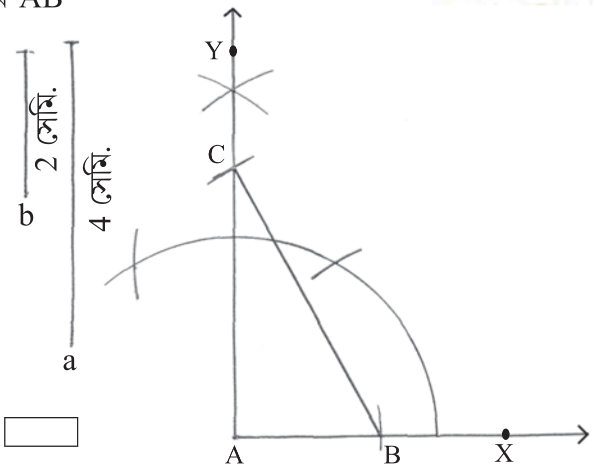
**অঙ্কন প্রণালী :**

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম যার AB বাহু = 2 সেমি. এবং অতিভুজ BC = 4 সেমি.

$\therefore$ AC-এর দৈর্ঘ্য হলো $\sqrt{12}$ সেমি.

স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি,
AC = 3.5 সেমি. (প্রায়)

$\therefore \sqrt{12} = 3.5$ (প্রায়)




**প্রমাণ :**

$\Delta ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ,

$\therefore AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4^2 - 2^2 =$ ☐ [নিজে লিখি]

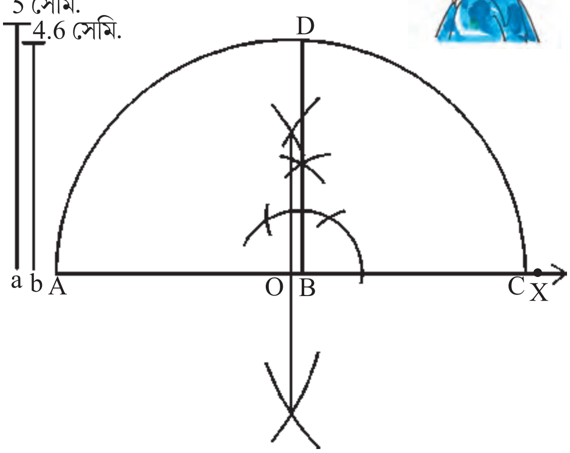
$\therefore AC = \sqrt{12}$ সেমি.

**প্রয়োগ :4.** আমি জ্যামিতিক উপায়ে $\sqrt{23}$-এর মান নির্ণয় করি।

$\boxed{23 = 5 \times 4.6}$

**অঙ্কন প্রণালী :**

(i) a ও b দুটি সরলরেখাংশ নিলাম যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি. ও 4.6 সেমি.




স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি, BD = ☐ সেমি. (প্রায়)

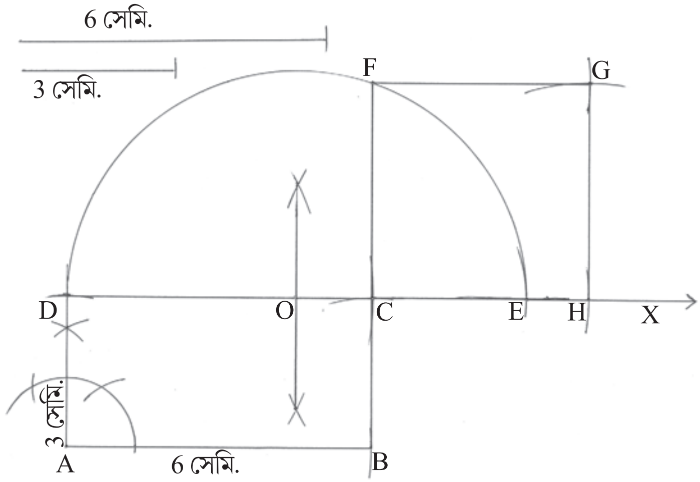
$\therefore \sqrt{23} =$ ☐ [প্রায়]

[বুঝেছি, অর্থাৎ যদি কোনো দুই অঙ্কের মৌলিক সংখ্যা থাকে, যেমন 17, 19, 29, 37 ইত্যাদি, তখন সেই সংখ্যাগুলিকে 5 দিয়ে ভাগ করে নেব। যেমন, 17=5×3.4, 19=5×3.8, 29=5×5.8, 37=5×7.4 ইত্যাদি]

**প্রয়োগ :5.** 4 মিটার লম্বা ও 3 মিটার চওড়া আয়তক্ষেত্রাকার মাদুরের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রাকার মাদুর কীভাবে পাব ? একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কনের চেষ্টা করি।

6 সেমি. দৈর্ঘ্য ও 3 সেমি. প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :




(i) 6 সেমি. দৈর্ঘ্য ও 3 সেমি. প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তাকার চিত্র ABCD অঙ্কন করলাম।

(ii) DC-কে বর্ধিত করলাম এবং বর্ধিতাংশ থেকে CB-এর সমান করে CE অংশ কেটে নিলাম।

(iii) DE সরলরেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, O বিন্দুতে DE সরলরেখাংশ সমদ্বিখণ্ডিত হয়। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OD বা OE দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে DE-এর উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করি।

(iv) BC-কে বর্ধিত করলাম যা অর্ধবৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করল।

(v) CF বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান করে CFGH বর্গাকার চিত্র অঙ্কন করলাম।

∴ CFGH-ই হলো নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র যার ক্ষেত্রফল ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

সুতরাং, CFGH বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

**প্রমাণ :** ABCD আয়তক্ষেত্র।

∴ ∠BCD = 1 সমকোণ। সুতরাং CF, DE-এর লম্ব।

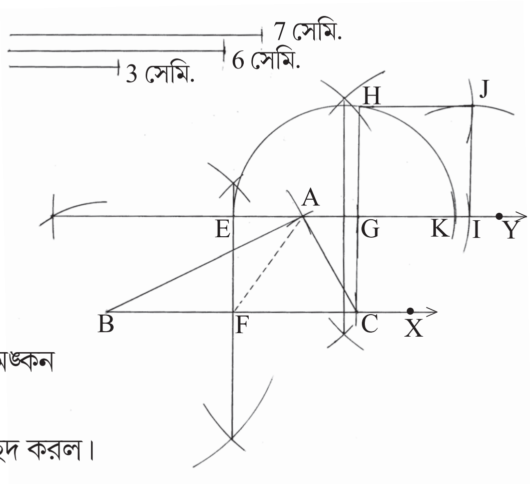
∴ অঙ্কনানুসারে CF-এর দৈর্ঘ্য DC ও CE-এর দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

∴ $CF^2 = DC.CE = AB.BC =$ ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

**প্রয়োগ : 6.** 7 সেমি. দৈর্ঘ্য ও 4 সেমি. প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 7.** আমি একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করি যার তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সেমি., 6 সেমি. ও 3 সেমি.। ওই ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি।

অঙ্কন প্রণালী :




(i) ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম যার AB, BC ও CA-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সেমি., 6 সেমি. ও 3 সেমি.

(ii) Δ ABC-এর সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র EFCG অঙ্কন করলাম।

(iii) এবার EG-এর বর্ধিতাংশ থেকে GC-এর সমান করে GK অংশ কেটে নিলাম।

(iv) এবার EK সরলরেখাংশকে ব্যাস করে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করলাম।

(v) CG -কে বর্ধিত করলাম যা অর্ধবৃত্তকে H বিন্দুতে ছেদ করল।

(vi) GH-কে বাহু করে HGIJ বর্গাকার চিত্র অঙ্কন করলাম।

∴ HGIJ হলো নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র যার ক্ষেত্রফল $\Delta$ ABC-এর ক্ষেত্রফলের সমান।

**প্রমাণ :** AF যোগ করলাম।

$\Delta$ ABC-এর AF মধ্যমা। ∴ $\Delta$ AFC-এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ $\Delta$ ABC-এর ক্ষেত্রফল .......... (i)

আবার $\Delta$ AFC এবং আয়তক্ষেত্র EFCG-এর একই ভূমি FC এবং একই সমান্তরালযুগল FC এবং EG-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ $\Delta$ AFC-এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্র EFCG-এর ক্ষেত্রফল .............(ii)

(i) ও (ii) থেকে পেলাম, $\Delta$ ABC-এর ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্র EFCG-এর ক্ষেত্রফল।

EFCG আয়তক্ষেত্রের $\angle CGE = 1$ সমকোণ। সুতরাং, $HG \perp EK$.

অঙ্কনানুসারে, HG-এর দৈর্ঘ্য EG ও GK-এর দৈর্ঘ্যের মধ্যসমানুপাতী।

∴ $HG^2 = EG.GK = EG.GC$ = EFCG আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

∴ HGIJ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = EFCG আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

আবার, $\Delta$ ABC-এর ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্র EFCG-এর ক্ষেত্রফল।

∴ $\Delta$ ABC-এর ক্ষেত্রফল = HGIJ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

**প্রয়োগ :8.** আমি 7 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করি। **[নিজে করি]**

## কষে দেখি 21

1. নিম্নলিখিত দৈর্ঘের সরলরেখাংশগুলির মধ্যসমানুপাতী অঙ্কন করি এবং প্রতিক্ষেত্রে স্কেলের সাহায্যে মধ্যসমানুপাতীগুলির মান নির্ণয় করি :

   (i) 5 সেমি., 2.5 সেমি. (ii) 4 সেমি., 3 সেমি. (iii) 7.5 সেমি., 4 সেমি.
   (iv) 10 সেমি., 4 সেমি. (v) 9 সেমি., 5 সেমি. (vi) 12 সেমি., 3 সেমি.

2. জ্যামিতিক উপায়ে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির বর্গমূল নির্ণয় করি :

   (i) 7 (ii) 18 (iii) 24 (iv) 28 (v) 13 (vi) 29

3. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার চিত্র অঙ্কন করি :

   (i) $\sqrt{14}$ সেমি. (ii) $\sqrt{22}$ সেমি. (iii) $\sqrt{31}$ সেমি. (iv) $\sqrt{33}$ সেমি.

4. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রগুলির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কন করি :

   (i) 8 সেমি., 6 সেমি. (ii) 6 সেমি., 4 সেমি.
   (iii) 4.2 সেমি., 3.5 সেমি. (iv) 7.9 সেমি., 4.1 সেমি.

5. নিম্নলিখিত ত্রিভুজগুলির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কন করি :

   (i) ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 10 সেমি., 7 সেমি. ও 5 সেমি.।
   (ii) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার ভূমির দৈর্ঘ্য 7 সেমি. এবং সমান বাহুদুটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 5 সেমি.।
   (iii) একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সেমি.।

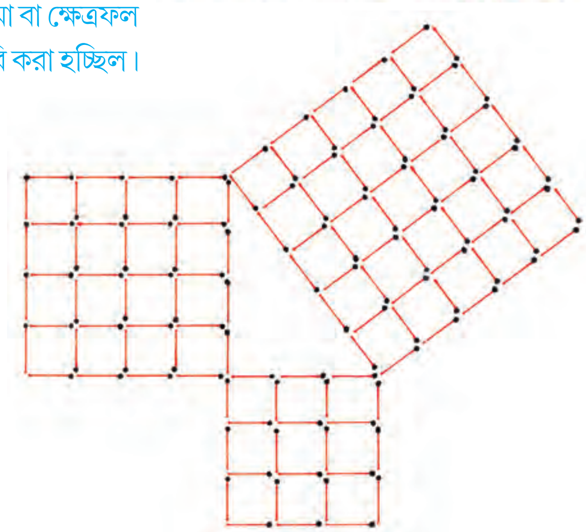
# 22 পিথাগোরাসের উপপাদ্য
## PYTHAGORAS THEOREM

গত সপ্তাহে আমাদের স্কুলে একটি বিজ্ঞানের প্রদর্শনী হয়েছিল। আমরা সারাদিন ধরে প্রদর্শনীর বিভিন্ন বিষয়ের বিভাগে ঘুরেছি। গণিতের প্রদর্শনীর ঘরে অনেক কিছু মজার অঙ্ক দেখেছি। তবে তাদের মধ্যে ‘দেশলাই কাঠি নিয়ে মজার খেলা’ বিষয়টি আমার খুব ভালো লেগেছে। প্রদর্শনীর এই বিষয়টিতে দেশলাই কাঠি বসিয়ে নানান ধরনের সামতলিক চিত্র তৈরি করে তার পরিসীমা বা ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা বা নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফলের সামতলিক চিত্র তৈরি করা হচ্ছিল।

[যেখানে = 1 বর্গ একক ধরা হচ্ছে]

সেখানে অন্য একটি চার্টে দেশলাই কাঠির একটি মজার চিত্র দেখলাম।

সেটি হলো →



চার্টে দেখছি একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার অতিভুজে 5 টি কাঠি, লম্বে 4 টি কাঠি এবং ভূমিতে ☐ টি কাঠি আছে।

আরও দেখছি, অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 25 বর্গ একক = $5^2$ বর্গ একক

ভূমির উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 9 বর্গ একক = $3^2$ বর্গ একক

লম্বের উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 16 বর্গ একক = $4^2$ বর্গ একক

দেখছি, $5^2 = 3^2 + 4^2$

$\therefore$ (অতিভুজ)$^2$ = (ভূমি)$^2$ + (লম্ব)$^2$

অর্থাৎ, অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= ভূমির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + লম্বের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

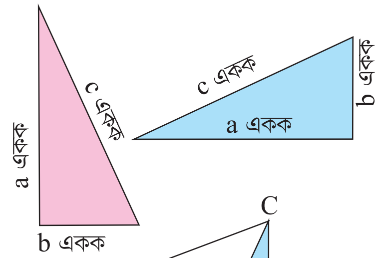
**1 সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ, ভূমি ও লম্বের মধ্যে এই সম্পর্ক কোথা থেকে পেলাম? যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রেই কি এই সম্পর্ক সম্ভব?**

পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পেলাম

**পিথাগোরাসের উপপাদ্য :** যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

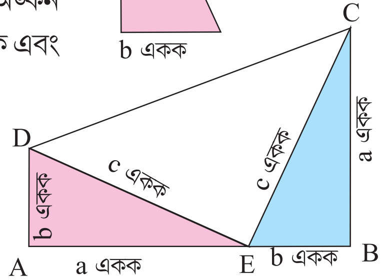
**হাতেকলমে** যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্য যাচাই করি।

(1) একটি রঙিন আর্টপেপারে একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম, যার ভূমির দৈর্ঘ্য 'b' একক এবং উচ্চতা (লম্ব) 'a' একক এবং সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম।




(2) অন্য একটি রঙিন আর্টপেপারে আর একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করলাম, যার ভূমির দৈর্ঘ্য 'a' একক এবং উচ্চতা (লম্ব) 'b' একক এবং সমকোণী ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিলাম।

(3) ধরি ত্রিভুজ দুটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য 'c' একক। এবার একটি সাদা আর্টপেপারে পাশের চিত্রের মতো দুটি সমকোণী ত্রিভুজ আটকে ABCD ট্রাপিজিয়াম আকারের ক্ষেত্র পেলাম।




(4) ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}(a + b) \times (a + b)$ বর্গএকক

আবার ABCD ট্রাপিজিয়াম আকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= $\Delta$DAE-এর ক্ষেত্রফল + $\Delta$CBE-এর ক্ষেত্রফল + $\Delta$DEC-এর ক্ষেত্রফল

$\therefore \frac{1}{2}(a + b)(a + b) = \frac{1}{2} a \times b + \frac{1}{2} a \times b + \frac{1}{2} c \times c \quad [\because \angle DEC = 90^\circ]$

বা, $(a + b)^2 = ab + ab + c^2$

বা, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

$\therefore a^2 + b^2 = \boxed{\phantom{c^2}}$

$\therefore$ পেলাম (ভূমি)$^2$ + (লম্ব)$^2$ = (অতিভুজ)$^2$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

***যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,***

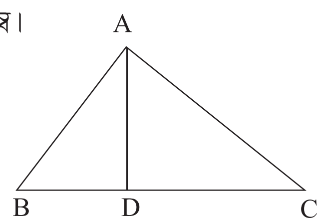
**উপপাদ্য : 49. পিথাগোরাসের উপপাদ্য:** যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

**প্রদত্ত :** ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle$A সমকোণ

**প্রমাণ করতে হবে :** $BC^2 = AB^2 + AC^2$

**অঙ্কন :** সমকৌণিক বিন্দু A থেকে অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

**প্রমাণ :** সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর অতিভুজ BC-এর উপর AD লম্ব।




$\therefore \Delta$ABD ও $\Delta$CBA সদৃশ।

সুতরাং, $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$, $\therefore AB^2 = BC.BD$ ...............(I)

আবার, $\Delta$CAD ও $\Delta$CBA সদৃশ।

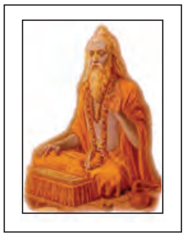
সুতরাং, $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC}$, $\therefore AC^2 = BC.DC$ ...............(II)

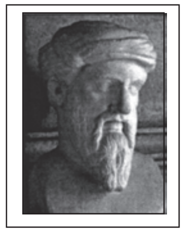
সুতরাং (I) ও (II) যোগ করে পাই, $AB^2 + AC^2 = BC.BD + BC.DC$

$= BC(BD + DC) = BC.BC = BC^2$

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$ **[প্রমাণিত]**

আজ থেকে অনেক পূর্বে (প্রায় 800 B.C.) একজন প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞ বৌদ্ধায়ন (Baudhayan) পিথাগোরাসের উপপাদ্যটিকে নিম্নরূপে বলেছিলেন। তিনি বলেছিলেন 'একটি আয়তাকার চিত্রের কর্ণের উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল উহার উভয় বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান'।


বৌদ্ধায়ান


পিথাগোরাস

[The diagonal of a rectangle produces by itself the same area as produced by its both sides (i.e. length and breadth)]

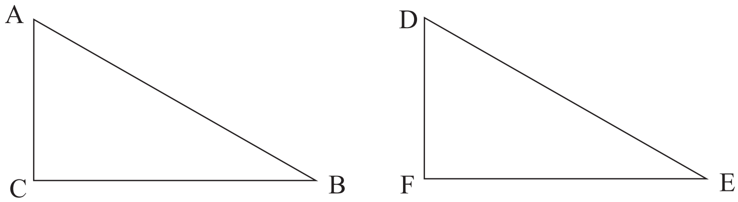
এই জন্য এই উপপাদ্যটিকে কখনও কখনও বৌদ্ধায়নের উপপাদ্যও বলা হয়।

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ যে-কোনো ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে প্রথম বাহুর বিপরীত কোণ কি সমকোণ হবে? যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

### *যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,*

**উপপাদ্য :50. পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য :** যে-কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে প্রথম বাহুর বিপরীত কোণটি সমকোণ হবে।

**প্রদত্ত :** $\Delta ABC$-এর AB বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল BC ও AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। অর্থাৎ, $AB^2 = AC^2 + BC^2$




**প্রমাণ করতে হবে :** $\angle ACB = 1$ সমকোণ

**অঙ্কন :** CB-এর সমান করে FE সরলরেখাংশ অঙ্কন করলাম। FE বাহুর উপর F বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করলাম এবং সেই লম্ব থেকে CA বাহুর সমান করে FD অংশ কেটে নিলাম এবং D ও E বিন্দুদ্বয় যোগ করলাম।

**প্রমাণ :** $AB^2 = BC^2 + AC^2$ [প্রদত্ত]

$= EF^2 + DF^2$ [$\because$ অঙ্কনানুসারে, $EF = BC$ এবং $AC = DF$]

$= DE^2$ [$\because \angle DFE = 1$ সমকোণ]

$\therefore AB = DE$

এখন $\Delta ABC$ ও $\Delta DEF$ -তে, $AB = DE$, $BC = EF$ এবং $AC = DF$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (S-S-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

$\therefore \angle ACB = \angle DFE = 1$ সমকোণ [$\because DF \perp EF$ অঙ্কনানুসারে]

$\therefore \angle ACB = 1$ সমকোণ **[প্রমাণিত]**

বুঝেছি, পিথাগোরাসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে সহজেই কোনো ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজ কিনা বুঝতে পারব। যেমন, যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি., 12 সেমি. ও 13 সেমি., সেই ত্রিভুজটি ☐ ত্রিভুজ হবে। যেহেতু, $13^2 = 5^2 + 12^2$ এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য 13 সেমি.।

(2) কিন্তু কোনো সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য কেমন হতে পারে তার কি কোনো সূত্র পাওয়া যায়?

যেহেতু, $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$

অতএব যদি কোনো ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য $(m^2 - n^2)$ একক, $2mn$ একক এবং $(m^2 + n^2)$ একক হয় তবে সেটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে এবং তার অতিভুজের দৈর্ঘ্য হবে $(m^2 + n^2)$ একক। (যেখানে, $m > n$ )

**প্রয়োগ :1.** $m$ ও $n$-এর বিভিন্ন উপযুক্ত মান ধরে 2 টি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যগুলি লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ :2.** আমাদের বাগানে একটি 25 মিটার লম্বা মই পাঁচিলে হেলান দিয়ে এমনভাবে রাখা আছে যে মইটি ভূমি থেকে 24 মিটার উঁচুতে পাঁচিল স্পর্শ করে আছে। মই-এর পাদদেশটি পাঁচিল থেকে কত দূরে আছে হিসাব করে লিখি।

ধরি, AC মই-এর দৈর্ঘ্য = 25 মিটার , AB = 24 মিটার; ABC সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই,

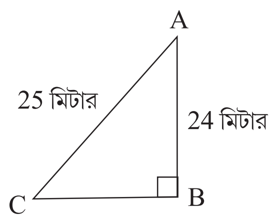
$AB^2 + BC^2 = AC^2$

বা, $(24 \text{ মিটার})^2 + (BC)^2 = (25 \text{ মিটার})^2$

বা, $BC^2 = (25 \text{ মিটার})^2 - (24 \text{ মিটার})^2 =$ ☐

$\therefore$ BC = 7 মিটার

$\therefore$ মই-এর পাদদেশটি পাঁচিল থেকে 7 মিটার দূরে আছে।

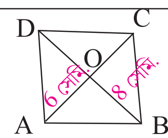



**প্রয়োগ : 3.** কোনো রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 12 সেমি. ও 16 সেমি. হলে, রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

**উত্তর সংকেত :** রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ $OA = \frac{12}{2}$ সেমি. = ☐ সেমি., OB = ☐ সেমি.

AOB সমকোণী ত্রিভুজ। $\therefore$ পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই, $AB^2 = OA^2 + OB^2$

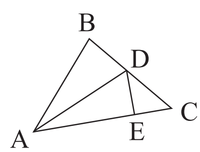



**প্রয়োগ : 4** একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করেছি যার $\angle B$ সমকোণ। $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করেছি যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $CD^2 = 2BD^2$

**প্রদত্ত :** ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $\angle B = 1$ সমকোণ। $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

**প্রমাণ করতে হবে :** $CD^2 = 2BD^2$

**অঙ্কন :** D বিন্দু থেকে AC-এর উপর DE লম্ব অঙ্কন করলাম যা AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করল।




**প্রমাণ :** ABC সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। $\therefore \angle ACB = 45^\circ$

$\therefore$ DEC সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle DCE = 45^\circ$ ($\because \angle ACB = 45^\circ$);

আবার , $\because \angle DEC = 90^\circ$, সুতরাং, $\angle EDC = 45^\circ$; $\therefore \Delta DEC$-তে, DE = EC

$\Delta ABD$ ও $\Delta AED$-এর মধ্যে, $\angle BAD = \angle EAD$ [$\because$ AD, $\angle BAE$-এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\angle ABD = \angle AED$ (প্রত্যেকে 1 সমকোণ) এবং AD উহাদের সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta AED$ (A-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)

সুতরাং, BD = DE (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু)

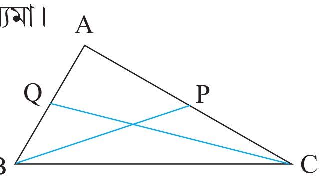
DEC সমকোণী ত্রিভুজে, $DC^2 = DE^2 + CE^2 = 2DE^2$ ($\because$ CE = DE)

$= 2BD^2$ ($\because$ DE = BD) [প্রমাণিত]

**প্রয়োগ :5.** $\Delta ABC$ -এর $AD \perp BC$ হলে, প্রমাণ করি যে $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ [নিজে করি]

**প্রয়োগ :6.** $\Delta ABC$-এর $\angle A$ সমকোণ এবং BP ও CQ দুটি মধ্যমা হলে, প্রমাণ করি যে, $5BC^2 = 4(BP^2 + CQ^2)$

**প্রদত্ত :** $\Delta ABC$-এর $\angle BAC = 1$ সমকোণ। BP ও CQ ত্রিভুজটির দুটি মধ্যমা।




**প্রমাণ করতে হবে :** $5BC^2 = 4(BP^2 + CQ^2)$

**প্রমাণ :** $\Delta ABC$-এর $\angle A$ সমকোণ।

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$

$= (2AQ)^2 + (2AP)^2$ [$\because$ P ও Q যথাক্রমে AC ও AB বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু]

$\therefore BC^2 = 4(AQ^2 + AP^2)$ ................. (i)

আবার, $\Delta BAP$ ও $\Delta CAQ$ সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore BP^2 = AB^2 + AP^2 = (2AQ)^2 + AP^2 = 4AQ^2 + AP^2$

$CQ^2 = AC^2 + AQ^2 = (2AP)^2 + AQ^2 = 4AP^2 + AQ^2$

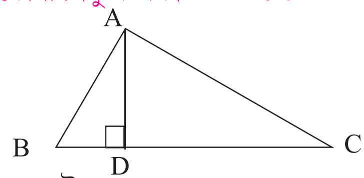
$\therefore BP^2 + CQ^2 = 4AQ^2 + AP^2 + 4AP^2 + AQ^2 = 5AQ^2 + 5AP^2 = 5(AQ^2 + AP^2)$ ......(ii)

$5BC^2 = 5.4\ (AQ^2 + AP^2)$ [(i) হইতে পাই]

$= 4.5\ (AQ^2 + AP^2) = 4\ (BP^2 + CQ^2)$ [(ii) হইতে পাই] **[প্রমাণিত]**

**প্রয়োগ :7.** $\Delta ABC$-এর শীর্ষবিন্দু A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করেছি যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং $AD^2 = BD.CD$ হলে, প্রমাণ করি যে, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle A = 90^{\circ}$

**প্রদত্ত :** $\Delta ABC$-এর $AD \perp BC$ এবং $AD^2 = BD.DC$




**প্রমাণ করতে হবে :** $\angle BAC = 90^{\circ}$

**প্রমাণ :** ADB একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ADB = 90^{\circ}$

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$ .......... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই]

আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ADC = 90^{\circ}$

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ ........... (ii) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই]

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = BD^2 + CD^2 + 2AD^2$

$= BD^2 + CD^2 + 2BD.CD$ [$\because AD^2 = BD.CD$]

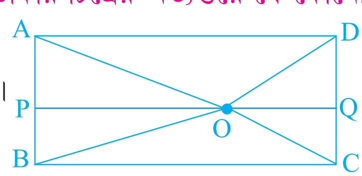
$= (BD + CD)^2 = BC^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\therefore$ পিথাগোরাসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে পাই ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle BAC = 90^{\circ}$ **[প্রমাণিত]**

**প্রয়োগ :8.** প্রমাণ করি যে-কোনো বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ওই বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 9.** ABCD একটি আয়তাকার চিত্র অঙ্কন করেছি। O আয়তাকার চিত্রের অভ্যন্তরে যে-কোনো একটি বিন্দু হলে, প্রমাণ করি যে, $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$




**প্রদত্ত :** ABCD আয়তাকার চিত্রের অভ্যন্তরে O যে-কোনো একটি বিন্দু।

**প্রমাণ করতে হবে :** $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$

**অঙ্কন :** O বিন্দু দিয়ে BC-এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করলাম যা AB ও DC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল।

**প্রমাণ :** অঙ্কনানুসারে $PQ \parallel BC$

$\therefore PQ \perp AB$ এবং $PQ \perp DC$ ($\because \angle B = 90^\circ$ এবং $\angle C = 90^\circ$)

$\therefore \Delta APO, \Delta BPO, \Delta CQO$ এবং $\Delta DQO$ প্রত্যেকে সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore OA^2 = AP^2 + OP^2 \qquad OC^2 = CQ^2 + OQ^2$

$OB^2 = BP^2 + OP^2 \qquad OD^2 = DQ^2 + OQ^2$

$\therefore OA^2 + OC^2 = AP^2 + OP^2 + CQ^2 + OQ^2$ ................ (i)

কিন্তু অঙ্কন অনুসারে, APQD ও BPQC এরা প্রত্যেকে আয়তাকার চিত্র।

সুতরাং, $AP = DQ$ এবং $CQ = BP$

(i) থেকে পাই, $OA^2 + OC^2 = DQ^2 + OP^2 + BP^2 + OQ^2$

$= (DQ^2 + OQ^2) + (BP^2 + OP^2)$

$= OD^2 + OB^2 = OB^2 + OD^2$ [প্রমাণিত]

## কষে দেখি 22

1. যদি কোনো ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য নিম্নরূপ হয়, তবে কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে হিসাব করে লিখি : (i) 8 সেমি., 15 সেমি. ও 17 সেমি. (ii) 9 সেমি., 11 সেমি. ও 6 সেমি.
2. আমাদের পাড়ার রাস্তায় একটি 15 মিটার লম্বা মই এমনভাবে রাখা আছে যে মইটি ভূমি থেকে 9 মিটার উঁচুতে অবস্থিত মিলিদের জানালা স্পর্শ করেছে। এবার ওই রাস্তার একই বিন্দুতে মইটির পাদদেশ রেখে মইটিকে ঘুরিয়ে এমভাবে রাখা হলো যে মইটি রাস্তার অপর প্রান্তে অবস্থিত আমাদের জানালা স্পর্শ করল। আমাদের জানালা যদি ভূমি থেকে 12 মিটার উপরে থাকে, তবে পাড়ার ওই রাস্তাটি কত চওড়া হিসাব করে লিখি।
3. 10 সেমি. বাহুবিশিষ্ট কোনো রম্বসের একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 12 সেমি. হলে, রম্বসটির অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. একটি ত্রিভুজ PQR অঙ্কন করেছি যার $\angle Q$ সমকোণ। QR বাহুর উপর S যে-কোনো একটি বিন্দু হলে, প্রমাণ করি যে, $PS^2 + QR^2 = PR^2 + QS^2$
5. প্রমাণ করি, যে-কোনো রম্বসের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গের সমষ্টি কর্ণ দুটির উপর অঙ্কিত বর্গ দুটির সমষ্টির সমান হবে।
6. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD, BC বাহুর উপর লম্ব হলে, প্রমাণ করি যে $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4AD^2$.
7. একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করলাম যার $\angle A$ সমকোণ। AB ও AC বাহুর উপর দুটি বিন্দু যথাক্রমে P ও Q নিলাম। P, Q; B, Q ও C, P যুক্ত করে, প্রমাণ করি যে, $BQ^2 + PC^2 = BC^2 + PQ^2$
8. ABCD চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করলে, প্রমাণ করি যে, $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$
9. একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করেছি যার উচ্চতা AD; $AB>AC$ হলে প্রমাণ করি যে $AB^2-AC^2=BD^2 - CD^2$
10. $\Delta ABC$-এর শীর্ষবিন্দু B ও C থেকে AC ও AB ($AC > AB$) বাহুদুটির উপর দুটি লম্ব অঙ্কন করেছি যারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করি যে, $AC^2 + BP^2 = AB^2 + CP^2$
11. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $\angle C$ সমকোণ। D, AB-এর উপর যে-কোনো একটি বিন্দু হলে, প্রমাণ করি যে, $AD^2 + DB^2 = 2CD^2$
12. ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। CD মধ্যমা হলে, প্রমাণ করি যে, $BC^2 = CD^2 + 3AD^2$
13. ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু O থেকে BC, CA ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে OX, OY ও OZ লম্ব অঙ্কন করেছি। প্রমাণ করি যে, $AZ^2 + BX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2 + BZ^2$

14. RST ত্রিভুজের $\angle S$ সমকোণ। RS ও ST বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y; প্রমাণ করি যে, $RY^2 + XT^2 = 5XY^2$

15. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

**(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M. C. Q.) :**

(i) এক ব্যক্তি একটি স্থান থেকে 24 মিটার পশ্চিমদিকে যান এবং তারপর 10 মিটার উত্তর দিকে যান। যাত্রাস্থান থেকে ব্যক্তির দূরত্ব (a) 34 মিটার, (b) 17 মিটার, (c) 26 মিটার, (d) 25 মিটার।

(ii) ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং $AD \perp BC$ হলে, $AD^2 =$ (a) $\frac{3}{2}DC^2$ (b) $2DC^2$ (c) $3DC^2$ (d) $4DC^2$

(iii) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে AC=BC এবং $AB^2=2AC^2$ হলে, $\angle C$-এর পরিমাপ
(a) $30^\circ$ (b) $90^\circ$ (c) $45^\circ$ (d) $60^\circ$

(iv) 13 মিটার ও 7 মিটার উচ্চ দুটি দণ্ড ভূমিতলে লম্বভাবে অবস্থিত এবং তাদের পাদদেশের মধ্যে দূরত্ব 8 মিটার। তাদের শীর্ষদেশের মধ্যে দূরত্ব (a) 9 মিটার (b) 10 মিটার (c) 11 মিটার (d) 12 মিটার।

(v) একটি রম্বসের দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 24 সেমি. এবং 10 সেমি. হলে, রম্বসটির পরিসীমা (a) 13 সেমি. (b) 26 সেমি. (c) 52 সেমি. (d) 25 সেমি.।

**(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :**

(i) একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 4 : 5 হলে, ত্রিভুজটি সর্বদা সমকোণী ত্রিভুজ হবে।

(ii) 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তে কোনো জ্যা কেন্দ্রে সমকোণ উৎপন্ন করলে জ্যাটির দৈর্ঘ্য 5 সেমি. হবে।

**(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :**

(i) একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ___________ সমান।

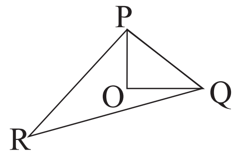
(ii) একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য $4\sqrt{2}$ সেমি. হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য ___________ সেমি.।

(iii) ABCD আয়তাকার চিত্রের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। AB = 12 সেমি., AO = 6.5 সেমি. হলে, BC-এর দৈর্ঘ্য ___________ সেমি.।

16. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S. A.)**

(i) ABC ত্রিভুজের AB = (2a – 1) সেমি., AC = $2\sqrt{2a}$ সেমি. এবং BC = (2a+1) সেমি. হলে $\angle BAC$-এর মান লিখি।

(ii) পাশের চিত্রে PQR ত্রিভুজের অভ্যন্তরে O বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে $\angle POR = 90^\circ$, OP = 6 সেমি. এবং OR = 8 সেমি.। যদি PR = 24 সেমি. এবং $\angle QPR = 90^\circ$ হয়, তাহলে QR বাহুর দৈর্ঘ্য কত তা লিখি।




(iii) ABCD আয়তাকার চিত্রের অভ্যন্তরে O বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে OB = 6 সেমি., OD = 8 সেমি. এবং OA = 5 সেমি.। OC-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

(iv) ABC ত্রিভুজের A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব BC বাহুর সঙ্গে D বিন্দুতে মিলিত হয়। যদি BD = 8 সেমি., DC = 2 সেমি. এবং AD = 4 সেমি. হয়, তাহলে $\angle BAC$-এর পরিমাপ কত তা লিখি।

(v) ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC = 90^\circ$, AB = 3 সেমি., BC = 4 সেমি. এবং B বিন্দু থেকে AC বাহুর উপর লম্ব BD যা AC বাহুর সঙ্গে D বিন্দুতে মিলিত হয়। BD-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

# 23 ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি

## TRIGONOMETRIC RATIOS AND TRIGOMETRIC IDENTITIES

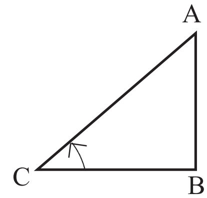
আমি আমার খাতায় রীনার ঘুড়ির ওড়ানোর ছবিটি এঁকে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC পেয়েছি,

যার, C বিন্দু ভুমিতে রীনার অবস্থান

A বিন্দু রীনার ঘুড়ির অবস্থান

AB ভুমি থেকে ঘুড়ির অবস্থানের উচ্চতা।

এবং, ∠BCA একটি সূক্ষ্মকোণ।

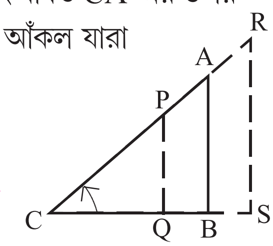



**1** কিন্তু ∠BCA সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে AB ও BC -কে কী বলব?

ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB বাহুকে ∠BCA **কোণের বিপরীত বাহু বা লম্ব** এবং BC বাহুকে ∠ACB **কোণের সংলগ্ন বাহু বা ভূমি** বলা হয়।

বুঝেছি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠BAC কোণের বিপরীত বাহু ☐ এবং ∠BAC কোণ সংলগ্ন বাহু AB

শুভ আমার আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC-এর উপরে একটি বিন্দু P এবং বর্ধিত CA-এর উপর একটি বিন্দু R নিল। P ও R বিন্দু থেকে BC ও বর্ধিত CB-এর উপর দুটি লম্ব আঁকল যারা BC-কে এবং CB-এর বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে Q ও S বিন্দুতে ছেদ করল।




এরফলে, PQC ও RSC আরও দুটি সমকোণী ত্রিভুজ পেলাম।

**2** PQC, ABC ও RSC সমকোণী ত্রিভুজগুলির বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক জানার চেষ্টা করি ও কী পাই দেখি।

দেখছি, PQC, ABC ও RSC সমকোণী ত্রিভুজগুলি পরস্পর সদৃশ। **[নিজে প্রমাণ করি]**

(i) $\frac{PQ}{CP}=\frac{AB}{CA}=\frac{RS}{CR}$ (ii) $\frac{CQ}{CP}=\frac{CB}{CA}=\frac{CS}{CR}$ (iii) $\frac{PQ}{CQ}=\frac{AB}{CB}=\frac{RS}{CS}$

(iv) $\frac{CP}{PQ}=\frac{CA}{AB}=\frac{CR}{RS}$ (v) $\frac{CP}{CQ}=\frac{CA}{CB}=\frac{CR}{CS}$ (vi) $\frac{CQ}{PQ}=\frac{CB}{AB}=\frac{CS}{RS}$

দেখছি, তিনটি সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে ∠BCA সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে

(i) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ অনুপাতগুলি সমান (ii) $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$ অনুপাতগুলি সমান এবং (iii) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ অনুপাতগুলিও সমান।

অন্য যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে ও একইভাবে একটি সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে একাধিক সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে দেখছি (i), (ii) ও (iii) নং অনুপাতগুলি সমান। **[নিজে করি]**

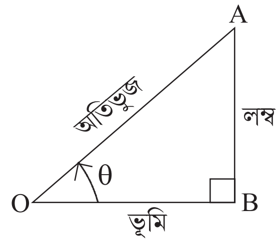
বুঝেছি, কোনো সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত ওই ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভরশীল নয়। অনুপাতগুলি সম্পূর্ণভাবে সূক্ষ্মকোণটির পরিমাণের উপর নির্ভরশীল।

**3** কিন্তু একটি সমকোণী ত্রিভুজের দুটি করে বাহু নিয়ে যে ছয় প্রকারের অনুপাতগুলি পেলাম, তাদের আলাদা আলাদা কী নাম আছে দেখি।

একটি সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দুটি করে বাহু নিয়ে যে ছয় প্রকারের অনুপাত পাওয়া যায় তাদের **ত্রিকোণমিতিক অনুপাত** বলা হয়।

পাশের চিত্রের ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABO$ = এক সমকোণ

$\therefore$ OA অতিভুজ এবং $\angle BOA$ সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে OB = ভূমি এবং AB = লম্ব। ধরি, $\angle AOB = \theta$




$\angle BOA$ -এর Sine = $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{OA} = \sin\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cosine = $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OB}{OA} = \cos\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Tangent = $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{OB} = \tan\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cosecant = $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{OA}{AB} = \operatorname{cosec}\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Secant = $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{OA}{OB} = \sec\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

$\angle BOA$ -এর Cotangent = $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{OB}{AB} = \cot\theta$ [সংক্ষেপে লিখি]

**4** উপরের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি দেখি ও তাদের মধ্যে সম্পর্ক লেখার চেষ্টা করি।

দেখছি, $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ ও $\cot\theta$ যথাক্রমে $\sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ -র অন্যোন্যক।

অর্থাৎ, $\boldsymbol{\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}}$ , $\boldsymbol{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}}$ , $\boldsymbol{\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}}$

আবার, $\tan\theta = \frac{AB}{OB} = \frac{\frac{AB}{OA}}{\frac{OB}{OA}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore$ পেলাম, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

আবার, $\cot\theta = \frac{OB}{AB} = \frac{\frac{OB}{OA}}{\frac{AB}{OA}} = \frac{\square}{\square}$ **[নিজে লিখি]**

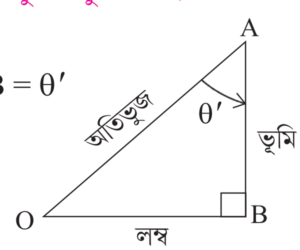
$\therefore$ পেলাম, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

> দেখছি, সমকোণী ত্রিভুজ ABO-এর সূক্ষ্মকোণ $\angle BOA$-এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ওই ত্রিভুজের কোণ ও বাহুগুলির মধ্যে সম্পর্ক প্রকাশ করে এবং কোনো নির্দিষ্ট কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানগুলি সমকোণী ত্রিভুজটির বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের সঙ্গে পরিবর্তনশীল নয়।

**5** কিন্তু ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle OAB$ সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি কী হবে দেখি।

ABO সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABO$ = 1 সমকোণ। $\therefore$ OA = অতিভুজ

$\angle OAB$ সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে AB = ভূমি এবং OB = লম্ব। ধরি, $\angle OAB = \theta'$

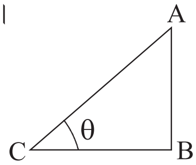



$\therefore \sin\theta' = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OB}{OA}$

$\cos\theta' = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{OA}$

$\tan\theta'$, $\operatorname{cosec}\theta'$, $\sec\theta'$, $\cot\theta'$ **নিজে লিখি।**

বুঝেছি, রীনার ঘুড়ি যদি AC দৈর্ঘ্যের লম্বা সুতো দিয়ে বাঁধা থাকে এবং ঘুড়িটি যদি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে $60^\circ$ কোণ করে উড়তে থাকে তবে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান থেকে AB উচ্চতায় থাকবে।




$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} \quad \therefore AB = AC \times \sin\theta$$

$\therefore$ তখন রীনার ঘুড়ি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে $AC \times \sin\theta$ উচ্চতায় থাকবে।

**6** **কিন্তু sinθ কি sin এবং θ -এর গুণফল?**

θ কোণের sine-এর সংক্ষিপ্ত রূপ "sinθ"। কিন্তু **sin ও θ-এর গুণফল sinθ নয়**। একইভাবে cosθ , cos এবং θ-এর গুণফল নয় এবং অন্য সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি একই রকমের।

আর্যভট্ট (500 A.D.) প্রথম sin-এর ধারণা ব্যবহার করেন। এরপর আর্যভট্টের কাজ আরবি ও লাতিন ভাষায় অনুবাদ করা হয়। লাতিন ভাষায় (Sinus) শব্দটি ব্যবহৃত হয়। এরপর সমগ্র ইউরোপে গণিতের সর্বক্ষেত্রে 'Sinus' শব্দটি 'Sine' শব্দ হিসাবে ব্যবহৃত হয়। ইংরেজ জ্যোতির্বিজ্ঞানী অধ্যাপক Edmund Gunter (1581–1626) প্রথম সংক্ষিপ্ত আকারে 'Sin' ব্যবহার করেন।

**7** Sinθ-এর বর্গ কীভাবে লিখব?

লেখার সুবিধার জন্য, $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$ লেখা হয়, তবে $(\sin\theta)^2 \neq \sin\theta^2$

অনুরূপে, $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$, $(\tan\theta)^3 = \tan^3\theta$ ইত্যাদি।

$\operatorname{cosec}\theta = (\sin\theta)^{-1}$ লেখা যায়। কিন্তু $\operatorname{cosec}\theta \neq \sin^{-1}\theta$ (একে Sin inverse θ বলা হয়।)

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$, $\therefore$ sinθ-এর মান কি 1-এর বেশি হতে পারে?

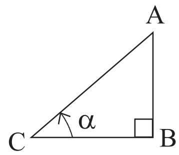
$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ ; যেহেতু লম্ব, অতিভুজের থেকে বড়ো হতে পারে না।

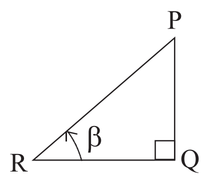
সুতরাং, sinθ-এর মান 1-এর বেশি হবে না।

**8** cosθ-এর মান কি 1-এর বেশি হতে পারে? [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 1.** α ও β দুটি এমন সূক্ষ্মকোণ যে $\sin\alpha = \sin\beta$; প্রমাণ করি যে, $\alpha = \beta$

ধরি, ABC এবং PQR দুটি সমকোণী ত্রিভুজ। ABC ত্রিভুজে $\angle ABC = 90^\circ$ এবং $\angle BCA = \alpha$; PQR ত্রিভুজে $\angle PQR = 90^\circ$ এবং $\angle QRP = \beta$




সমকোণী $\Delta ABC$-তে, $\sin\alpha = \frac{AB}{AC}$ ;

সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\sin\beta = \frac{PQ}{PR}$

যেহেতু, $\sin\alpha = \sin\beta$, সুতরাং, $\frac{AB}{AC} = \frac{PQ}{PR}$ বা, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = k$ (ধরি) $(k>0)$

$\therefore AB = k.PQ$ এবং $AC = k.PR$

$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$ এবং $QR = \sqrt{PR^2 - PQ^2}$

সুতরাং, $\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AC^2-AB^2}}{\sqrt{PR^2-PQ^2}} = \frac{\sqrt{k^2PR^2-k^2PQ^2}}{\sqrt{PR^2-PQ^2}} = \frac{k\sqrt{PR^2-PQ^2}}{\sqrt{PR^2-PQ^2}} = k \quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$ সুতরাং, $\angle BCA = \angle QRP$ $\therefore \alpha = \beta$ [প্রমাণিত]

বুঝেছি, $\sin\alpha = \sin 45^\circ$ হলে, $\alpha = 45^\circ$ [$\sin\alpha = \sin\beta$ হলে উভয়পক্ষে sin দিয়ে ভাগ করতে পারি না। কারণ $\sin\alpha = \sin \times \alpha$ নয়। তাই যখন, ~~sin~~ α = ~~sin~~ β তখন $\alpha = \beta$ এভাবে লিখতে পারি না। এটা ভুল]

**প্রয়োগ : 2.** $\sin(90^\circ-\theta)=\sin 2\theta$ হলে, $\theta$-এর মান হিসাব করে লিখি যখন $2\theta$ সূক্ষ্মকোণ।

$\sin(90^\circ-\theta)=\sin 2\theta$

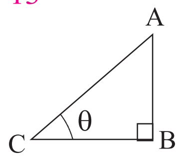
বা, $90^\circ-\theta=2\theta$

বা, $3\theta=90^\circ \quad \therefore \theta=30^\circ$

**প্রয়োগ : 3.** $5\theta$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan 5\theta=\tan(60^\circ+\theta)$ হলে, $\theta$-এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

> **মনে রাখব :** সাধারণত, (i) $\sin 2\theta \neq 2\sin\theta$
>
> (ii) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \neq \frac{\alpha}{\beta}$
>
> এবং (iii) $\sin\alpha \pm \sin\beta \neq \sin(\alpha \pm \beta)$
>
> কোণের Cosine, tangent ইত্যাদির ক্ষেত্রেও এই নিয়মগুলি প্রযোজ্য।

**প্রয়োগ : 4.** একটি সমকোণী ত্রিভুজে $\theta$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের পরিপ্রেক্ষিতে $\sin\theta=\frac{12}{13}$ হলে, $\tan\theta$ এবং $\cos\theta$-এর মান হিসাব করে লিখি।




$\sin\theta=\frac{12}{13}=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$

ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA=\theta$

ধরি, লম্ব $AB=12k$ একক এবং অতিভুজ $AC=13k$ একক [যেখানে, $k>0$]

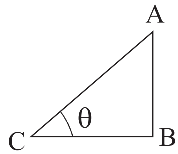
$\therefore$ ভূমি $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{(13k)^2-(12k)^2}$ একক $=\sqrt{169k^2-144k^2}$ একক

$=5k$ একক

$\therefore \tan\theta=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=\frac{12k}{5k}=\frac{12}{5}$

$\cos\theta=\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{5k}{13k}=\frac{5}{13}$

**প্রয়োগ : 5.** $\theta$ একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan\theta=\frac{8}{15}$ হলে, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$-র মান নির্ণয় করি ও দেখাই যে $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$




ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle ACB=\theta$

$\therefore \tan\theta=\frac{AB}{BC}=\frac{8}{15}$

ধরি, লম্ব $AB=8k$ একক এবং ভূমি $BC=15k$ একক [যেখানে, $k>0$]

$\therefore$ অতিভুজ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{(8k)^2+(15k)^2}$ একক $=\sqrt{64k^2+225k^2}$ একক

$=\sqrt{289k^2}$ একক $=17k$ একক

$\therefore \sin\theta=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{8k}{17k}=\frac{8}{17}$

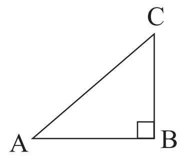
$\cos\theta=\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$ [নিজে লিখি]

$\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{8}{17}\right)^2+\left(\frac{15}{17}\right)^2=\frac{64}{289}+\frac{225}{289}=\square$ [নিজে লিখি]

$\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ [প্রমাণিত]

**প্রয়োগ : 6.** যদি $\tan\theta = \frac{4}{3}$ হয়, তবে দেখাই যে, $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 7.** ABC ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য $\sqrt{13}$ একক। ওই ত্রিভুজের অপর দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি 5 একক হলে, $\sin C + \sin A$-এর মান নির্ণয় করি।




ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC

$\angle C$-এর সাপেক্ষে লম্ব AB

এবং $\angle A$-এর সাপেক্ষে লম্ব BC

$\therefore \sin C + \sin A = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{AB+BC}{AC} = \frac{5}{\sqrt{13}}$

**বিকল্প প্রমাণ :** মনে করি, AB = x একক, BC = (5–x) একক

ABC সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$x^2+(5-x)^2 = (\sqrt{13})^2$

বা, $x^2+25+x^2-10x = 13$

বা, $2x^2-10x+12 = 0$

বা, $x^2-5x+6 = 0$

বা, $x^2-3x-2x+6 = 0$

বা, $x(x-3)-2(x-3) = 0$

বা, $(x-3)(x-2) = 0$

হয়, $x-3 = 0 \quad \therefore x = 3$

অথবা, $x-2 = 0 \quad \therefore x = 2$

যদি, AB = 3 একক হয়, তখন BC = (5–3) একক = 2 একক

সুতরাং, $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ এবং $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

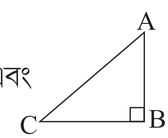
$\therefore \sin C + \sin A = \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$

আবার, AB=2 একক হলে BC=☐ একক এবং তখন sinC+sinA=☐ [একই ভাবে নিজে হিসাব করে লিখি]

কিন্তু যদি (sinC–sinA)-এর মান নির্ণয় করতে চাই তাহলে কি প্রথম পদ্ধতিতে করব না বিকল্প প্রমাণের সাহায্যে করব তা যুক্তিসহ চিন্তা করে নিজে করি।

## কষে দেখি 23.1

1. একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC এঁকেছি যার অতিভুজ AB=10 সেমি., ভূমি BC= 8 সেমি. এবং লম্ব AC=6 সেমি.। $\angle ABC$-এর Sine এবং tangent-এর মান নির্ণয় করি।




2. সোমা একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC এঁকেছে যার $\angle ABC=90^\circ$, AB=24 সেমি. এবং BC=7 সেমি.। হিসাব করে sinA, cosA, tanA ও cosecA-এর মান লিখি।
3. যদি ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C=90^\circ$, BC=21 একক এবং AB=29 একক হয়, তাহলে sinA, cosA, sinB ও cosB-এর মান নির্ণয় করি।
4. যদি $\cos\theta = \frac{7}{25}$ হয়, তাহলে $\theta$ কোণের সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করি।

5. যদি $\cot\theta=2$ হয়, তাহলে $\tan\theta$ ও $\sec\theta$-এর মান নির্ণয় করি এবং দেখাই যে, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$
6. $\cos\theta=0.6$ হলে, দেখাই যে, $(5\sin\theta-3\tan\theta)=0$
7. যদি $\cot A=\frac{4}{7.5}$ হয়, তাহলে $\cos A$ এবং $\operatorname{cosec} A$-এর মান নির্ণয় করি এবং দেখাই যে, $1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$
8. যদি $\sin C=\frac{2}{3}$ হয়, তবে $\cos C\times\operatorname{cosec} C$-এর মান হিসাব করে লিখি।
9. নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা তা যুক্তি সহকারে লিখি।
   (i) $\tan A$-এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা বড়ো।
   (ii) $\cot A$-এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা ছোটো।
   (iii) একটি কোণ $\theta$-এর জন্য $\sin\theta=\frac{4}{3}$ হতে পারে।
   (iv) একটি কোণ $\alpha$-এর জন্য $\sec\alpha=\frac{12}{5}$ হতে পারে।
   (v) একটি কোণ $\beta$(Beta)-এর জন্য $\operatorname{cosec}\beta=\frac{5}{13}$ হতে পারে।
   (vi) একটি কোণ $\theta$-এর জন্য $\cos\theta=\frac{3}{5}$ হতে পারে।

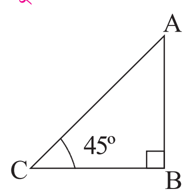
---

আমাদের বন্ধুরা প্রত্যেকে ঘুড়ি ওড়াল। সবার ঘুড়িই অনেকটা উঁচুতে উড়েছিল। কিন্তু সতীশের ঘুড়ি সবচেয়ে বেশি উচ্চতায় উড়েছিল।

আজ আমরা ঠিক করেছি বাড়ি ফিরে নানা ধরনের সমকোণী ত্রিভুজ আঁকব (পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে) যাদের একটি কোণের পরিমাপ $30^\circ$ বা $45^\circ$ বা $60^\circ$ এবং সেই কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয়ের চেষ্টা করব।

আশা তার খাতায় একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC আঁকল আর $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA$ -এর মান $45^\circ$

**(9)** আমার আঁকা ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি হিসাব করে লিখি।




ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA=45^\circ$

$\therefore\ \angle CAB=45^\circ$

$\therefore\ \Delta ABC$ একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

সুতরাং, $BC=BA$

ধরি, $BA=BC=a$ একক

$\therefore\ AC^2=AB^2+BC^2=a^2+a^2=2a^2$

$\therefore\ AC=a\sqrt{2}$ একক

$$\sin\angle BCA=\sin45^\circ=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{AB}{AC}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

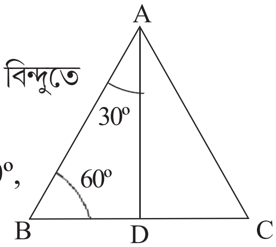
$$\cos\angle BCA=\cos45^\circ=\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\angle BCA=\tan45^\circ=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=\frac{AB}{BC}=\frac{a}{a}=1$$

বুঝেছি, $\operatorname{cosec}45^\circ=\frac{1}{\sin45^\circ}=\sqrt{2}$ , $\sec45^\circ=\frac{1}{\boxed{\phantom{0}}}=\sqrt{2}$ এবং $\cot45^\circ=\frac{1}{\tan45^\circ}=\boxed{\phantom{0}}$

**আমি $30^\circ$ ও $60^\circ$ কোণদ্বয়ের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করি।**

আমি একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC আঁকলাম। একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি কোণ $\square$ [60º/45º]




$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

A শীর্ষবিন্দু থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কন করলাম যা BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [$\Delta ABD$ ও $\Delta ACD$-তে $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle ABD = \angle ACD = 60^\circ$ এবং $AB = AC$.

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (A-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে)]

$\therefore BD=DC$ এবং $\angle BAD=\angle CAD$

আবার, ABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ; $\angle ADB=90^\circ$, $\angle DBA=60^\circ$ $\therefore \angle BAD=30^\circ$

ধরি, AB=2a একক, $\therefore$ BC=2a একক

সুতরাং, $BD=\frac{1}{2}BC=a$ একক

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABD থেকে পাই, $AD = \sqrt{AB^2-BD^2} = \sqrt{(2a)^2-a^2}$

$= \sqrt{4a^2-a^2} = a\sqrt{3}$ একক

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

বুঝেছি, $\operatorname{cosec} 30^\circ = \square$, $\sec 30^\circ = \square$ এবং $\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$ **[নিজে লিখি]**

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

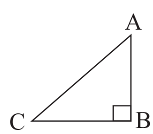
$$\cos 60^\circ = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AD}{BD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

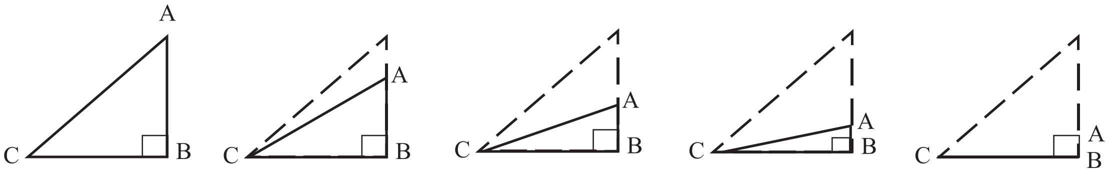
বুঝেছি, $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{\square}{\square}$ **[নিজে লিখি]**

$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$ এবং $\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

**10** কিন্তু যে-কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ABC-এর সূক্ষ্মকোণটির মান যদি ক্রমশ কমতে থাকে তবে ওই সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের কী পরিবর্তন হবে ছবি এঁকে দেখি।




ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ; $\angle BCA$ -এর মান ক্রমশ কমতে থাকল যতক্ষণ না কোণটির মান প্রায় 0º-এর কাছে হয়।




চিত্রে দেখছি, $\angle BCA$-এর মান যতই কমতে থাকছে A-বিন্দু ততই B বিন্দুর দিকে অগ্রসর হচ্ছে অর্থাৎ ততই AB বাহুর দৈর্ঘ্য কমতে থাকছে এবং A বিন্দু প্রায় B বিন্দুর কাছে এলে $\angle BCA$-এর মান প্রায় $0^o$ হয় এবং AC ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য প্রায় সমান হয়। অর্থাৎ $\angle BCA$-এর মান প্রায় $0^o$-এর কাছে আসলে AB বাহুর দৈর্ঘ্য প্রায় 0-এর কাছে হয়।

$\therefore \ \sin\angle BCA = \frac{AB}{AC}$ -এর মান প্রায় 0-এর কাছে হবে যখন $\angle BCA$-এর মান প্রায় $0^o$-এর কাছে হয়।

আবার $\angle BCA$-এর মান যখন প্রায় $0^o$-এর কাছে হয় তখন AC ও BC বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য প্রায় সমান হয়।

সুতরাং $\cos\angle BCA = \frac{BC}{AC}$ -এর মান প্রায় 1-এর কাছে হয় যখন $\angle BCA$-এর মান $0^o$-এর কাছে হয়।

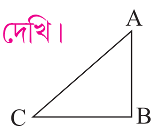
সুতরাং, এই ক্ষেত্রে নীচের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি সংজ্ঞা হিসাবে ধরা হয়।

**$\sin 0^o = 0$ এবং $\cos 0^o = 1$**

$\therefore \tan 0^o = \frac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = 0$ এবং $\cot 0^o = \frac{1}{\tan 0^o}$, যা অসংজ্ঞাত

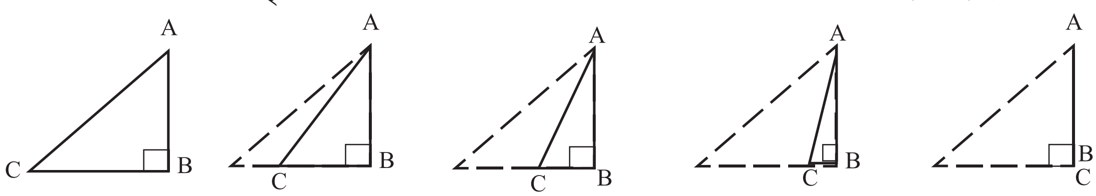
বুঝেছি, $\operatorname{cosec} 0^o = \frac{1}{\sin 0^o}$, যা অসংজ্ঞাত এবং $\sec 0^o = \frac{1}{\cos 0^o} = 1$

যদি উপরের ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ সূক্ষ্মকোণের মান ক্রমশ বৃদ্ধি পায় এবং প্রায় $90^o$ কোণের কাছাকাছি যায়, তখন $\angle BCA$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান কী হবে দেখি।




ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ,

$\angle BCA$-এর মান ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকল যতক্ষণ না কোণটির মান প্রায় $90^o$-এর কাছাকাছি হয়।




চিত্রে দেখছি, $\angle BCA$-এর মান বৃদ্ধি পেয়ে যতই প্রায় $90^o$-এর দিকে কাছাকাছি যাচ্ছে $\angle CAB$-এর মান ততই কমে প্রায় $0^o$ কোণের কাছাকাছি যাচ্ছে এবং C বিন্দু B বিন্দুর দিকে ক্রমশ সরে যাওয়ায় CB বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশ প্রায় শূন্যের কাছে যাচ্ছে।

আবার, AC বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশ প্রায় AB বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান হচ্ছে।

সুতরাং, সেক্ষেত্রে $\sin\angle ACB = \frac{AB}{AC}$ -এর মান প্রায় 1-এর কাছাকাছি যাবে যখন $\angle BCA$এর মান $90^o$-এর কাছাকাছি যাবে।

আবার, $\cos\angle BCA = \frac{BC}{AC}$ -এর মান প্রায় 0-এর কাছাকাছি যাবে যখন $\angle BCA$-এর মান প্রায় $90^o$-এর কাছাকাছি যাবে।

সুতরাং, এক্ষেত্রে নীচের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি সংজ্ঞা হিসাবে ধরা হয়।

$\sin 90^o = 1$ এবং $\cos 90^o = 0$

$\therefore \tan 90^o = \frac{\sin 90^o}{\cos 90^o}$ যা অসংজ্ঞাত এবং $\cot 90^o = \frac{\cos 90^o}{\sin 90^o} = 0$

$\operatorname{cosec} 90^o$ ও $\sec 90^o$-এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

পেলাম,

| θ কোণের কোণানুপাত | $0^{\circ}$ বা 0 | $30^{\circ}$ বা $\frac{\pi}{6}$ | $45^{\circ}$ বা $\frac{\pi}{4}$ | $60^{\circ}$ বা $\frac{\pi}{3}$ | $90^{\circ}$ বা $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\theta$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan\theta$ | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | অসংজ্ঞাত |
| $\operatorname{cosec}\theta$ | অসংজ্ঞাত | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 1 |
| $\sec\theta$ | 1 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{2}$ | 2 | অসংজ্ঞাত |
| $\cot\theta$ | অসংজ্ঞাত | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |

উপরের ছক থেকে দেখছি, θ কোণের মান $0^{\circ}$ থেকে $90^{\circ}$ বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $\sin\theta$-এর মান 0 থেকে বৃদ্ধি পেয়ে 1 হয় এবং $\cos\theta$-এর মান 1 থেকে হ্রাস পেয়ে 0 হয়।

**আরও দেখছি, $0^{\circ}$ থেকে $90^{\circ}$ পর্যন্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি শূন্য, ধনাত্মক বা অসংজ্ঞাত হয়। কিন্তু ঋণাত্মক হয় না।**

যেহেতু **দশম শ্রেণির পাঠ্যসূচিতে** θ সর্বদা ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ সুতরাং ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি ঋণাত্মক হবে না।

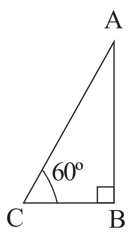
**প্রয়োগ : 8.** রীনার ঘুড়িটি যদি 150 মিটার লম্বা সুতো দিয়ে ওড়ানো হয় এবং ঘুড়িটি যদি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে $60^{\circ}$ কোণ করে থাকে, তবে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে কত উঁচুতে আছে হিসাব করে দেখি।

নীচের ছবিতে, ABC সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle ABC=90^{\circ}$, AC=150 মিটার লম্বা সুতোসমেত ঘুড়ি

এবং $\angle BCA = 60^{\circ}$

AB = রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে ঘুড়ির উচ্চতা

ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB নির্ণয়ের জন্য সেই কোণানুপাতটি নেব যেখানে AB ও AC আছে। [∵ AC-এর দৈর্ঘ্য জানা]




ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin 60^{\circ} = \frac{AB}{AC}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{150 \text{ মিটার}}$

বা, $2AB = 150\sqrt{3}$ মিটার

বা, $AB = \frac{150\sqrt{3}}{2}$ মিটার $= 75\sqrt{3}$ মিটার

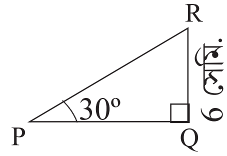
∴ ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে $75\sqrt{3}$ মিটার উঁচুতে আছে।

**প্রয়োগ : 9.** যদি ঘুড়িটি 120 মিটার লম্বা সুতো দিয়ে ওড়ানো হতো এবং ঘুড়িটি অনুভূমিক রেখার সঙ্গে $30^{\circ}$ কোণ করে থাকে, তাহলে ঘুড়িটি রীনার অবস্থান বা ভূমি থেকে কত উচ্চতায় থাকবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 10.** PQR সমকোণী ত্রিভুজের $\angle Q$ সমকোণ এবং $\angle P=30^\circ$; RQ=6 সেমি. হলে, PQ ও PR বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\tan 30^\circ = \frac{RQ}{PQ}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6\text{সেমি.}}{PQ}$ $\quad \therefore PQ = 6\sqrt{3}$ সেমি.




সমকোণী ত্রিভুজ PQR-এ, $\sin 30^\circ = \frac{RQ}{PR}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{6\text{সেমি.}}{PR}$ $\quad \therefore PR = 12$ সেমি.

**অন্যভাবে,** পিথাগোরাসের সূত্র থেকে পাই, $PR^2 = PQ^2+RQ^2$

$= (6\sqrt{3}\text{ সেমি.})^2 + (6\text{ সেমি.})^2$

$= 108\text{ সেমি.}^2 + 36\text{ সেমি.}^2$

$= 144\text{ সেমি.}^2$

$\therefore PR = 12$ সেমি.

**প্রয়োগ : 11.** ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। AB=5 সেমি. এবং AC=10 সেমি. হলে, $\angle BCA$ ও $\angle CAB$ -এর মান নির্ণয় করি।

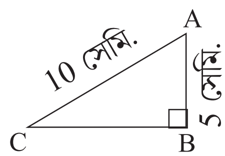
ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ

AB=5 সেমি. এবং AC=10 সেমি.

সমকোণী ত্রিভুজ ABC-তে, $\sin\angle BCA = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

$\therefore \angle BCA = 30^\circ$

$\therefore \angle CAB = 90^\circ - 30^\circ = \square$




**প্রয়োগ : 12.** ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। AB=7 সেমি. এবং AC=$7\sqrt{2}$ সেমি. হলে, $\angle BCA$ ও $\angle CAB$ -এর মান হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 13.** দেখাই যে, $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$ **[প্রমাণিত]**

**প্রয়োগ : 14.** দেখাই যে, $\tan^2 60^\circ + 1 = \sec^2 60^\circ$ **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 15.** ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD মধ্যমা হলে, প্রমাণ করি যে $\sin\angle BAD = \cos\angle DBA$.

ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD মধ্যমা।

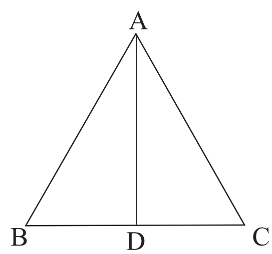
$\therefore AD \perp BC$ এবং $\angle BAD = \angle DAC$

ABD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle DBA = 60^\circ$ [$\because$ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

$\therefore \angle BAD = 30^\circ$

$\therefore \sin\angle BAD = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ এবং $\cos\angle DBA = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\therefore \sin\angle BAD = \cos\angle DBA$ **[প্রমাণিত]**



**প্রয়োগ : 16.** প্রমাণ করি যে, $\frac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} = \cos 60^\circ$

$$\frac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

**প্রয়োগ : 17.** প্রমাণ করি যে, $\tan^2 60^\circ - 2\sin 60^\circ = 3 - \cot 30^\circ$ [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 18.** মান নির্ণয় করি : $\dfrac{5\cos^2\frac{\pi}{3}+4\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}}$

$$\frac{5\cos^2\frac{\pi}{3}+4\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}} = \frac{5\cos^2 60^\circ+4\sec^2 30^\circ-\tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ}$$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-(1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{4}+\frac{16}{3}-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{15+64-12}{12}}{\frac{4}{4}} = \frac{67}{12} = 5\frac{7}{12}$$

**প্রয়োগ : 19.** $\sin(A+B)=1$ এবং $\cos(A-B)=1$ যেখানে, $0^\circ \le (A+B) \le 90^\circ$ এবং $A>B$; A ও B কোণের মান নির্ণয় করি।

$\sin(A+B)=1=\sin 90^\circ$

$\therefore A+B = 90^\circ$

আবার, $\cos(A-B)=1=\cos 0^\circ$

$\therefore A-B = 0^\circ$

$$\begin{array}{l} A+B = 90^\circ \\ A-B = 0^\circ \\ \hline 2A \quad = 90^\circ \end{array}$$

$\therefore A = 45^\circ$ এবং $B=90^\circ-45^\circ = 45^\circ$

**প্রয়োগ : 20.** $\theta$ ($0^\circ \le \theta \le 90^\circ$) -এর কোন মানের জন্য $\sin^2\theta-3\sin\theta+2=0$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

$\sin^2\theta-3\sin\theta+2=0$

বা, $\sin^2\theta-2\sin\theta-\sin\theta+2=0$

বা, $\sin\theta(\sin\theta-2)-1(\sin\theta-2)=0$

বা, $(\sin\theta-1)(\sin\theta-2)=0$

হয়, $\sin\theta-1=0 \quad \therefore \sin\theta=1$;

অথবা, $\sin\theta-2=0 \quad \therefore \sin\theta=2$

যেহেতু, $\sin\theta$ -এর মান 1-এর বেশি হতে পারে না, সুতরাং $\sin\theta=1=\sin 90^\circ \quad \therefore \theta=90^\circ$

**প্রয়োগ : 21.** $\theta$ ($0^\circ \le \theta \le 90^\circ$)-এর কোন মান/মানগুলির জন্য $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$

বা, $2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

বা, $\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

$\cos\theta = 0$ হলে, $\cos\theta = 0 = \cos 90^\circ$ $\therefore \theta = 90^\circ$

আবার, $2\sin\theta - 1 = 0$ হলে, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ $\therefore \theta = 30^\circ$

$\therefore \theta = 90^\circ$ বা $\theta = 30^\circ$ মানের জন্য $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ হবে।

কিন্তু $2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$ উভয়পক্ষকে $\cos\theta$ দিয়ে ভাগ করলে শুধু পাই $\theta = 30^\circ$, $\theta$-এর অন্য মানটি পাওয়া গেল না কেন দেখি।

$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$-এর উভয়পক্ষকে $\cos\theta$ দিয়ে ভাগ করলে পাই, $2\sin\theta = 1$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ $\therefore \theta = 30^\circ$

কিন্তু এখানে $\cos\theta \neq 0$ নয়। তাই $\cos\theta$ দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করা যায় না। এর জন্য $\theta$-এর দুটি মানের পরিবর্তে একটি মান পাওয়া গেল।

## কষে দেখি 23.2

1. আমাদের বাড়ির জানালায় একটি মই ভূমির সঙ্গে $60^\circ$ কোণে রাখা আছে। মইটি $2\sqrt{3}$ মিটার লম্বা হলে আমাদের ওই জানালাটি ভূমি থেকে কত উপরে আছে ছবি এঁকে হিসাব করে লিখি।
2. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ। $AB = 8\sqrt{3}$ সেমি. এবং $BC = 8$সেমি. হলে, $\angle ACB$ ও $\angle BAC$-এর মান হিসাব করে লিখি।
3. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ এবং $AC = 20$ সেমি.। BC এবং AB বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. PQR সমকোণী ত্রিভুজের $\angle Q = 90^\circ$, $\angle R = 45^\circ$; যদি $PR = 3\sqrt{2}$ মিটার হয়, তাহলে PQ ও QR বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।
5. **মান নির্ণয় করি :**

(i) $\sin^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 60^\circ + \sec^2 30^\circ$ (ii) $\sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii) $3\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{3}\cot^2 30^\circ - \frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$

(iv) $\frac{4}{3}\cot^2 30^\circ + 3\sin^2 60^\circ - 2\operatorname{cosec}^2 60^\circ - \frac{3}{4}\tan^2 30^\circ$

(v) $\dfrac{\frac{1}{3}\cos 30^\circ}{\frac{1}{2}\sin 45^\circ} + \dfrac{\tan 60^\circ}{\cos 30^\circ}$ (vi) $\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - \frac{3}{4}\sec^2 45^\circ - 4\sin^2 30^\circ$

(vii) $\sec^2 60^\circ - \cot^2 30^\circ - \dfrac{2\tan 30^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}$

(viii) $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ \tan 30^\circ} + \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

(ix) $\dfrac{1-\sin^2 30^\circ}{1+\sin^2 45^\circ} \times \dfrac{\cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ}{\operatorname{cosec}^2 90^\circ - \cot^2 90^\circ} \div (\sin 60^\circ \tan 30^\circ)$

6. দেখাই যে,

(i) $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$ (ii) $\cos 60^\circ = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$ (iii) $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} = \sqrt{3}$

(iv) $\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}} = \sec 60^\circ + \tan 60^\circ$ (v) $\frac{2\tan^2 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} + \sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ = \sec 60^\circ$

(vi) $\tan^2\frac{\pi}{4}\ \sin\frac{\pi}{3}\ \tan\frac{\pi}{6}\ \tan^2\frac{\pi}{3} = 1\frac{1}{2}$ (vii) $\sin\frac{\pi}{3}\ \tan\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} = 2\sin^2\frac{\pi}{4}$

7. (i) $x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ = \tan^2 45^\circ - \cos 60^\circ$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $x \sin 60^\circ \cos^2 30^\circ = \frac{\tan^2 45^\circ \sec 60^\circ}{\operatorname{cosec} 60^\circ}$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) $x^2 = \sin^2 30^\circ + 4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ$ হলে, x-এর মান নির্ণয় করি।

8. $x \tan 30^\circ + y \cot 60^\circ = 0$ এবং $2x - y \tan 45^\circ = 1$ হলে, x ও y-এর মান হিসাব করে লিখি।

9. যদি $A = B = 45^\circ$ হয়, তবে যাচাই করি যে,

(i) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

10. (i) ABC সমবাহু ত্রিভুজের BD একটি মধ্যমা। প্রমাণ করি যে, $\tan\angle ABD = \cot\angle BAD$

(ii) ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB=AC এবং $\angle BAC=90^\circ$ ; $\angle BAC$-এর সমদ্বিখন্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

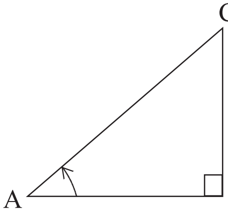
প্রমাণ করি যে, $\frac{\sec\angle ACD}{\sin\angle CAD} = \operatorname{cosec}^2 \angle CAD$

11. $\theta\ (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ - এর কোন মান/মানগুলির জন্য $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ সত্য হবে নির্ণয় করি।

---

আমাদের বন্ধু বিশাখ বোর্ডে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC আঁকল যার $\angle B$ সমকোণ।

**11** আজ আমরা বিশাখের আঁকা সমকোণী ত্রিভুজের যে-কোনো সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির মধ্যে সম্পর্ক খোঁজার চেষ্টা করব।




ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ।

∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই, $AB^2+BC^2 = AC^2$ ———— (i)

(i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে $AC^2$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

বা, $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$

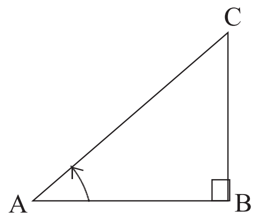
∴ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ———— (I)

দেখছি, (I) নং সম্পর্কটি A কোণের সকল মানের জন্য প্রযোজ্য যখন $0^\circ \leq A \leq 90^\circ$

কিন্তু (I) নং সম্পর্কটিকে কী বলা হয়?

(I) নং সম্পর্কটি একটি **অভেদ**।

(i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে $AB^2$ দ্বারা ভাগ করি ও কী পাই দেখি।




$AB^2+BC^2=AC^2$

বা, $\frac{AB^2}{AB^2}+\frac{BC^2}{AB^2}=\frac{AC^2}{AB^2}$

$\therefore\ 1+\tan^2A=\sec^2A$ ________ (II)

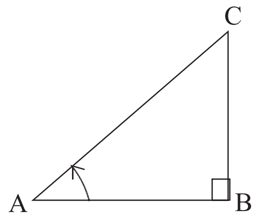
(II) নং অভেদে $A=0^o$ ও $A=90^o$ বসিয়ে কী পাই দেখি।

$A=0^o$ হলে II নং অভেদটি সত্য। কিন্তু $A=90^o$ হলে $\tan A$ অসংজ্ঞাত।

$\therefore$ **পেলাম,** A-এর সকল মানের জন্য যেখানে $0^o \leq A < 90^o$

$1+\tan^2A=\sec^2A$ ________ (II)

কিন্তু (i) নং সম্পর্কের উভয়দিকে $BC^2$ দ্বারা ভাগ করি ও কী পাই দেখি।




$AB^2+BC^2=AC^2$

বা, $\frac{AB^2}{BC^2}+\frac{BC^2}{BC^2}=\frac{AC^2}{BC^2}$

বা, $\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+1=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$

$\therefore \cot^2A+1=\text{cosec}^2A$ ________ (III)

(III) নং অভেদে $A=90^o$ ও $A=0^o$ বসিয়ে কী পাই দেখি।

$A=90^o$ হলে (III) নং অভেদটি সত্য। কিন্তু $A=0^o$ হলে $\cot A$ অসংজ্ঞাত।

$\therefore$ **পেলাম,** A-এর সকল মানের জন্য যেখানে $0^o < A \leq 90^o$

$1+\cot^2A=\text{cosec}^2A$ ________ (III)

**12** আমি (I), (II) ও (III) নং অভেদের সাহায্যে প্রতিটি ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতকে অন্য ত্রিকোণমিতিক কোণানুপাতের মাধ্যমে প্রকাশ করার চেষ্টা করি।

(I) নং থেকে পাই, $\sin^2A+\cos^2A=1$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2A}$ এবং $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}$

কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^o \leq A \leq 90^o$

(II) নং থেকে পাই, $1+\tan^2A=\sec^2A$

$\therefore \sec A=\sqrt{1+\tan^2A}$ এবং $\tan A=\sqrt{\sec^2A-1}$

কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^o \leq A < 90^o$

(III) নং থেকে পাই, $1+\cot^2A=\text{cosec}^2A$

$\therefore \text{cosec}A=\sqrt{1+\cot^2A}$ এবং $\cot A=\sqrt{\text{cosec}^2A-1}$

কেবলমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হলো, যেহেতু $0^o < A \leq 90^o$

**প্রয়োগ : 22.** $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ হলে, $\sin\theta = 0.5$ এবং $\cos\theta = 0.6$ হওয়া সম্ভব কিনা যুক্তিসহ লিখি।

$\sin\theta = 0.5 \qquad \therefore \sin^2\theta = 0.25$

$\cos\theta = 0.6 \qquad \therefore \cos^2\theta = 0.36$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 0.25 + 0.36 = 0.61$

কিন্তু $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ হলে $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

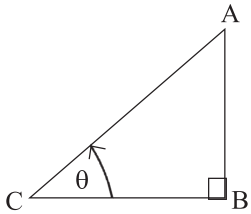
$\therefore$ $\sin\theta = 0.5$ এবং $\cos\theta = 0.6$ হওয়া সম্ভব নয়।

**প্রয়োগ : 23.** $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ হলে, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\cos\theta = \frac{1}{3}$ হওয়া সম্ভব কিনা যুক্তিসহ লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 24.** $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হলে, দেখাই যে, $\sin\theta + \cos\theta > 1$

ধরি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ।

ধরি, $\angle BCA = \theta$ [যেখানে $0^\circ < \theta < 90^\circ$]




$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$ এবং $\cos\theta = \frac{BC}{AC}$

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = \frac{AB+BC}{AC}$

কিন্তু ABC ত্রিভুজে, $AB+BC > AC$ সুতরাং, $\frac{AB+BC}{AC} > 1$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta > 1$

(i) $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ (a) যদি লম্ব > ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} > 1$

(b) আবার যদি লম্ব < ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} < 1$ হয়,

(c) যখন লম্ব = ভূমি হয়, তাহলে $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = 1$ হয়।

তাই $\tan\theta$-এর মান 1-এর বেশি, 1-এর কম এবং 1-এর সমান হতে পারে।

**$\tan\theta = \sqrt{2}$ হওয়া সম্ভব কি?**

যেহেতু $\sqrt{2} > 1$, তাই, $\tan\theta = \sqrt{2}$ হতে পারে।

(ii) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$ যেহেতু, অতিভুজ > লম্ব, সুতরাং, $\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} > 1$

**$\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$ হওয়া সম্ভব কি?**

যেহেতু, $\sqrt{3} > 1$ সুতরাং $\operatorname{cosec}\theta$-এর মান $\sqrt{3}$ হওয়া সম্ভব।

**প্রয়োগ : 25.** আমি $\cot\theta$ ও $\sec\theta$ কে, $\sin\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

সুতরাং, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

**প্রয়োগ : 26.** আমি $\cot\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$ কে, $\cos\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 27.** যদি $\tan\theta = \frac{8}{15}$ হয়, তাহলে $\sin\theta$ -এর মান কী হবে হিসাব করে লিখি।

$$\tan\theta = \frac{8}{15}$$

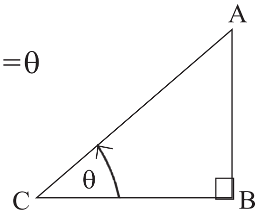
আমরা জানি, $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+\left(\frac{8}{15}\right)^2 = 1+\frac{64}{225} = \frac{289}{225}$

$$\therefore \sec\theta = \frac{17}{15}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{15}{17}$$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{289-225}{289}} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}$$

**অন্যভাবে পাই,** $\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{17}{15}} = \frac{8}{17}$




**বিকল্প প্রমাণ :** ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B$ সমকোণ। ধরি, $\angle ACB=\theta$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{8}{15}$$

ধরি, AB=8k একক এবং BC=15k একক (যেখানে $k > 0$)

ABC ত্রিভুজে, $AC^2=AB^2+BC^2 = (8k \text{ একক})^2+(15k \text{ একক})^2$

$= 64k^2$ বর্গএকক $+225k^2$ বর্গএকক $= 289k^2$ বর্গএকক

$\therefore$ AC=17k একক

$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{8k}{17k} \quad \therefore \sin\theta = \frac{8}{17}$

**প্রয়োগ : 28.** যদি $\tan\theta = \frac{4}{3}$ হয়, তাহলে $(\sin\theta+\cos\theta)$-এর মান হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

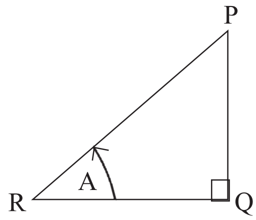
**প্রয়োগ : 29.** $\sin A = \frac{p}{q}$ হলে, tanA, cotA ও secA-এর প্রত্যেকটি কত হবে নির্ণয় করি।

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{\frac{p}{q}}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}} = \frac{\frac{p}{q}}{\sqrt{\frac{q^2-p^2}{q^2}}} = \frac{p}{q}\times\frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}}{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}\times\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}} = \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

**বিকল্প প্রমাণ :** PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle Q$ সমকোণ।




ধরি, $\angle PRQ = A$

$\sin A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{p}{q}$

ধরি, $PQ = pk$ একক এবং $PR=qk$ একক, যেখানে $k > 0$,

PQR ত্রিভুজে, $QR^2 = PR^2 - PQ^2 = q^2k^2 - p^2k^2 = k^2(q^2-p^2)$

$\therefore QR = k\sqrt{q^2-p^2}$

$\tan A = \frac{PQ}{QR} = \frac{pk}{k\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$

$\sec A = \frac{PR}{QR} = \frac{qk}{k\sqrt{q^2-p^2}} = \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$

$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{p}$

**প্রয়োগ : 30.** যদি $\cot\theta = \frac{x}{y}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $\frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

বামপক্ষ $= \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta}$

$= \frac{\frac{x\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{y\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{x\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{y\sin\theta}{\sin\theta}}$ [লব ও হরকে $\sin\theta$ দিয়ে ভাগ করে পাই]

$= \frac{x\cot\theta - y}{x\cot\theta + y} = \frac{x\times\frac{x}{y} - y}{x\times\frac{x}{y} + y} = \frac{\frac{x^2-y^2}{y}}{\frac{x^2+y^2}{y}} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ = ডানপক্ষ

**বিকল্প পদ্ধতি : (I)** $\cot\theta = \frac{x}{y}$ বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$

$\therefore \frac{\cos\theta}{x} = \frac{\sin\theta}{y} = k$ (ধরি) যেখানে $k>0$

$\therefore \cos\theta = xk$ এবং $\sin\theta = yk$

$\therefore \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{x\times xk - y\times yk}{x\times xk + y\times yk} = \frac{k(x^2-y^2)}{k(x^2+y^2)} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

> **মনে রাখতে হবে :** $\cot\theta = \frac{x}{y}$ থেকে $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$ পাই,
> কিন্তু $\cos\theta = x$ এবং $\sin\theta = y$ লেখা ভুল। $\cos\theta = xk$ এবং $\sin\theta = yk$ নিতে পারি, যেখানে $k > 0$.

**বিকল্প পদ্ধতি : (II)** $\cot\theta = \frac{x}{y}$ বা, $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{x\cos\theta}{y\sin\theta} = \frac{x^2}{y^2}$ (উভয়পক্ষে $\frac{x}{y}$ দ্বারা গুণ করে পাই)

বা, $\frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{x\cos\theta - y\sin\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ (যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই)

$\therefore \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{x\cos\theta + y\sin\theta} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

**প্রয়োগ : 31.** যদি $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$ এবং $\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$ হয়, তাহলে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$-এর মান নির্ণয় করি।

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{7}{5}-\sin\theta$ ——— (i)

$\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$, সমীকরণে $\cos\theta=\frac{7}{5}-\sin\theta$ বসিয়ে পাই,

$\sin\theta\times\left(\frac{7}{5}-\sin\theta\right)=\frac{12}{25}$

বা, $\frac{7\sin\theta}{5}-\sin^2\theta=\frac{12}{25}$

বা, $7\sin\theta-5\sin^2\theta=\frac{12}{5}$

বা, $35\sin\theta-25\sin^2\theta=12$

বা, $25\sin^2\theta-35\sin\theta+12=0$

বা, $25\sin^2\theta-20\sin\theta-15\sin\theta+12=0$

বা, $5\sin\theta(5\sin\theta-4)-3(5\sin\theta-4)=0$

বা, $(5\sin\theta-4)(5\sin\theta-3)=0$ [উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পেলাম]

হয়, $5\sin\theta-4=0\quad\therefore\sin\theta=\frac{4}{5}$

অথবা, $5\sin\theta-3=0\quad\therefore\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\sin\theta=\frac{4}{5}$ হলে, $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

আবার, $\sin\theta=\frac{3}{5}$ হলে, $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \left.\begin{aligned}\sin\theta&=\frac{4}{5}\\ \cos\theta&=\frac{3}{5}\end{aligned}\right\}$ অথবা $\begin{aligned}\sin\theta&=\frac{3}{5}\\ \cos\theta&=\frac{4}{5}\end{aligned}$

**বিকল্প প্রমাণ :** $(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$

$=\left(\frac{7}{5}\right)^2-4\times\frac{12}{25}=\frac{49}{25}-\frac{48}{25}=\frac{1}{25}$

$\therefore\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{1}{5}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$

যোগ করে পাই, $2\sin\theta=\frac{8}{5}$

$\therefore\sin\theta=\frac{4}{5}$ এবং $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

আবার, $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$

$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{5}$

$2\sin\theta=\frac{6}{5}$

$\therefore\sin\theta=\frac{3}{5}$ এবং $\cos\theta=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{4}{5},\ \cos\theta=\frac{3}{5}$ অথবা, $\sin\theta=\frac{3}{5},\ \cos\theta=\frac{4}{5}$

**প্রয়োগ : 32.** $1+2\sin\theta\cos\theta$ -কে পূর্ণবর্গ রাশি হিসাবে প্রকাশ করি।

$$1+2\sin\theta\cos\theta = \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta \quad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$$
$$= (\sin\theta+\cos\theta)^2$$

**প্রয়োগ : 33.** $\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta} = 2\frac{51}{79}$ হলে, $\sin\theta$ -এর মান নির্ণয় করি।

$$\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta-\tan\theta} = 2\frac{51}{79} = \frac{209}{79}$$

বা, $\frac{\sec\theta+\tan\theta+\sec\theta-\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta-\sec\theta+\tan\theta} = \frac{209+79}{209-79}$ (যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই)

বা, $\frac{2\sec\theta}{2\tan\theta} = \frac{288}{130}$

বা, $\frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{130}{288} = \frac{65}{144}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \cos\theta = \frac{65}{144}$

$\therefore \sin\theta = \frac{65}{144}$

**প্রয়োগ : 34.** $\frac{5\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta}{5\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta} = \frac{7}{3}$ হলে, $\cos\theta$-এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 35.** $x=a\cos\theta$ এবং $y=b\sin\theta$ হলে, সম্পর্ক দুটি থেকে $\theta$ অপনয়ন করি ও কী পাই দেখি।

$x=a\cos\theta \quad \therefore \cos\theta = \frac{x}{a}$

আবার, $y=b\sin\theta \quad \therefore \sin\theta = \frac{y}{b}$

যেহেতু, $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

$\therefore \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$

সুতরাং, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

**প্রয়োগ : 36.** $2x=3\sin\theta$ এবং $5y=3\cos\theta$ সম্পর্ক দুটি থেকে $\theta$ অপনয়ন করে $x$ ও $y$ -এর সম্পর্ক লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 37.** $x\cos\theta=3$ এবং $4\tan\theta=y$ সম্পর্ক দুটি থেকে $\theta$ অপনয়ন করি ও $x$ এবং $y$ -এর সম্পর্ক লিখি।

$x\cos\theta=3$ বা, $\cos\theta = \frac{3}{x} \quad \therefore \sec\theta = \frac{x}{3}$

$4\tan\theta=y \quad \therefore \tan\theta = \frac{y}{4}$

যেহেতু, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

সুতরাং, $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$

$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

**প্রয়োগ : 38.** $x=a\sec\theta, y=b\tan\theta$ সম্পর্ক দুটি থেকে $\theta$ অপনয়ন করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 39.** $x=a\cos\theta+b\sin\theta$, $y=b\cos\theta-a\sin\theta$ হলে, সম্পর্ক দুটি থেকে θ অপনয়ন করি।

$$x^2+y^2 = (a\cos\theta+b\sin\theta)^2+(b\cos\theta-a\sin\theta)^2$$
$$= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta + b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta$$
$$= a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$= a^2+b^2 \quad [\because \sin^2\theta+\sin^2\theta=1]$$

$$\therefore x^2+y^2 = a^2+b^2$$

**প্রয়োগ : 40.** যদি $\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta=2$ হয়, তাহলে $(\sin^{10}\theta+\operatorname{cosec}^{10}\theta)$-এর মান নির্ণয় করি।

$\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta=2$

বা, $\sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}=2$

বা, $\dfrac{\sin^2\theta+1}{\sin\theta}=2$

বা, $\sin^2\theta+1=2\sin\theta$

বা, $\sin^2\theta-2\sin\theta+1=0$

বা, $(\sin\theta-1)^2=0$

বা, $\sin\theta-1=0$

$\therefore$ $\sin\theta=1$

সুতরাং, $\operatorname{cosec}\theta=1$

$$\sin^{10}\theta+\operatorname{cosec}^{10}\theta = (1)^{10}+(1)^{10}$$
$$= 1+1$$
$$= 2$$

**প্রয়োগ : 41.** যদি $\cos\theta+\sec\theta=2$ হয়, তাহলে $(\cos^{11}\theta+\sec^{11}\theta)$-এর মান নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 42.** যদি $0^\circ<\alpha\leq 90^\circ$ হয়, তাহলে $(4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha)$ -এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করি।

$4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha$

$= (2\operatorname{cosec}\alpha)^2+(3\sin\alpha)^2$

$= (2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2+2\times2\operatorname{cosec}\alpha\times3\sin\alpha$

$= (2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2+12\times\dfrac{1}{\sin\alpha}\times\sin\alpha$

$= (2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2+12$

যে-কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যামালার সর্বনিম্ন মান 0 (শূন্য)। সুতরাং $(2\operatorname{cosec}\alpha-3\sin\alpha)^2$-এর ন্যূনতম মান শূন্য।

$\therefore$ $(4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha)$-এর সর্বনিম্ন মান 12

$$4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha = (2\operatorname{cosec}\alpha+3\sin\alpha)^2-2\times2\operatorname{cosec}\alpha\times3\sin\alpha$$
$$= (2\operatorname{cosec}\alpha+3\sin\alpha)^2-12$$

$(2\operatorname{cosec}\alpha+3\sin\alpha)^2$-এর ন্যূনতম মান 0 (শূন্য)। সুতরাং $(4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha)$-এর ন্যূনতম মান $-12$

তাহলে কোনটি ন্যূনতম মান হবে?

দুটি বর্গ সংখ্যামালার সমষ্টি ঋণাত্মক হতে পারে না। তাই $(4\operatorname{cosec}^2\alpha+9\sin^2\alpha)$ -এর মান 12।

## কষে দেখি 23.3

1. (i) $\sin\theta=\frac{4}{5}$ হলে, $\frac{\text{cosec}\theta}{1+\cot\theta}$ -এর মান নির্ণয় করে লিখি।

   (ii) যদি $\tan\theta=\frac{3}{4}$ হয়, তবে দেখাই যে $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{2}$

   (iii) $\tan\theta=1$ হলে, $\frac{8\sin\theta+5\cos\theta}{\sin^3\theta-2\cos^3\theta+7\cos\theta}$ -এর মান নির্ণয় করি।

2. (i) $\text{cosec}\theta$ এবং $\tan\theta$-কে $\sin\theta$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করি।

   (ii) $\text{cosec}\theta$ এবং $\tan\theta$-কে $\cos\theta$-এর মাধ্যমে লিখি।

3. (i) $\sec\theta+\tan\theta=2$ হলে, $(\sec\theta-\tan\theta)$-এর মান নির্ণয় করি।

   (ii) $\text{cosec}\theta-\cot\theta=\sqrt{2}-1$ হলে, $(\text{cosec}\theta+\cot\theta)$-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (iii) $\sin\theta+\cos\theta=1$ হলে, $\sin\theta\times\cos\theta$ -এর মান নির্ণয় করি।

   (iv) $\tan\theta+\cot\theta=2$ হলে, $(\tan\theta-\cot\theta)$-এর মান নির্ণয় করি।

   (v) $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{13}$ হলে, $\sin\theta+\cos\theta$ -এর মান নির্ণয় করি।

   (vi) $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$ হলে, $(\sin\theta+\cos\theta)$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

   (vii) $\sec\theta-\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sec\theta$ এবং $\tan\theta$ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

   (viii) $\text{cosec}\theta+\cot\theta=\sqrt{3}$ হলে, $\text{cosec}\theta$ এবং $\cot\theta$ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

   (ix) $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=7$ হলে, $\tan\theta$-এর মান হিসাব করে লিখি।

   (x) $\frac{\text{cosec}\theta+\sin\theta}{\text{cosec}\theta-\sin\theta}=\frac{5}{2}$ হলে, $\sin\theta$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

   (xi) $\sec\theta+\cos\theta=\frac{5}{2}$ হলে, $(\sec\theta-\cos\theta)$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

   (xii) $5\sin^2\theta+4\cos^2\theta=\frac{9}{2}$ সম্পর্কটি থেকে $\tan\theta$-এর মান নির্ণয় করি।

   (xiii) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=\frac{10}{3}$ হলে, $\tan\theta+\cot\theta$ এবং $\tan\theta-\cot\theta$ -এর মান নির্ণয় করি এবং সেখান থেকে $\tan\theta$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

   (xiv) $\sec^2\theta+\tan^2\theta=\frac{13}{12}$ হলে, $(\sec^4\theta-\tan^4\theta)$-এর মান হিসাব করে লিখি।

4. (i) PQR ত্রিভুজে $\angle Q$ সমকোণ। $PR=\sqrt{5}$ একক এবং $PQ-RQ=1$ একক হলে, $\cos P-\cos R$-এর মান নির্ণয় করি।

   (ii) XYZ ত্রিভুজে $\angle Y$ সমকোণ। $XY=2\sqrt{3}$ একক এবং $XZ-YZ=2$ একক হলে, $(\sec X-\tan X)$-এর মান নির্ণয় করি।

5. সম্পর্কগুলি থেকে '$\theta$' অপনয়ন করি :

   (i) $x=2\sin\theta,\ y=3\cos\theta$ (ii) $5x=3\sec\theta,\ y=3\tan\theta$

6. (i) যদি $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ হয়, তাহলে দেখাই যে $\tan\alpha+\sec\alpha=1.5$

   (ii) যদি $\tan A=\frac{n}{m}$ হয়, তাহলে $\sin A$ ও $\sec A$ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

(iii) যদি $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $x\sin\theta = y\cos\theta$

(iv) যদি $\sin\alpha = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\cot\alpha = \frac{2ab}{a^2-b^2}$

(v) যদি $\frac{\sin\theta}{x} = \frac{\cos\theta}{y}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\sin\theta - \cos\theta = \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(vi) যদি $(1+4x^2)\cos A = 4x$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\operatorname{cosec}A + \cot A = \frac{1+2x}{1-2x}$

7. যদি $x = a\sin\theta$ এবং $y = b\tan\theta$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$

8. যদি $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

9. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) যদি $3x = \operatorname{cosec}\alpha$ এবং $\frac{3}{x} = \cot\alpha$ হয়, তাহলে $3(x^2 - \frac{1}{x^2})$-এর মান (a) $\frac{1}{27}$ (b) $\frac{1}{81}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{9}$

(ii) যদি $2x = \sec A$ এবং $\frac{2}{x} = \tan A$ হয়, তাহলে $2(x^2 - \frac{1}{x^2})$-এর মান (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{16}$

(iii) $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$ হলে, $(\tan^{13}\alpha + \cot^{13}\alpha)$-এর মান (a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) কোনটিই নয়

(iv) যদি $\sin\theta - \cos\theta = 0$ $(0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ এবং $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = x$ হয়, তাহলে x-এর মান
(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

(v) $2\cos 3\theta = 1$ হলে, $\theta$-এর মান (a) $10^\circ$ (b) $15^\circ$ (c) $20^\circ$ (d) $30^\circ$

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) যদি, $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ হয়, তাহলে $(\sec^2\alpha + \cos^2\alpha)$-এর সর্বনিম্ন মান 2

(ii) $(\cos 0^\circ \times \cos 1^\circ \times \cos 2^\circ \times \cos 3^\circ \times$............. $\cos 90^\circ)$ -এর মান 1

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $\left(\frac{4}{\sec^2\theta} + \frac{1}{1+\cot^2\theta} + 3\sin^2\theta\right)$ -এর মান _________

(ii) $\sin(\theta - 30^\circ) = \frac{1}{2}$ হলে, $\cos\theta$ -এর মান _________

(iii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\cos^4\theta - \sin^4\theta$ -এর মান _________

10. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) যদি $r\cos\theta = 2\sqrt{3}$, $r\sin\theta = 2$ এবং $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হয়, তাহলে r এবং $\theta$ উভয়ের মান নির্ণয় করি।

(ii) যদি $\sin A + \sin B = 2$ হয়, যেখানে $0^\circ \leq A \leq 90^\circ$ এবং $0^\circ \leq B \leq 90^\circ$, তাহলে $(\cos A + \cos B)$-এর মান নির্ণয় করি।

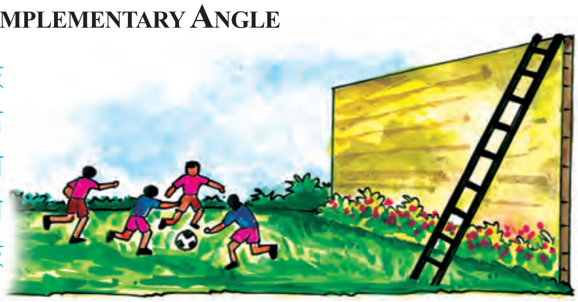
(iii) যদি $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হয়, তাহলে $(9\tan^2\theta + 4\cot^2\theta)$-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করি।

(iv) $(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$-এর মান নির্ণয় করি।

(v) যদি $\operatorname{cosec}^2\theta = 2\cot\theta$ এবং $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হয়, তাহলে $\theta$ -এর মান নির্ণয় করি।

# 24 পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
## TRIGONOMETRIC RATIOS OF COMPLEMENTARY ANGLE

আমরা যে বড়ো মাঠে রোজ খেলা করি, তার পাশেই রামুদের বাগান বাড়ি। প্রায়ই আমাদের খেলার বল ওদের বাগানে পড়ে যায়। আজ আমরা ওদের বাগানের পাঁচিলের দেয়ালে হেলান দিয়ে একটি মই রেখে দিয়েছি। আমরা ঠিক করেছি বাগানে বল পড়লে ওই মই-এর সাহায্যে বাগানে গিয়ে বল আনতে পারব।



(1) কিন্তু দেখছি মইটি ওইভাবে রাখায় মই, ভূমি ও বাগানের পাঁচিলের ধার সমকোণী ত্রিভুজ আকারে আছে। এই সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণগুলির মধ্যে সম্পর্ক লিখি।

ধরি, পাশের ছবির AB পাঁচিল BC ভূমির উপর লম্ব এবং AC মই-এর দৈর্ঘ্য; AC , BC-এর সঙ্গে $\theta$ কোণ করে আছে।

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি হয়েছে যার $\angle ABC=90^\circ$ এবং $\angle BCA=\theta$

(2) কিন্তু $\angle CAB$-এর মান কত হবে?

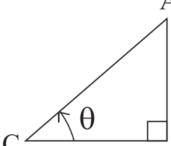
$\angle BCA=\theta$ হলে $\angle CAB=90^\circ-\theta$

বুঝেছি, $\angle BCA$ ও $\angle CAB$ পরস্পর $\square$ [পূরক/সম্পূরক]

$\angle BCA$ ও $\angle CAB$ দুটি পরস্পর পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত কী হবে ছবি এঁকে হিসাব করি।

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B=90^\circ$

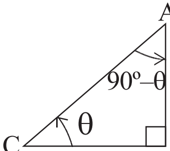
ধরি, $\angle BCA=\theta \quad \therefore \angle CAB=90^\circ-\theta$




$\therefore \sin\theta=\frac{AB}{AC}, \cos\theta=\frac{BC}{AC}, \tan\theta=\frac{\square}{\square}, \operatorname{cosec}\theta=\frac{AC}{AB}, \sec\theta=\frac{\square}{\square}$

এবং $\cot\theta=\frac{BC}{AB}$

(3) আমি সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর $(90^\circ-\theta)$ সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি লিখি।



$\sin(90^\circ-\theta)=\sin\angle CAB=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{BC}{AC}$

$\cos(90^\circ-\theta)=\cos\angle CAB=\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{AB}{AC}$

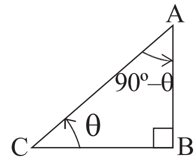
$\tan(90^\circ-\theta)=\tan\angle CAB=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=\frac{\square}{\square}$

$\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\angle CAB=\frac{\square}{\square}=\frac{AC}{BC}$

$\sec(90^\circ-\theta)=\sec\angle CAB=\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$

$\cot(90^\circ-\theta)=\cot\angle CAB=\frac{\square}{\square}=\frac{AB}{BC}$

(4) সমকোণী ত্রিভুজের ∠BCA ও ∠CAB-এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলি তুলনা করে কী পাই লিখি।




দেখছি, $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$ | $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$ | $\cot(90^\circ-\theta)=$ ☐ [নিজে করি]

$\sec(90^\circ-\theta)=\text{cosec}\,\theta$ | $\text{cosec}(90^\circ-\theta)=$ ☐ [নিজে করি]

বুঝেছি, যদি মইটি ভূমির সঙ্গে 60° কোণ করে, অর্থাৎ যদি $\theta=60^\circ$ হয়, $\sin\theta=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

আবার, $\cos(90^\circ-\theta)=\cos(90^\circ-60^\circ)$

$=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ পেলাম, $\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$

যদি $\theta=45^\circ$ হয় $\tan\theta=\cot(90^\circ-\theta)$ [নিজে যাচাই করি]

দেখছি, 0° এবং 90°-এর মধ্যে সকল কোণের জন্য পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের অভেদগুলি সত্য।

(5) কিন্তু $\theta=0^\circ$ এবং $\theta=90^\circ$ হলে কী পাব দেখি।

$\theta=0^\circ$ হলে, $\tan0^\circ=0=\cot(90^\circ-0^\circ)$

এবং $\sec0^\circ=1=\text{cosec}(90^\circ-0^\circ)$

$\theta=90^\circ$ হলে, $\tan 90^\circ$, $\sec 90^\circ$ অসংজ্ঞাত।

এবং $\theta=0^\circ$ হলে, $\cot 0^\circ$, $\text{cosec } 0^\circ$ অসংজ্ঞাত।

**প্রয়োগ : 1.** $\frac{\cos 53^\circ}{\sin 37^\circ}$ -এর মান নির্ণয় করি।

আমরা জানি, $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$

$\cos 53^\circ=\cos(90^\circ-37^\circ)=\sin 37^\circ$

$\therefore \frac{\cos 53^\circ}{\sin 37^\circ}=\frac{\sin 37^\circ}{\sin 37^\circ}=1$

**প্রয়োগ : 2.** $\frac{\sec 49^\circ}{\text{cosec}\,41^\circ}$ -এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 3.** দেখাই যে, $\cos 55^\circ\cos 35^\circ-\sin 55^\circ\sin 35^\circ=0$

$\cos 55^\circ\cos 35^\circ-\sin 55^\circ\sin 35^\circ$

$=\cos(90^\circ-35^\circ)\cos 35^\circ-\sin(90^\circ-35^\circ)\sin 35^\circ$

$=\sin 35^\circ\cos 35^\circ-\cos 35^\circ\sin 35^\circ=0$ (প্রমাণিত)

**প্রয়োগ : 4.** দেখাই যে, $\sin 43^\circ\cos 47^\circ+\cos 43^\circ\sin 47^\circ=1$ [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 5.** প্রমাণ করি যে, $\tan 7^\circ\tan 23^\circ\tan 60^\circ\tan 67^\circ\tan 83^\circ=\sqrt{3}$

$\tan 7^\circ\tan 23^\circ\tan 60^\circ\tan 67^\circ\tan 83^\circ$

$=(\tan 7^\circ\tan 83^\circ)\tan 60^\circ(\tan 23^\circ\tan 67^\circ)$

$=\{\tan 7^\circ\times(\tan(90^\circ-7^\circ)\}\tan 60^\circ\{\tan 23^\circ\times\tan(90^\circ-23^\circ)\}$

$=(\tan 7^\circ\cot 7^\circ)\tan60^\circ(\tan 23^\circ\cot 23^\circ)=1\times\sqrt{3}\times1$ $(\because \tan\theta\times\cot\theta=1)$

$=\sqrt{3}$ (প্রমাণিত)

**প্রয়োগ : 6.** দেখাই যে, $\sin^2 21^\circ+\sin^2 69^\circ=1$

$\sin 69^\circ=\sin(90^\circ-21^\circ)=\cos 21^\circ$

$\therefore \sin^2 21^\circ+\sin^2 69^\circ=\sin^2 21^\circ+\cos^2 21^\circ=1$ $[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$

**প্রয়োগ : 7.** দেখাই যে, $\tan 15^\circ + \tan 75^\circ = \dfrac{\sec^2 15^0}{\sqrt{\sec^2 15^0 - 1}}$

$\tan 15^\circ + \tan 75^\circ$

$= \tan 15^\circ + \tan(90^\circ - 15^\circ)$

$= \tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \tan 15^\circ + \dfrac{1}{\tan 15^\circ}$

$= \dfrac{\tan^2 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ} = \dfrac{\sec^2 15^\circ}{\sqrt{\sec^2 15^\circ - 1}}$ $[\because \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$ এবং $\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}]$ (প্রমাণিত)

**প্রয়োগ : 8.** A ও B দুটি পরস্পর পূরক কোণ হলে, দেখাই যে, $(\sin A + \sin B)^2 = 1 + 2\sin A \sin B$

A ও B দুটি পরস্পর পূরক কোণ।

সুতরাং, $A + B = 90^\circ$

$\therefore B = 90^\circ - A$

$\sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A$

$(\sin A + \sin B)^2$

$= (\sin A + \cos A)^2$

$= \sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A \cos A$

$= 1 + 2\sin A \cos A$

$= 1 + 2\sin A \cos(90^\circ - B)$

$= 1 + 2\sin A \sin B$ (প্রমাণিত)

**প্রয়োগ : 9.** যদি $\sec\theta = \operatorname{cosec}\varphi$ হয় এবং $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ তাহলে $\sin(\theta + \varphi)$-এর মান নির্ণয় করি।

$\sec\theta = \operatorname{cosec}\varphi$

বা, $\sec\theta = \sec(90^\circ - \varphi)$

বা, $\theta = 90^\circ - \varphi$ $\therefore \theta + \varphi = 90^\circ$ $\therefore \sin(\theta + \varphi) = \sin 90^\circ = 1$

**প্রয়োগ : 10.** যদি $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$ হয়, যেখানে 2A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, তাহলে A-এর মান নির্ণয় করি।

$\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$

বা, $\cot(90^\circ - 2A) = \cot(A - 18^\circ)$ $[\because \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta]$

বা, $90^\circ - 2A = A - 18^\circ$

বা, $-2A - A = -90^\circ - 18^\circ$

বা, $-3A = -108^\circ$ $\therefore A = 36^\circ$

**প্রয়োগ : 11.** যদি $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$ হয়, যেখানে 4A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, তাহলে A-এর মান নির্ণয় করি।

$\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$

বা, $\operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$ $[\because \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta]$

বা, $90^\circ - 4A = A - 20^\circ$

বা, $-4A - A = -20^\circ - 90^\circ$

বা, $-5A = -110^\circ$ $\therefore A = 22^\circ$

**প্রয়োগ : 12.** $\cos 43^\circ = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ হলে, $\tan 47^\circ$ -এর মান হিসাব করে লিখি।

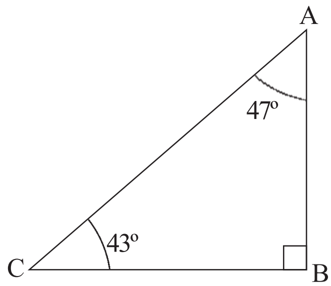
$\cos 43^\circ = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\sin^2 43^\circ = 1 - \cos^2 43^\circ = 1 - \dfrac{x^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-x^2}{x^2+y^2} = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

$\therefore \sin 43^\circ = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [যেহেতু 43° ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, সুতরাং sin 43°-এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না]

$$\therefore \tan 47^\circ = \tan(90^\circ - 43^\circ) = \cot 43^\circ = \frac{\cos 43^\circ}{\sin 43^\circ} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} = \frac{x}{y}$$

**বিকল্প পদ্ধতি :**




ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B = 90^\circ$

ধরি, $\angle BCA = 43^\circ$; সুতরাং, $\angle CAB = 90^\circ - 43^\circ = 47^\circ$

$$\cos 43^\circ = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{BC}{AC}$$

ধরি, $BC = kx$ একক এবং $AC = k\sqrt{x^2-y^2}$ একক। যেখানে $k > 0$.

সমকোণী $\Delta ABC$-তে, $AB^2 = AC^2 - BC^2 = (k\sqrt{x^2+y^2}\text{ একক})^2 - (kx\text{ একক})^2$

$= (k^2x^2 + k^2y^2 - k^2x^2)$ বর্গ একক $= k^2y^2$ বর্গ একক

$\therefore AB = ky$ একক

$$\therefore \tan 47^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{kx}{ky} = \frac{x}{y}$$

**প্রয়োগ : 13.** $\tan 50^\circ = \frac{p}{q}$ হলে, $\cos 40^\circ$ -এর মান নির্ণয় করি। [নিজে করি]

## কষে দেখি 24

1. মান নির্ণয় করি : (i) $\frac{\sin 38^\circ}{\cos 52^\circ}$ (ii) $\frac{\operatorname{cosec} 79^\circ}{\sec 11^\circ}$ (iii) $\frac{\tan 27^\circ}{\cot 63^\circ}$

2. দেখাই যে : (i) $\sin 66^\circ - \cos 24^\circ = 0$ (ii) $\cos^2 57^\circ + \cos^2 33^\circ = 1$
(iii) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 15^\circ = 0$ (iv) $\operatorname{cosec}^2 48^\circ - \tan^2 42^\circ = 1$
(v) $\sec 70^\circ \sin 20^\circ + \cos 20^\circ \operatorname{cosec} 70^\circ = 2$

3. যদি $\alpha$ ও $\beta$ কোণ দুটি পরস্পর পূরক কোণ হয়, তাহলে দেখাই যে,
(i) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$ (ii) $\cot\beta + \cos\beta = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(1 + \sin\beta)$ (iii) $\frac{\sec\alpha}{\cos\alpha} - \cot^2\beta = 1$

4. যদি $\sin 17^\circ = \frac{x}{y}$ হয়, তাহলে দেখাই যে, $\sec 17^\circ - \sin 73^\circ = \frac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^2}}$

5. দেখাই যে, $\sec^2 12^\circ - \frac{1}{\tan^2 78^\circ} = 1$

6. $\angle A + \angle B = 90^\circ$ হলে, দেখাই যে, $1 + \frac{\tan A}{\tan B} = \sec^2 A$

7. দেখাই যে, $\operatorname{cosec}^2 22^\circ \cot^2 68^\circ = \sin^2 22^\circ + \sin^2 68^\circ + \cot^2 68^\circ$

8. যদি $\angle P + \angle Q = 90^\circ$ হয়, তবে দেখাই যে, $\sqrt{\frac{\sin P}{\cos Q} - \sin P \cos Q} = \cos P$

9. প্রমাণ করি যে, $\cot 12^\circ \cot 38^\circ \cot 52^\circ \cot 78^\circ \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10. O কেন্দ্রীয় যে-কোনো একটি বৃত্তের AOB একটি ব্যাস এবং বৃত্তের উপর C যে-কোনো একটি বিন্দু। এবার A, C; B, C এবং O, C যুক্ত করে দেখাই যে,
(i) $\tan\angle ABC = \cot\angle ACO$ (ii) $\sin^2\angle BCO + \sin^2\angle ACO = 1$
(iii) $\operatorname{cosec}^2\angle CAB - 1 = \tan^2\angle ABC$

11. ABCD একটি আয়তাকার চিত্র। A, C যুক্ত করে প্রমাণ করি যে,
(i) $\tan\angle ACD = \cot\angle ACB$ (ii) $\tan^2\angle CAD + 1 = \frac{1}{\sin^2\angle BAC}$

12. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) $(\sin 43^\circ \cos 47^\circ + \cos 43^\circ \sin 47^\circ)$ -এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) $\sin 4^\circ$ (d) $\cos 4^\circ$

(ii) $\left(\frac{\tan 35^\circ}{\cot 55^\circ} + \frac{\cot 78^\circ}{\tan 12^\circ}\right)$ -এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) কোনোটিই নয়

(iii) $\{\cos(40^\circ+\theta) - \sin(50^\circ-\theta)\}$-এর মান

(a) $2\cos\theta$ (b) $7\sin\theta$ (c) 0 (d) 1

(iv) ABC একটি ত্রিভুজ। $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) =$

(a) $\sin\frac{A}{2}$ (b) $\cos\frac{A}{2}$ (c) $\sin A$ (d) $\cos A$

(v) $A+B=90^\circ$ এবং $\tan A = \frac{3}{4}$ হলে, cot B-এর মান

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{5}$

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $\cos 54^\circ$ এবং $\sin 36^\circ$ -এর মান সমান।

(ii) $(\sin 12^\circ - \cos 78^\circ)$ -এর সরলতম মান 1.

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) $(\tan 15^\circ \times \tan 45^\circ \times \tan 60^\circ \times \tan 75^\circ)$-এর মান __________

(ii) $(\sin 12^\circ \times \cos 18^\circ \times \sec 78^\circ \times \operatorname{cosec} 72^\circ)$-এর মান __________

(iii) A এবং B পরস্পর পূরক কোণ হলে, $\sin A =$ __________

13. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.) :**

(i) $\sin 10\theta = \cos 8\theta$ এবং $10\theta$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, $\tan 9\theta$-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $\tan 4\theta \times \tan 6\theta = 1$ এবং $6\theta$ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, $\theta$-এর মান নির্ণয় করি।

(iii) $\frac{2\sin^2 63^\circ + 1 + 2\sin^2 27^\circ}{3\cos^2 17^\circ - 2 + 3\cos^2 73^\circ}$ -এর মান নির্ণয় করি।

(iv) $(\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots \tan 89^\circ)$ -এর মান নির্ণয় করি।

(v) $\sec 5A = \operatorname{cosec}(A+36^\circ)$ এবং 5A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, A-এর মান নির্ণয় করি।

# 25 ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ : উচ্চতা ও দূরত্ব

## APPLICATION OF TRIGONOMETRIC RATIOS : HEIGHTS & DISTANCES

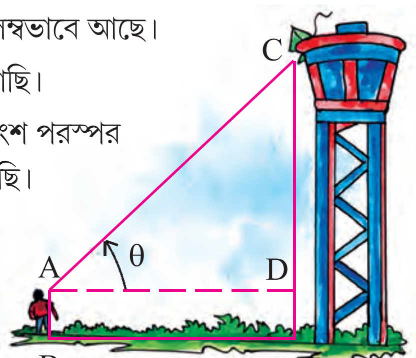
আমরা যে বড়ো মাঠে রোজ বিকালে খেলা করি সেই মাঠের একদিকে রামুদের বাগানবাড়ি। কিছু দূরে ওই এলাকার জলের ট্যাঙ্ক অনেক উঁচু থামের উপর রাখা আছে। আমরা মাঝে মাঝে ওই মাঠে ঘুড়ি ওড়াই। প্রায় প্রতিদিনই সতীশের ঘুড়ি ভূমি থেকে সবচেয়ে উঁচুতে ওঠে এবং ওই উঁচুতে রাখা জলের ট্যাঙ্কের উপরে উঠে যায়।

**1** কিন্তু ওই এলাকার জলের ট্যাঙ্কটি ভূমি থেকে কত উপরে আছে কীভাবে পাব ছবি এঁকে দেখি।

ধরি, CE জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা এবং জলের ট্যাঙ্কটি ভূমিতলে লম্বভাবে আছে।

AB আমার উচ্চতা এবং আমি ভূমিতলে লম্বভাবে দাঁড়িয়ে আছি।

জলের ট্যাঙ্ক থেকে আমি BE দূরত্বে আছি, AD ও BE সরলরেখাংশ পরস্পর সমান্তরাল। আমি জলের ট্যাঙ্কের শীর্ষবিন্দু AC রেখা বরাবর দেখছি।




চিত্র (i)

**2** এই AC রেখাকে কী বলা হয়?

এই AC রেখাকে **দৃষ্টির রেখা [Line of Sight]** বলা হয়।

বুঝেছি, কোনো পর্যবেক্ষক যখন কোনো বস্তু দেখেন পর্যবেক্ষকের চোখ ও ওই বস্তুর ওপর কোনো বিন্দুর সংযোজক রেখাই হলো দৃষ্টির রেখা। [Line of Sight]

দেখছি ট্যাঙ্কের চূড়া দেখার জন্য আমার দৃষ্টিররেখা AC অনুভূমিক রেখা AD-এর সঙ্গে একটি কোণ ($\theta$) করে আছে।

**3** এই $\theta$ কোণটিকে কী বলা হয়?

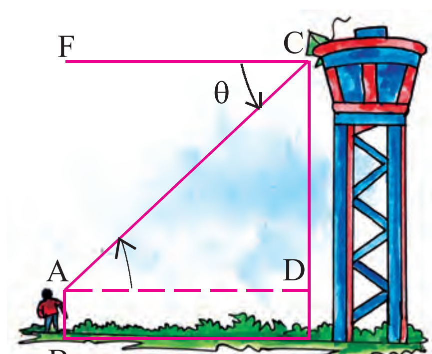
এই কোণকে **উন্নতি কোণ [Angle of Elevation]** বলা হয়।

বুঝেছি, যখন পর্যবেক্ষক ভূমিতে দাঁড়িয়ে ভূমি থেকে উপরে অবস্থিত কোনো বস্তু দেখেন, তখন পর্যবেক্ষকের দৃষ্টির রেখা অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যে কোণ করে থাকে তাকে উন্নতি কোণ বলা হয় এবং উন্নতি কোণের ক্ষেত্রে পর্যবেক্ষকের মাথা উপরের দিকে উঠে থাকে।

**4** কিন্তু আমি যদি ট্যাঙ্কের উপরে C বিন্দুতে থাকতাম এবং সেখান থেকে ভূমিতে AB অবস্থানে দাঁড়ানো আমার বন্ধুর মাথার দিকে তাকাতাম তখন কী ধরনের কোণ পেতাম ছবি এঁকে দেখি।

ধরি, আমার বন্ধু ভূমিতে AB অবস্থানে আছে। আমি জলের ট্যাঙ্কের চূড়ার C বিন্দু থেকে A বিন্দু দেখছি।

সেক্ষেত্রে আমার দৃষ্টি রেখা CA অনুভূমিক রেখার সমান্তরাল রেখা CF-এর সঙ্গে $\theta$ কোণ করে আছে। [$\because \angle DAC=\theta, CF \parallel AD$, সুতরাং একান্তর $\angle DAC = \angle FCA$]

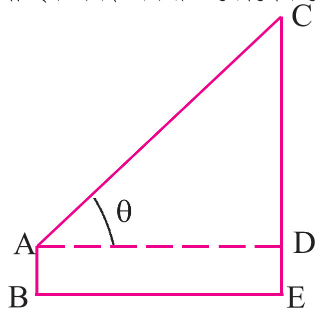



চিত্র (ii)

**5** এইরকম $\theta$ কোণকে কী বলা হয়?

এই কোণকে **অবনতি কোণ [Angle of Depression]** বলা হয়।

বুঝেছি, যখন পর্যবেক্ষক তার অবস্থানের নীচের দিকে অবস্থিত কোনো বস্তু দেখে তখন তার দৃষ্টির রেখা অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যে কোণ করে সেই কোণকে অবনতি কোণ বলা হয় এবং অবনতি কোণের ক্ষেত্রে পর্যবেক্ষকের মাথা নীচু হয়ে থাকে।




**6** চিত্র (i) থেকে জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা কীভাবে পাব দেখি।

জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা CE = CD + DE

= CD + AB

সমকোণী ত্রিভুজ ADC-এর $\angle D = 90^\circ$

উন্নতি কোণ $\angle DAC = \theta$

$\therefore$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে নির্ণয়ের জন্য AC অথবা AD-র মান জানা প্রয়োজন।

**7** যদি $\theta = 30^\circ$ ,অর্থাৎ A বিন্দু থেকে ট্যাঙ্কের চূড়ার উন্নতি কোণ $30^\circ$ এবং AD = 120 মিটার অর্থাৎ জলের ট্যাঙ্ক থেকে আমার দূরত্ব 120 মিটার হয়, তবে জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা কী হবে হিসাব করে লিখি।

সমকোণী ত্রিভুজ ACD-এর ($\angle D = 90^\circ$) ; CD নির্ণয় করতে হবে। এক্ষেত্রে এমন একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নেব যেখানে CD ও AD আছে।

সমকোণী ত্রিভুজ ACD-তে, $\tan\theta = \frac{CD}{AD}$ বা, $\tan 30^\circ = \frac{CD}{120 \text{ মি.}}$

বা, $\frac{CD}{120 \text{ মি.}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore CD = \frac{120 \text{ মি.}}{\sqrt{3}} = \frac{40\times3 \text{ মি.}}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$ মি.

$\therefore$ সেক্ষেত্রে ট্যাঙ্কের উচ্চতা = [$40\sqrt{3}$ মিটার + আমার উচ্চতা (AB)]

কোনো উচ্চতা নির্ণয়ের জন্য আমরা কী কী করলাম লিখি।

(i) আমার অবস্থান থেকে যার উচ্চতা নির্ণয় করব তার দূরত্ব নির্ণয় করলাম।

(ii) যার উচ্চতা নির্ণয় করব তার শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ নির্ণয় করলাম।

(iii) এবার ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে উচ্চতা নির্ণয় করলাম।

**8** কিন্তু যদি $\theta = 30^\circ$ এবং AC = 150 মিটার হয়, তবে উচ্চতা কী হবে নির্ণয় করি।

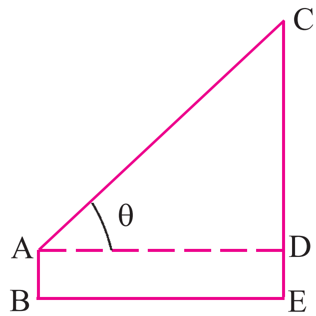
সমকোণী ত্রিভুজ ACD-এর $\angle D = 90^\circ$ ; CD নির্ণয় করতে হবে।

এমন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নেব যেখানে CD ও AC আছে,

সমকোণী $\Delta ACD$-তে; $\sin 30^\circ = \frac{CD}{AC}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{CD}{150 \text{ মি.}}$

বা, $CD = \frac{150 \text{ মি.}}{2} = 75$ মি.




$\therefore$ সেক্ষেত্রে জলের ট্যাঙ্কের উচ্চতা = [75 মিটার + AB]

**মনে রাখতে হবে :** বিশেষভাবে কিছু বলা না থাকলে এই ধরনের সমস্যায় যে ব্যক্তির সাপেক্ষে উন্নতি বা অবনতি কোণ সংক্রান্ত তথ্য দেওয়া থাকবে, ওই ব্যক্তির উচ্চতাকে অগ্রাহ্য করে ছবি আঁকতে হবে। অর্থাৎ এই সমস্যাগুলিতে ব্যক্তিকে একটি বিন্দু হিসাব ধরে নিতে হবে। গাছ, স্তম্ভ, লাইট-পোস্ট ইত্যাদি ভূমিতলের উপর লম্বভাবে আছে ধরে নিতে হবে।

**প্রয়োগ : 1.** রীতাদের পুকুরের পাড়ে একটি নারকেল গাছ আছে। পুকুরের পাড় ধরে 12 মিটার দূরে একটি বিন্দুর সাপেক্ষে ওই গাছের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ $60^o$ হলে, রীতাদের পুকুর পাড়ের ওই নারকেল গাছটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি। [$\sqrt{3}=1.732$ (প্রায়)]

ধরি, AB নারকেল গাছের উচ্চতা যা ভূমিতলের উপর লম্বভাবে আছে। B বিন্দু থেকে পুকুরের পাড় ধরে C বিন্দুতে গিয়ে C বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর উন্নতি কোণ $60^o$ হয়েছে।

A ও C বিন্দুদ্বয় যুক্ত করে ABC সমকোণী ত্রিভুজ পেয়েছি যার $\angle B=90^o$ এবং $\angle ACB=60^o$

$\therefore$ $\angle ACB$-এর পরিপ্রেক্ষিতে ভূমি BC=12 মিটার। সমকোণী $\Delta ABC$-তে, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে পাই,

$$\tan\angle ACB=\tan 60^o=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{12\text{ মি.}}$$

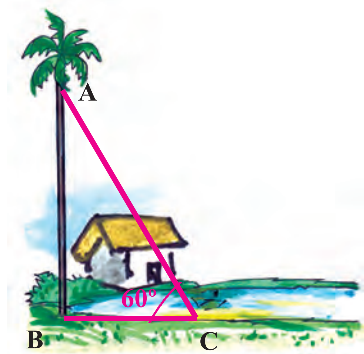
বা, $\tan 60^o=\dfrac{AB}{12\text{ মি.}}$

বা, $\sqrt{3}=\dfrac{AB}{12\text{ মি.}}$

বা, $AB=12\sqrt{3}$ মি. $=12\times1.732$ মি. (প্রায়)

$=20.784$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ নারকেল গাছটির উচ্চতা $=20.784$ মিটার (প্রায়)।




**প্রয়োগ : 2.** যদি একটি নারকেল গাছের গোড়া থেকে অনুভূমিক তলে 20 মিটার দূরের একটি বিন্দুর সাপেক্ষে গাছটির অগ্রভাগের উন্নতি কোণ $60^o$ হয়, তবে গাছটির উচ্চতা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 3.** গতকাল ঝড়ে একটি লাইটপোস্ট মচকে গিয়ে তার অগ্রভাগ পাদবিন্দু থেকে 4 মিটার দূরে ভূমি স্পর্শ করেছে এবং অনুভূমিক রেখার সঙ্গে $45^o$ কোণ উৎপন্ন করেছে। লাইটপোস্টটি কত লম্বা ছিল হিসাব করে লিখি। [$\sqrt{2}=1.414$ (প্রায়)]

ধরি, AB দৈর্ঘ্যের লাইটপোস্টটি O বিন্দুতে মচকে গিয়ে তার অগ্রভাগ C বিন্দুতে ভূমি স্পর্শ করেছে।

$\therefore$ $AO=OC=x$ মি. (ধরি)

$\therefore$ $AB=AO+OB=CO+OB$

$\therefore$ OBC একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি হয়েছে যার $\angle B=90^o$,
BC=4 মিটার ও OC=x মি.

সমকোণী $\Delta OBC$ -তে, $\cos 45^o=\dfrac{BC}{OC}=\dfrac{4}{x}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{x}$ $\quad\therefore x=4\sqrt{2}$

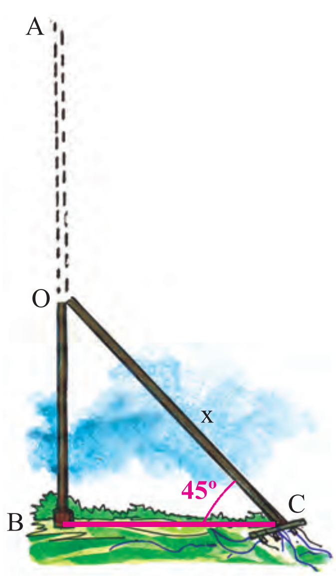
$\therefore$ $OC=4\sqrt{2}$ মি. $=4\times1.414$ মি. $=5.656$ মি. (প্রায়)

$\Delta OBC$ -এর, $\angle OCB=45^o$ $\quad\therefore \angle BOC=90^o-45^o=45^o$

$\therefore$ $BO=CO=4$ মি.

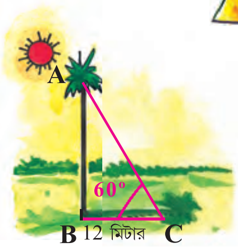
$\therefore$ লাইটপোস্টের দৈর্ঘ্য $=(4+5.656)$ মিটার (প্রায়)

$=9.656$ মিটার (প্রায়)



**প্রয়োগ : 4.** সূর্যের উন্নতি কোণ $60^\circ$ হলে একটি তালগাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য 12 মিটার হয়। তালগাছটির উচ্চতা নির্ণয় করি।

পাশের চিত্রে, AB তালগাছের উচ্চতা এবং BC তালগাছের ছায়ার দৈর্ঘ্য যখন $\angle ACB=60^\circ$




সমকোণী $\Delta ABC$-তে, $\tan 60^\circ = \dfrac{AB}{BC}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{AB}{12 \text{ মি.}}$

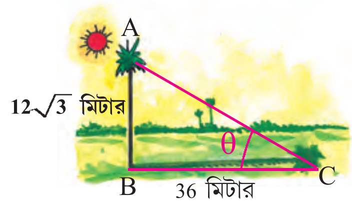
বা, $AB = 12\sqrt{3}$ মি.

$\therefore$ তালগাছের উচ্চতা $12\sqrt{3}$ মিটার।

কিন্তু ওই তালগাছটির (যার উচ্চতা $12\sqrt{3}$ মিটার) ছায়ার দৈর্ঘ্য যখন 36 মিটার হবে তখন সূর্যের উন্নতি কোণ কী হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, $12\sqrt{3}$ মিটার দৈর্ঘ্যের AB তালগাছটির ছায়ার দৈর্ঘ্য BC যখন 36 মিটার তখন সূর্যের উন্নতি কোণ $\theta$

সমকোণী $\Delta ABC$-তে, $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12\sqrt{3}}{36} = \dfrac{12\sqrt{3}}{12\times 3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$




সুতরাং, $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ \quad \therefore \theta = 30^\circ$

$\therefore$ তখন সূর্যের উন্নতি কোণ $30^\circ$

**প্রয়োগ : 5.** সূর্যের উন্নতি কোণ কত হলে 20 মিটার লম্বা লাঠির ছায়ার দৈর্ঘ্য $20\sqrt{3}$ মিটার হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

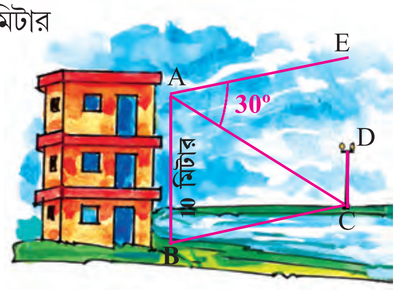
**প্রয়োগ : 6.** হাঁসখালি পোলের বড়ো খালের ঠিক পাড়ে অবস্থিত সমীরণদের তিনতলা বাড়ির ছাদ থেকে সে সোজাসুজি খালের ঠিক অপর পারের একটি লাইটপোস্ট দেখছিল। সমীরণের চোখ থেকে সেই পোস্টের পাদবিন্দুর অবনতি কোণ যদি $30^\circ$ হয় এবং বাড়িটির উচ্চতা যদি 10 মিটার হয়, তাহলে ছবি এঁকে ওই খালটি কত চওড়া হিসাব করি। [$\sqrt{3}=1.732$ (প্রায়)]

ধরি, AB তিনতলা বাড়িটি এবং CD পোস্টটি BC চওড়া খালের দুই পারে এবং ঠিক বিপরীত দিকে অবস্থিত।

সমীরণ A বিন্দু থেকে CD পোস্টের পাদবিন্দু C-কে $30^\circ$ অবনতি কোণে দেখছিল।

$\therefore \angle EAC = 30^\circ$ [ধরি, $AE \parallel BC$ ]

$\therefore$ ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ পেলাম যার $\angle B=90^\circ$, AB=10 মিটার




এবং $\angle ACB =$ একান্তর $\angle EAC$ [$\because AE \parallel BC$ ]

$\therefore \angle ACB = 30^\circ$

সমকোণী $\Delta ABC$-তে, $\tan 30^\circ = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{10 \text{ মি.}}{BC}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{10 \text{ মি.}}{BC}$

$\therefore$ $BC = 10\sqrt{3}$ মি. $= 10\times 1.732$ মি. (প্রায়)

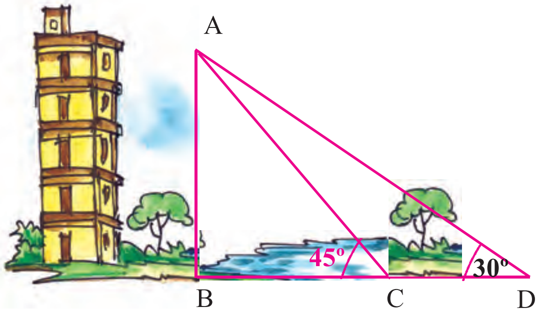
$= 17.32$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ খালটি 17.32 মি. (প্রায়) চওড়া।

**প্রয়োগ : 7.** কিন্তু কোনো নদীর পাড়ে যদি উঁচু অট্টালিকা থাকে তবে নদীর অপর পারে দাঁড়িয়ে ওই অট্টালিকার উচ্চতা কীভাবে মাপব দেখি।

ধরি, AB অট্টালিকার উচ্চতা = x মিটার

যদি নদীর অপর পারে অট্টালিকার B বিন্দুর ঠিক বিপরীত দিকে নদীর ধার বরাবর C বিন্দু থেকে অট্টালিকার চূড়ার উন্নতি কোণ $45^\circ$ এবং C বিন্দু থেকে 14 মিটার বর্ধিত BC সরলরেখাংশ বরাবর দূরে সরে গিয়ে D বিন্দু থেকে অট্টালিকার চূড়ার উন্নতি কোণ $30^\circ$ হয়, তবে অট্টালিকার উচ্চতা x নির্ণয় করি।




ধরি, নদীর প্রস্থ (BC) = y মিটার

∴ সমকোণী ত্রিভুজ ABC থেকে পাই, $\tan 45^\circ = \dfrac{AB}{BC}$

বা, $1 = \dfrac{x}{y}$

$\therefore x = y$

আবার সমকোণী ত্রিভুজ ABD থেকে পাই, $\tan 30^\circ = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AB}{BC+CD}$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{x}{y+14}$

বা, $y+14 = x\sqrt{3}$

বা, $x+14 = x\sqrt{3}$ [$\because x=y$]

বা, $x(\sqrt{3}-1) = 14$

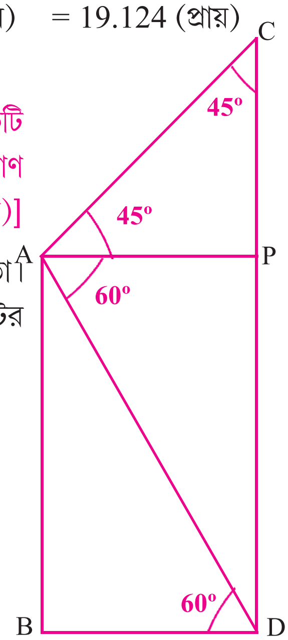
$\therefore x = \dfrac{14}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{14(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= \dfrac{14(1.732+1)}{3-1}$

$= 7\times2.732$ (প্রায়) $= 19.124$ (প্রায়)

∴ অট্টালিকার উচ্চতা 19.124 মিটার (প্রায়)।

**প্রয়োগ : 8.** যদি একটি 18 মিটার উঁচু পাঁচতলা বাড়ির ছাদ থেকে দেখলে একটি মনুমেন্টের চূড়ার উন্নতি কোণ $45^\circ$ এবং মনুমেন্টের পাদদেশের অবনতি কোণ $60^\circ$ হয়, তাহলে মনুমেন্টের উচ্চতা হিসাব করে লিখি। [$\sqrt{3} = 1.732$ (প্রায়)]




ধরি, পাশের চিত্রে, AB 18 মিটার উঁচু পাঁচতলা বাড়ি এবং CD মনুমেন্টের উচ্চতা। AB-এর A বিন্দু থেকে মনুমেন্টের চূড়ার C বিন্দুর উন্নতি কোণ $45^\circ$ ও মনুমেন্টের পাদদেশ D বিন্দুর অবনতি কোণ $60^\circ$.

$\therefore \angle PAC = 45^\circ$ এবং $\angle PAD = 60^\circ$ [ধরি, $AP \parallel BD$]

$\angle PAD =$ একান্তর $\angle ADB$ [$\because AP \parallel BD$] $\therefore \angle ADB = 60^\circ$

ধরি, মনুমেন্টের উচ্চতা CD=x মিটার এবং BD=y মিটার = AP

AB = 18 মিটার। সুতরাং, CP = (x–18) মি.