अध्याय–04
विद्युत धारिता (Electrical Capacitance)

पिछले अध्याय में हम किसी आवेश निकाय की स्थिर विद्युत ऊर्जा के संबंध में अध्ययन कर चुके है। इस अध्याय में हमारा मूल उद्देश्य 'संधारित्र' के बारे में अध्ययन करना है जो विद्युत ऊर्जा संचय की एक युक्ति है। आवश्यकता पड़ने पर संधारित्र के निरावेशन द्वारा यह विद्युत ऊर्जा पुनः अन्य रूप में प्राप्त की जा सकती हैं। किसी कैमरे में लगी फ्लैश इकाई में वस्तुतः आवेशित संधारित्र ही होते हैं जो बटन दबाने पर तेजी से निरावेशित होकर तीव्र प्रकाश का स्पंद उत्पन्न करते है। इसके अतिरिक्त भी संधारित्र के परिपथीय अवयवों के रूप में कई महत्वपूर्ण उपयोग हैं।

4.1 चालक एवं विद्युतरोधी (Conductor and Insulator)

विद्युत धारा के चालन के आधार पर हम प्रकृति में पाये जाने वाले पदार्थो को मुख्यतः दो वर्गों में बाँट सकते हैं–

(अ) चालक तथा (ब) विद्युतरोधी (या कुचालक)

(अ) चालक– वे पदार्थ जिनमें विद्युत आवेश का एक स्थान से दूसरे स्थान तक प्रवाह आसानी से हो जाता है तथा विद्युत धारा प्रवाहित हो जाती है, चालक पदार्थ कहलाते हैं। उदाहरणार्थ– चांदी, तांबा, एल्यूमिनियम, लोहा, पारा, नमक का विलयन, अम्ल, क्षार, मनुष्य का शरीर एवं पृथ्वी आदि विद्युत के चालक होते हैं। चांदी सबसे अच्छा चालक होता है।

(ब) विद्युतरोधी– वे पदार्थ जिनमें विद्युत का चालन नहीं हो पाता उन्हें कुचालक या विद्युतरोधी पदार्थ कहते हैं। उदाहरणार्थ काँच, प्लास्टिक, रबर, ऐबोनाईट, सूखी लकड़ी आदि विद्युत रोधी पदार्थ हैं। इन्हें परावैद्युत पदार्थ भी कहा जाता है। इसके अतिरिक्त ठोस पदार्थ अर्द्धचालक भी हो सकते है। अर्द्धचालकों के बारे में हम अध्याय 16 में अध्ययन करेंगे। वहाँ हम यह भी देख पाएँगे कि विभिन्न प्रकार के ठोस पदार्थों में विद्युत चालन व्यवहार भिन्न क्यों होता है।

4.2 मुक्त एवं बद्ध आवेश (Free and Bound Charges)

प्रत्येक पदार्थ परमाणुओं से मिलकर बना होता है। परमाणु में इलेक्ट्रॉन, नाभिक के चारों ओर निश्चित कक्षाओं में चक्कर लगाते हैं। परमाणु की आन्तरिक कक्षाओं (नाभिक के निकट स्थित) में स्थित इलेक्ट्रॉनों पर नाभिक का आकर्षण बल प्रबल होता है एवं ये इलेक्ट्रॉन अपने परमाणु से बद्ध अवस्था में होते हैं।

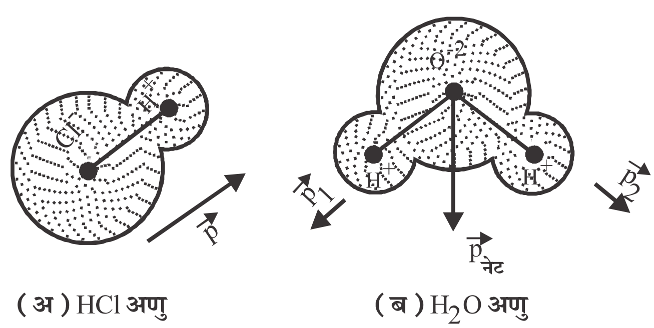
धात्विक चालक पदार्थों के परमाणु की बाह्यतम कक्षा (संयोजी स्तर) के इलेक्ट्रॉनों पर नाभिक का आकर्षण बल दुर्बल होता है एवं ये इलेक्ट्रॉन पदार्थ के अन्दर स्वतन्त्र रूप से विचरण कर सकते हैं, इन्हें मुक्त इलेक्ट्रॉन कहते हैं। परन्तु मुक्त इलेक्ट्रॉन धातु की सतह से बाहर नही आ सकते। जिन परमाणुओं से संयोजी इलेक्ट्रान मुक्त होते हैं वे धनआयन बन जाते है तथा पदार्थ में अपने स्थान पर बद्ध होते हैं। ऐसे पदार्थों में बाह्य विद्युत क्षेत्र के प्रभाव में इन मुक्त इलेक्ट्रॉनों के कारण धारा का चालन सुगमता से हो जाता है। जिन इलेक्ट्रॉनों पर नाभिक का आकर्षण प्रबल होता है वे बद्ध इलेक्ट्रॉन कहलाते हैं। ठोस पदार्थों में धारा चालन में बद्ध इलेक्ट्रॉनों एवं धन आयनों का योगदान नहीं होता। विद्युत अपघट्य विलयनों में धारा प्रवाह धन आयनो व ऋणआयनों के कारण होता है।

कुचालक पदार्थों के परमाणु की बाह्यतम कक्षा के इलेक्ट्रॉनों पर भी नाभिक का आकर्षण बल प्रबल होता है अतः इनके सभी इलेक्ट्रॉन बद्ध अवस्था में होते हैं। इनका स्वतन्त्र रूप से विचरण संभव नहीं हो पाता। अतः इन पदार्थों में धारा का चालन नहीं होता है।

4.3 परावैद्युत पदार्थ एवं ध्रुवण (Dielectric Substance and Polarization)

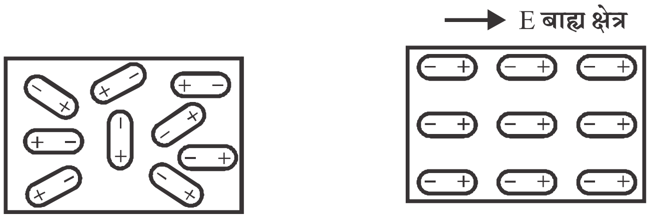
वे पदार्थ जो विद्युत धारा का चालन नहीं करते परंतु बाह्य विद्युत क्षेत्र में रखने पर विद्युत प्रभाव का प्रदर्शन करते हैं, परावैद्युत पदार्थ कहलाते हैं। उदाहरणार्थ– ऐबोनाईट, मोम, कागज, अभ्रक, तेल आदि। परावैद्युत पदार्थों में प्रभावी रूप से मुक्त इलेक्ट्रॉन नहीं होते अतः बाह्य विद्युत क्षेत्र में रखे जाने पर कोई धारा प्रवाहित नहीं होती। इलेक्ट्रॉन अपने परमाणुओं या अणुओं से बँधे हुए ही रहते हैं। विद्युत क्षेत्र का प्रभाव यह होता है कि इसके कारण परमाणु या अणु में विद्युत आवेशों का वितरण तनिक पुनः व्यवस्थित होता है परन्तु यह पदार्थ के भीतर विद्युत क्षेत्र को पर्याप्त प्रभावित करता है। परावैद्युत पदार्थ दो प्रकार के होते हैं। **(अ) ध्रुवीय परावैद्युत (ब) अध्रुवीय परावैद्युत**

(अ) ध्रुवीय परावैद्युत (Polar Dielectrics) ऐसे पदार्थ जिनके अणुओं के धनावेश एवं ऋणावेश के वितरण केन्द्र परस्पर संपाती न होकर पृथक–पृथक होते हैं, ध्रुवीय परावैद्युत पदार्थ कहलाते हैं। इन पदार्थों के प्रत्येक अणु का स्थायी नेट विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण होता है तथा प्रत्येक अणु एक विद्युत द्विध्रुव की भांति व्यवहार करता है। जैसे– HCl अणु (चित्र 4.1(अ)) H_2O अणु (चित्र 4.1(ब)) आदि।



चित्र 4.1 ध्रुवीय अणु

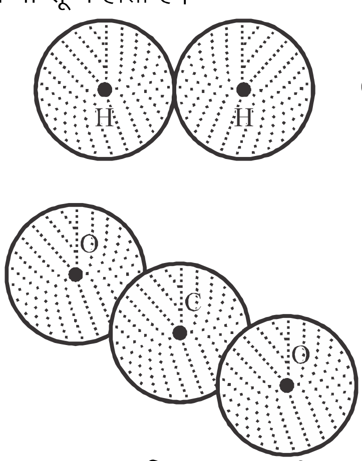
किसी ध्रुवीय परावैद्युत पदार्थ के अणु बाह्य विद्युत क्षेत्र की अनुपस्थिति में तापीय ऊर्जा के कारण अनियमित रूप से व्यवस्थित रहते हैं इस कारण पदार्थ के किसी भी आयतन जिसमें बहुसंख्या में अणु हैं परिणामी द्विध्रुव आघूर्ण शून्य है तथा इस कारण पदार्थ का परिणामी द्विध्रुव आघूर्ण शून्य होता है (चित्र 4.2(अ))। पदार्थ को बाह्य विद्युत क्षेत्र में रखने पर प्रत्येक अणु द्विध्रुव पर बलाघूर्ण कार्य करता है जो अणु को बाह्य विद्युत क्षेत्र के अनुदिश संरेखित करने का प्रयास करता है। बाह्य विद्युत क्षेत्र की तीव्रता बढ़ाने पर, अधिक से अधिक अणु द्विध्रुव, बाह्य विद्युत क्षेत्र की दिशा में संरेखित होते हैं। इस प्रकार पदार्थ में नेट द्विध्रुव आघूर्ण प्रेरित हो जाता है।



(अ) बाह्य विद्युत क्षेत्र अनुपस्थित (ब) बाह्य विद्युत क्षेत्र आरोपित करने पर

चित्र 4.2 ध्रुवीय अणुओं पर विद्युत क्षेत्र का प्रभाव

(ब) अध्रुवीय परावैद्युत (Non Polar Dielectrics):– वे पदार्थ जिनके अणुओं के धनावेशों एवं ऋणावेशों का वितरण केन्द्र एक ही बिन्दु होता है, अध्रुवीय परावैद्युत पदार्थ कहलाते हैं जैसे H_2, CO_2, N_2 एवं O_2 आदि। चित्र 4.3 (अ) में H_2 अणु एवं 4.3(ब) में CO_2 अणु को दिखाया गया है। इन पदार्थों के प्रत्येक अणु का द्विध्रुव आघूर्ण शून्य होता है अतः संपूर्ण पदार्थ का नेट द्विध्रुव आघूर्ण भी शून्य होता है।

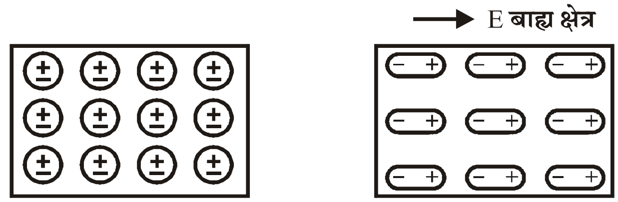


(अ) H_2 अणु

(ब) CO_2 अणु

चित्र 4.3 अध्रुवीय अणु

जब अध्रुवीय परावैद्युत पदार्थ को बाह्य विद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तो धनावेश का वितरण केन्द्र विद्युत क्षेत्र के अनुदिश तथा ऋणावेश का वितरण केन्द्र विद्युत क्षेत्र के विपरीत कुछ विस्थापित हो जाते हैं जिससे प्रत्येक अणु में कुछ द्विध्रुव आघूर्ण प्रेरित हो जाता है।



(अ) बाह्य विद्युत क्षेत्र की अनुपस्थिति में (ब) बाह्य विद्युत क्षेत्र आरोपित करने पर

चित्र 4.4 अध्रुवीय अणुओं पर विद्युत क्षेत्र का प्रभाव

"बाह्य विद्युत क्षेत्र की उपस्थिति में परावैद्युत पदार्थ में विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण प्रेरित होना, परावैद्युत पदार्थ का ध्रुवण कहलाता है।"

वे पदार्थ जिनमें प्रेरित विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण, बाह्य विद्युत क्षेत्र के समानुपाती तथा उसके अनुदिश हो **'रेखीय समदैशिक परावैद्युत पदार्थ'** कहलाते हैं।

बाह्य विद्युत क्षेत्र के प्रभाव में पदार्थ के इकाई आयतन में उत्पन्न द्विध्रुव आघूर्ण, पदार्थ का ध्रुवण सदिश कहलाता है। इसे $\vec{P}$ से व्यक्त करते हैं। अतः रेखीय समदेशिक परावैद्युत पदार्थों के लिए ध्रुवण सदिश $(\vec{P})$, विद्युत क्षेत्र $(\vec{E})$ के समानुपाती होता है।

अर्थात् $\vec{P} \propto \vec{E}$

या $$\vec{P} = \chi_e \vec{E} \qquad \ldots(4.1)$$

समानुपातिक नियतांक χ_e को पदार्थ की वैद्युत प्रवृत्ति कहते हैं। यह परावैद्युत पदार्थ की ध्रुवता का मापक है एवं यह विमाहीन राशि है।

4.4 चालक की धारिता (Capacitance of Conductor)

किसी वस्तु पर आवेश, इलेक्ट्रॉन के आदान–प्रदान के कारण उपस्थित होता है। वस्तु से लिए जाने वाले या वस्तु को दिए जाने वाले इलेक्ट्रॉनों की एक निर्धारित संख्या न तो एक साथ ली जा सकती है एवं न ही एक साथ दी जा सकती है। हम कह सकते हैं कि वस्तु को आवेशित करने की प्रक्रिया एक चरणबद्ध प्रक्रिया है। किसी समय वस्तु को दिया जाने वाला आवेश वस्तु पर पहले से उपस्थित आवेश द्वारा प्रतिकर्षित होता है अतः वस्तु के आवेश में वृद्धि करने के लिए, इस प्रतिकर्षण बल के विरूद्ध कार्य करना पड़ता है जिससे वस्तु की स्थितिज ऊर्जा अर्थात् विभव में वृद्धि होती है। अर्थात् चालक को कुछ आवेश देने पर उसके विभव में भी उसी अनुपात में वृद्धि हो जाती है।

यदि एक विलगित चालक को Q आवेश देने पर उसके विभव में वृद्धि V होती है तो

$$Q \propto V \quad \text{या} \quad Q = CV \qquad \ldots(4.2)$$

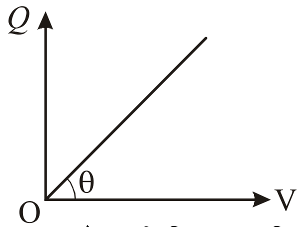
यहाँ समानुपातिक नियतांक C, चालक की धारिता कहलाता है। समीकरण (4.2) से

$$C = \frac{Q}{V}$$

अर्थात् ''चालक की धारिता, आवेश की उस मात्रा के समान होती है जो चालक के विभव में इकाई वृद्धि कर दे।''

किसी चालक की धारिता, उसके आवेश ग्रहण करने की क्षमता को व्यक्त करती है। एक चालक विभव के एक निश्चित अधिकतम मान तक ही आवेश ग्रहण कर सकता है।

यदि चालक को दिए गए आवेश को चालक के विभव में वृद्धि के साथ आरेखित करें (चित्र 4.5) तो ग्राफ एक सीधी रेखा प्राप्त होता है जिसका ढाल चालक की धारिता को व्यक्त करता है।



चित्र 4.5 आवेश की विभव पर निर्भरता

$$\tan\theta = \frac{Q}{V} = C$$

चालक की धारिता, उसके आकार, आकृति एवं उसके निकट अन्य चालक की उपस्थिति तथा उसके चारों ओर के माध्यम पर निर्भर करती है। ध्यान रहे कि एक विलगित चालक की धारिता उस पर उपस्थित आवेश के मान एवं उसके विभव में वृद्धि पर निर्भर नहीं करती।

धारिता का SI मात्रक कूलॉम / वोल्ट होता है जिसे फैरड (प्रतीक F) कहते हैं। अतः

$$1F = \frac{1C}{1V}$$

अर्थात्

''यदि किसी चालक को 1 C आवेश देने पर उसके विभव में 1 V की वृद्धि हो तो चालक की धारिता 1 F होती है।''

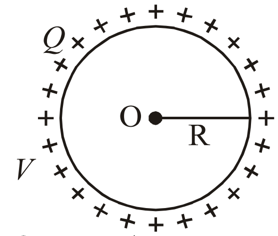
एक फैरड धारिता का बहुत बड़ा मात्रक है अतः व्यवहारिक रूप से धारिता को मिली फैरड (mF) = 10^{-3} F, माइक्रो फैरड (μF) = 10^{-6} F, नैनो फैरड (nF) = 10^{-9} F या पिकोफैरड (pF) = 10^{-12} F में व्यक्त किया जाता है।

$$\text{C की विमा} = \frac{[\text{TA}]}{[\text{ML}^2\text{T}^{-2}/\text{TA}]}$$

$$= [\text{M}^{-1}\text{L}^{-2}\text{T}^4\text{A}^2]$$

4.5 विलगित गोलीय चालक की धारिता (Capacitance of an Isolated Spherical Conductor)

माना एक R त्रिज्या के गोलीय चालक को Q आवेश देने पर उसके पृष्ठ पर उत्पन्न विभव V है तो



चित्र 4.6 गोलीय चालक

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}$$

अतः धारिता $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$ . . . (4.3a)

स्पष्टतः गोलीय चालक की धारिता उसकी त्रिज्या के समानुपाती होती है (अर्थात् $C \propto R$)।

यदि गोलीय चालक, किसी परावैद्युत माध्यम में स्थित हो जिसका परावैद्युतांक ϵ_r हो तो उसकी धारिता

$$C_m = \frac{Q}{V_m} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R \quad . . . (4.3b)$$

या $C_m = C\epsilon_r$

या $\frac{C_m}{C} = \epsilon_r$

अतः माध्यम का परावैद्युतांक चालक की माध्यम की विद्युत धारिता एवं वायु (निर्वात) में विद्युत धारिता के अनुपात के बराबर होता है।

उदाहरण 4.1 पृथ्वी को एक गोलाकार चालक मानते हुए इसकी धारिता की गणना कीजिए। (पृथ्वी की त्रिज्या $= 6.4\times10^6\, m$)

हलः धारिता $C = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{R}{1/4\pi\epsilon_0}$

$$= \frac{6.4\times10^6}{9\times10^9} = 0.711\times10^{-3} F$$

या $C = 0.711\, mF = 711\, \mu F$

स्पष्ट है कि एकल चालक की धारिता बहुत अधिक नहीं बढ़ायी जा सकती।

उदाहरण 4.2 1 F धारिता के गोलीय चालक की त्रिज्या कितनी होगी? क्या आप इसे अपनी अलमारी में रख सकते हैं? स्पष्ट कीजिए।

हलः $\because$ धारिता $C = 4\pi\epsilon_0 R$

अतः $R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\times10^9\, m$

यह पृथ्वी की त्रिज्या से लगभग 1400 गुना अधिक है अतः इसे अलमारी में रख पाना संभव नहीं है। इससे यह भी स्पष्ट है कि फैरड, धारिता का बहुत बड़ा मात्रक है।

उदाहरण 4.3 यदि एक गोलीय चालक की वायु में धारिता 2 pF है तथा इसे किसी माध्यम में रखने पर इसकी धारिता 12 pF हो जाती है तो माध्यम के परावैद्युतांक का मान कितना होगा?

हलः माध्यम में गोलीय चालक की धारिता

$$C_m = 4\pi \in_0 \in_r R = \in_r (4\pi \in_0 R) = \in_r C_0$$

दिया हैः वायु में धारिता $C_0 = 2pF$,

माध्यम में धारिता $C_m = 12pF$

अतः $12 = \in_r \times 2$ या $\in_r = 6$

उदाहरण 4.4 दो भिन्न–भिन्न त्रिज्या के गोलीय चालकों को समान आवेश से आवेशित करने पर इनके पृष्ठों पर विभवों का अनुपात 1 : 2 है तो इनकी धारिताओं का अनुपात कितना होगा?

हलः $\because C = \frac{Q}{V}$ या $\frac{C_1}{C_2} = \frac{Q_1 V_2}{Q_2 V_1}$

दिया हैः $Q_1 = Q_2$ तथा $V_1 : V_2 = 1 : 2$ अतः $\frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{1}$

अतः $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2}{1}$ या $C_1 : C_2 = 2 : 1$

4.6 संधारित्र (Capacitor)

किसी चालक की धारिता, उसके आकार में वृद्धि करके बढ़ाई जा सकती है परंतु चालक के आकार में वृद्धि करना एक व्यावहारिक उपाय नहीं है।

संधारित्र एक ऐसी युक्ति है जिसमें किसी चालक के आकार में वृद्धि किये बिना, आवेश की स्थिर मात्रा पर उसके विभव में कमी करके, चालक की धारिता में वृद्धि होती है।

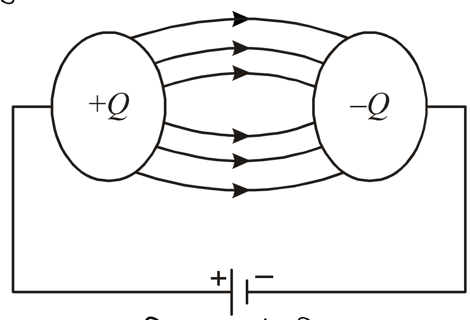
संधारित्र में दो परस्पर निकट स्थित चालक प्लेटें होती हैं जिनमें से एक प्लेट पर धनावेश तथा दूसरी प्लेट पर उतना ही ऋणावेश होता है। इसके लिए दोनों प्लेटों को बैटरी के क्रमशः धन एवं ऋण टर्मिनलों से जोड़ा जाता है (चित्र 4.7)। अब यदि बैटरी को हटा लिया जाए तो भी चालकों पर आवेश संग्रहित रहता है। अतः संधारित्र को आवेश संचय की युक्ति भी कहा जाता है।

यहाँ यह ध्तव्य हैं कि संधारित्र पर कुल आवेश $Q + (-Q) = 0$ ही होता है। सामान्यतः संधारित्र पर आवेश से अभिप्राय इसकी किसी प्लेट पर आवेश के परिमाण (Q) से होता है। इसी प्रकार संधारित्र की प्लेटों के मध्य विभवान्तर V को संधारित्र का विभव कहते है। चालक के समान ही संधारित्र के लिए

$$Q \propto V$$

या $$Q = CV \qquad \ldots(4.4)$$

संधारित्र के प्लेटों की आकृति आयताकार, बेलनाकार, गोलाकार आदि कोई भी हो सकती है। संधारित्र की धारिता C इन प्लेटों के आकार, आकृति, इनके मध्य की दूरी तथा इनके मध्य उपस्थित माध्यम पर निर्भर करती है। संधारित्र विद्युत ऊर्जा संग्रहण की एक युक्ति है।



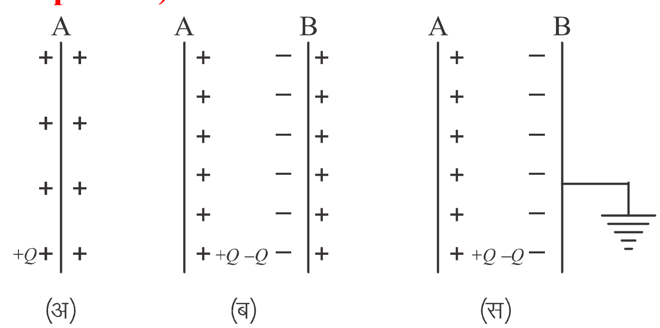
चित्र 4.7 संधारित्र

चित्र 4.8 में परिपथ में प्रयुक्त किये जाने वाले संधारित्र के प्रतीक को दिखाया गया है।

नियत धारिता का संधारित्र परिवर्ती धारिता का संधारित्र

चित्र 4.8 संधारित्र का प्रतीक चिन्ह

4.6.1 संधारित्र का सिद्धान्त (Principle of Capacitor)



चित्र 4.9 संधारित्र पर आवेश

संधारित्र के सिद्धान्त को हम चित्र 4.9 में दिखाई गई विभिन्न व्यवस्थाओं से समझ सकते हैं। चित्र 4.9(अ) में एक धनावेशित चालक प्लेट A दिखाई गई है। अब यदि चित्र 4.9(ब) के अनुसार प्लेट A के निकट एक अन्य समान आकार की चालक प्लेट B रखी जाए तो विद्युत प्रेरण के कारण प्लेट B की आन्तरिक सतह पर $-Q$ तथा बाह्य सतह पर $+Q$ आवेश प्रेरित होता है। प्लेट B का ऋणावेश, प्लेट A के विभव में कमी करता है जबकि प्लेट B का धनावेश प्लेट A के विभव में वृद्धि करता है परंतु प्लेट B का ऋणावेश प्लेट A के अपेक्षाकृत निकट होता है अतः परिणामी रूप से प्लेट A के विभव में कुछ कमी होती है एवं निकाय की धारिता में कुछ वृद्धि हो जाती है।

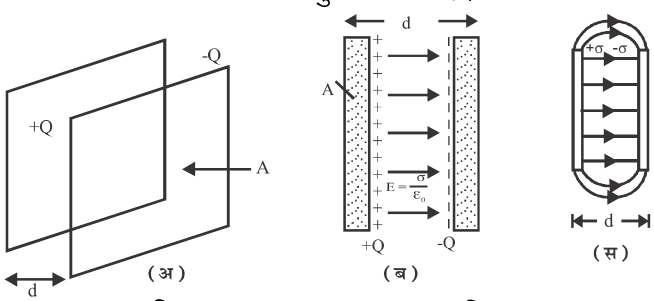
अब यदि चित्र 4.9(स) के अनुसार चालक B की बाह्य सतह को एक नगण्य धारिता के तार से भूसम्पर्कित कर दिया जाए तो प्लेट B का धनावेश पृथ्वी से इलेक्ट्रॉन ग्रहण कर निरस्त हो जाता है तथा प्लेट B पर केवल बद्ध ऋणावेश शेष रहता है जो प्लेट A के विभव को बहुत कम कर देता है फलतः निकाय की धारिता, अपेक्षाकृत बहुत अधिक बढ़ जाती है।

इस प्रकार ''किसी आवेशित चालक के निकट अन्य भूसम्पर्कित चालक लाने पर चालक की धारिता में बहुत अधिक वृद्धि हो जाती है।'' यह संधारित्र का सिद्धान्त है।

चालकों की आकृति के आधार पर मुख्यतः तीन प्रकार के संधारित्र होते हैं (अ) समान्तर प्लेट संधारित्र (ब) गोलीय संधारित्र (स) बेलनाकार संधारित्र इनमें से हम इस अध्याय में पहले दो संधारित्रों का अध्ययन करेंगे।

4.7 समान्तर प्लेट संधारित्र (Parallel Plate Capacitor)

समान ज्यामिति एवं समान क्षेत्रफल की दो धातु प्लेटें परस्पर अल्प दूरी पर एक दूसरे के समान्तर स्थित हों तो यह व्यवस्था समान्तर प्लेट संधारित्र कहलाती है। (देखें चित्र 4.10(अ))। यहाँ प्लेटों के मध्य रिक्त स्थान में वायु या निर्वात है।



चित्र 4.10 समान्तर पट्ट संधारित्र

संधारित्र को आवेशित करने के लिए प्लेटों को बैटरी से जोड़ा जाता है। बैटरी के धनाग्र से जुड़ी प्लेट इलेक्ट्रॉन त्यागती है तो ऋणाग्र से जुड़ी प्लेट उतने ही इलेक्ट्रॉन ग्रहण करती हैअतः दोनों प्लेटों पर समान परिमाण के आवेश क्रमशः$+Q$ एवं $-Q$ प्रकट होते हैं। चूंकि दोनों प्लेटों का क्षेत्रफल समान है अतः दोनों प्लेटों पर पृष्ठ आवेश घनत्व भी परिमाण में समान एवं क्रमशः $+\sigma$ एवं $-\sigma$ होते हैं।

चूंकि प्लेटों के मध्य दूरी, उनके आकार की तुलना में अल्प है अतः प्लेटों के मध्य भाग में प्रत्येक प्लेट के कारण विद्युत क्षेत्र $\sigma/2\epsilon_0$ होता है तथा दोनों प्लेटों के कारण विद्युत क्षेत्र समान दिशा में होता है। अतः प्लेटों के मध्य भाग में विद्युत क्षेत्र रेखाएँ परस्पर समानतर होती हैं एवं विद्युत क्षेत्र एक समान होता है। (देखें चित्र 4. 10(ब))

प्लेटों के मध्य भाग में विद्युत क्षेत्र

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$\because$ $$\sigma = \frac{Q}{A}$$

जहाँ A= किसी भी एक प्लेट का क्षेत्रफल

अतः $$E = \frac{Q}{A\epsilon_0} \qquad \ldots(4.5)$$

उपान्त प्रभावः प्लेटों के किनारों पर पृष्ठ आवेश घनत्व अधिक होने के कारण विद्युत क्षेत्र रेखाएँ परस्पर प्रतिकर्षित होकर वक्रीय हो जाती हैं तथा विद्युत क्षेत्र असमान होता है (देखें चित्र 4. 10(स))। इस प्रभाव को 'उपान्त प्रभाव कहते हैं। उपान्त प्रभाव को नगण्य माना जा सकता है तथा हम प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र को समरूप मान सकते हैं।

यदि संधारित्र की प्लेटों के मध्य दूरी d है तो प्लेटों के मध्य विभवान्तर

$$V = Ed = \frac{Qd}{A\epsilon_0} \qquad \ldots(4.6)$$

अतः समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Qd/A\epsilon_0}$$

या $$C = \frac{A\epsilon_0}{d} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad \ldots(4.7)$$

स्पष्टतः समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता का मान प्लेटों के क्षेत्रफल के अनुक्रमानुपाती एवं उनके मध्य दूरी के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

अर्थात् $C \propto A$ तथा $C \propto 1/d$

उदाहरण 4.5 एक $20\,\mu F$ धारिता के संधारित्र को $10\,kV$ विभवान्तर से आवेशित किया जाता है। संधारित्र की प्रत्येक प्लेट पर आवेश का मान क्या होगा?

हलः $\because$ $Q = CV = 20\times10^{-6}\times10\times10^{3}$

$= 20\times10^{-2} = 0.2\,C$

उदाहरण 4.6 एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों का क्षेत्रफल A तथा इनके मध्य दूरी d है। अब यदि प्लेटों का क्षेत्रफल दो गुना तथा प्लेटों के मध्य दूरी आधी कर दी जाए तो संधारित्र की धारिता, अपने प्रारम्भिक मान की तुलना में कितनी हो जायेगी?

हलः $\because$ प्रारम्भिक धारिता $C = \dfrac{A\epsilon_0}{d}$

तथा परिवर्तित धारिता $C' = \dfrac{(2A)\epsilon_0}{d/2} = \dfrac{4A\epsilon_0}{d} = 4C$

अतः नयी धारिता, प्रारम्भिक धारिता की 4 गुनी होगी।

उदाहरण 4.7 एक C धारिता के संधारित्र को V वोल्ट विभवान्तर की बैटरी से संयोजित करने पर इसके प्लेटों पर आवेश$\pm 360\,\mu C$ है। विभवान्तर के मान में 120 V से कमी करने पर आवेश $\pm 120\,\mu C$ है तब ज्ञात कीजिए–

(अ) संधारित्र की प्लेटों के मध्य आरोपित विभवान्तर V

(ब) संधारित्र की धारिता C

(स) आवेश का मान जबकि आरोपित विभवान्तर को 120 V से बढ़ा दिया जाए।

हलः (अ) $\because\ q = CV = 360\times10^{-6}C$

पुनः दिया है $q' = C(V-120) = 120\times10^{-6}C$

अतः $$\frac{CV}{C(V-120)} = \frac{360\times10^{-6}}{120\times10^{-6}} = 3$$

या $3V - 360 = V$ या $V = 180\,V$

(ब) $\because\ CV = 360\times10^{-6}$

$$C = \frac{360\times10^{-6}}{V} = \frac{360\times10^{-6}}{180}$$

$$= 2\times10^{-6}F = 2\mu F$$

(स) विभवान्तर 120 V से बढ़ाने पर आवेश

$$q'' = C(V+120) = 2\times10^{-6}(180+120)$$

$$q'' = 2\times300\times10^{-6} = 600\times10^{-6}C = 600\,\mu C$$

उदाहरण 4.8 परस्पर 1 mm दूरी पर स्थित दो 5 सेमी त्रिज्या की वृत्ताकार चकतियों द्वारा निर्मित संधारित्र की धारिता ज्ञात कीजिए।

हलः प्लेटों का क्षेत्रफल $A = \pi r^2 = 3.14\times(5\times10^{-2})^2$

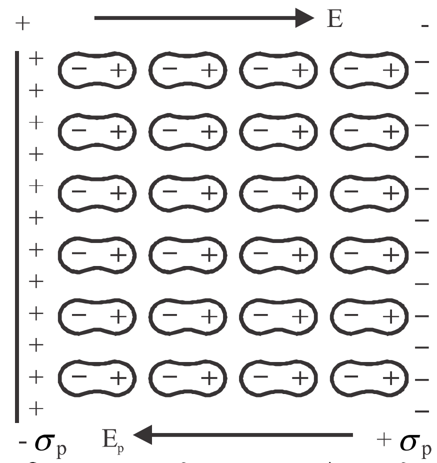
$$= 78.5\times10^{-4}\,m^2$$

अतः धारिता $$C = \frac{A\in_0}{d} = \frac{78.5\times10^{-4}\times8.85\times10^{-12}}{1\times10^{-3}}$$

$$C = 69.47\times10^{-12}F = 69.5\,pF$$

4.8 संधारित्र की प्लेटों के मध्य परावैद्युत माध्यम की उपस्थिति का प्रभाव (Effect of Dielectric Medium Filled Between the Plates of Capacitor)

जब किसी परावैद्युत पदार्थ (जैसे मोम, कागज, अभ्रक आदि) को संधारित्र की प्लेटों के मध्य भरा जाता है तो इसके अणु ध्रुवित होकर प्लेटों के उपस्थित विद्युत क्षेत्र $\left(E = \frac{\sigma}{\in_0}\right)$ के अनुदिश संरेखित होते हैं (चित्र 4.11)। ध्रुवण की इस क्रिया में परावैद्युत पट्टी के अन्दर द्विध्रुवी अणुओं के निकटवर्ती आवेश परस्पर विपरीत प्रकृति के होने के कारण एक दूसरे को निरस्त कर लेते हैं परंतु पट्टी के किनारों पर उपस्थित आवेश निरस्त नहीं होता फलतः परावैद्युत पट्टी के एक किनारे (संधारित्र की धन प्लेट के निकट) पर ऋणात्मक पृष्ठ आवेश घनत्व $-\sigma_p$ तथा दूसरे किनारे (संधारित्र की ऋण प्लेट के निकट) पर धनात्मक पृष्ठ आवेश घनत्व $+\sigma_p$ प्रेरित होता है तथा परावैद्युत पट्टी में एक प्रेरित विद्युत क्षेत्र $E_p = \frac{\sigma_p}{\in_0}$ स्थापित होता है। प्रेरित विद्युत क्षेत्र की दिशा, प्लेटों के मध्य पहले से उपस्थित विद्युत क्षेत्र के विपरीत होती है।



चित्र 4.11 पराविद्युत माध्यम में संधारित्र

इस प्रकार परावैद्युत माध्यम में परिणामी विद्युत क्षेत्र $E_1 = E - E_P$

या $$E_1 = \frac{\sigma}{\in_0} - \frac{\sigma_p}{\in_0} = \frac{\sigma-\sigma_p}{\in_0} \qquad \ldots(4.8)$$

परावैद्युतांक की परिभाषा से द्वारा

$$E_1 = \frac{E}{\in_r} = \frac{\sigma}{\in_0\in_r}$$

अतः समीकरण (4.8) को निम्नानुसार लिखा जा सकता है

$$E_1 = \frac{\sigma-\sigma_p}{\in_0} = \frac{\sigma}{\in_r\in_0} \qquad \ldots(4.9)$$

इस प्रकार समीकरण (4.9) से स्पष्ट है कि परावैद्युत पदार्थ के अन्दर परिणामी विद्युत क्षेत्र, संधारित्र की प्लेटों के मध्य पहले से उपस्थित विद्युत क्षेत्र की तुलना में कम होता है फलतः विभवान्तर में भी कमी आती है एवं संधारित्र की धारिता में वृद्धि होती है।

पुनः समीकरण (4.9) से

$$\sigma - \sigma_p = \frac{\sigma}{\in_r}$$

या प्रेरित पृष्ठ आवेश घनत्व

$$\sigma_p = \sigma\left(1 - \frac{1}{\in_r}\right) \qquad \ldots(4.10)$$

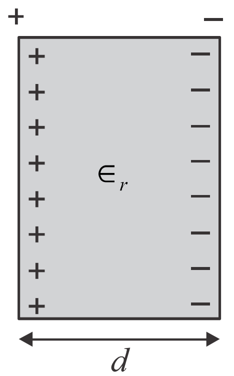
ध्रुवण $\vec{P}$ का परिमाण, परावैद्युत पट्टी के किनारों पर प्रेरित पृष्ठ आवेश घनत्व के समान होता है

$$|\vec{P}| = \chi_e E_1 = \chi_e\frac{\sigma}{\in_0\in_r} = \sigma_p \qquad \ldots(4.11)$$

समीकरण (4.10) एवं (4.11) से परावैद्युत पदार्थ की वैद्युत प्रवृत्ति तथा परावैद्युत्तांक में निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है

$$\chi_e = \in_0(\in_r - 1) \qquad \ldots(4.12)$$

4.8.1 समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता जबकि प्लेटों के मध्य परावैद्युत पदार्थ पूर्णतः भरा हो (Capacitance of a Parallel Plate Capacitor if it is Completely Filled with a Dielecteric)



चित्र 4.12 पूर्णतः भरा संधारित्र

चित्र (4.12) के अनुसार यदि एक संधारित्र जिसकी प्लेटों का क्षेत्रफल A एवं प्लेटों के मध्य दूरी d है को पूर्णतः परावैद्युत माध्यम से भरा जाता है जिसका परावैद्युतांक $\in_r$ है तब प्लेटों के मध्य परिणामी विद्युत क्षेत्र

$$E = \frac{\sigma}{\in_0 \in_r} = \frac{Q}{A \in_0 \in_r} \qquad \ldots(4.13)$$

अतः प्लेटों के मध्य विभवान्तर

$$V = Ed = \frac{Qd}{A \in_0 \in_r}$$

तथा धारिता

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Qd / A \in_0 \in_r}$$

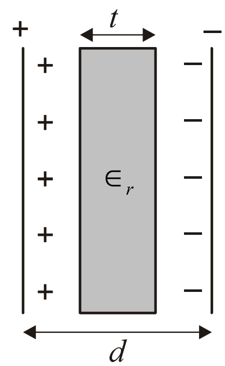
या $$C = \frac{A \in_0 \in_r}{d} = \in_r C_0 \qquad \ldots(4.14)$$

जहाँ $C_0 = \frac{\in_0 A}{d}$ प्लेटों के मध्य केवल वायु या निर्वात होने पर धारिता है।

स्पष्टतः परावैद्युत पदार्थ पूर्णतः भरने पर, प्लेटों के मध्य विभवान्तर में $\in_r$ गुना कमी तथा धारिता में $\in_r$ गुना वृद्धि होती है। यद्यपि यह परिणाम समान्तर प्लेट संधारित्र के लिए ज्ञात किया गया है पर व्यापक रूप में किसी भी आकृति के संधारित्र के लिए सत्य है।

4.8.2 समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता जबकि परावैद्युत पदार्थ अंशतः भरा हो (Capacitance of Parallel Plate Capacitor Partially Filled with a Dielectric)

माना एक संधारित्र की प्लेटों के मध्य $\in_r$ परावैद्युतांक वाले पदार्थ की t मोटाई की पट्टिका रखी है (जहाँ $t<d$) (देखें चित्र 4.13)। इस स्थिति में प्लेटों के मध्य वायु भाग की मोटाई $(d-t)$ होगी।



चित्र 4.13 आंशिक रूप से धारा संधारित्र

यदि वायु भाग में विद्युत क्षेत्र $E_0 = \frac{\sigma}{\in_0} = \frac{Q}{A \in_0}$ है तो माध्यम भाग में विद्युत क्षेत्र $E_0 / \in_r$ होगा तथा प्लेटों के मध्य प्रभावी विभवान्तर

$V =$ वायु भाग में विभवान्तर + माध्यम भाग में विभवान्तर

या $$V = E_0 (d-t) + \frac{E_0}{\in_r} t$$

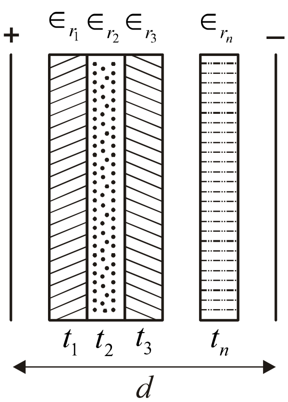
या $$V = E_0 \left[d - t + \frac{t}{\in_r} \right] = \frac{Q}{A \in_0} \left[d - t + \frac{t}{\in_r} \right]$$

अतः धारिता $$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{A \in_0} \left[d - t + \frac{t}{\in_r} \right]}$$

या $$C = \frac{A \in_0}{(d - t + t/\in_r)} = \frac{A \in_0}{\left[d - t(1 - 1/\in_r) \right]} \qquad \ldots(4.15)$$

पुनः यदि $t = d$ अर्थात् प्लेटों के मध्य परावैद्युत पदार्थ पूर्णतः भरा हो तो $C = \frac{A \in_0 \in_r}{d} = \in_r C_0$ यह समीकरण (4.14) में प्राप्त परिणाम ही है तथा यदि $t = 0$ अर्थात् परावैद्युत अनुपस्थित है तब $C = \frac{A \in_0}{d}$ जो कि प्रत्याशित है।

4.8.3 समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता जबकि विभिन्न मोटाई के भिन्न–भिन्न परावैद्युत पदार्थ भरे हो (Capacitance of a Parallel Plate Capacitor Filled with Different Dielectrics of Different Thickness)



चित्र 4.14 संधारित्र में भिन्न–भिन्न परावैद्युत पदार्थ

यदि चित्र 4.14 के अनुसार, समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य $\in_{r_1}, \in_{r_2}, \in_{r_3}, ... \in_{r_n}$ परावैद्युतांक वाले भिन्न–भिन्न पदार्थों की क्रमशः $t_1, t_2, t_3, ... t_n$ मोटाई की पट्टियाँ भरी है तो प्लेटों के मध्य शेष वायु भाग की मोटाई

$\left[d-(t_1+t_2+t_3+...+t_n)\right]$ होगी।

इस स्थिति में प्लेटों के मध्य प्रभावी विभवान्तर

V = वायुभाग में विभवान्तर + विभिन्न माध्यमों का विभवान्तर

या $$V = E_0\left[d-(t_1+t_2+t_3+...+t_n)\right] + \frac{E_0}{\in_{r_1}}t_1 + \frac{E_0}{\in_{r_2}}t_2 + \frac{E_0}{\in_{r_3}}t_3 + ... + \frac{E_0}{\in_{r_n}}t_n$$

जहाँ $E_0 = \frac{\sigma}{\in_0} = \frac{Q}{A\in_0}$, वायु भाग में विद्युतक्षेत्र है।

या $$V = E_0\left[d-(t_1+t_2+...+t_n) + \frac{t_1}{\in_{r_1}} + \frac{t_2}{\in_{r_2}} + \frac{t_3}{\in_{r_3}} + ... + \frac{t_n}{\in_{r_n}}\right]$$

या $$V = \frac{Q}{A\in_0}\left[d-(t_1+t_2+...+t_n) + \frac{t_1}{\in_{r_1}} + \frac{t_2}{\in_{r_2}} + \frac{t_3}{\in_{r_3}} + ... + \frac{t_n}{\in_{r_n}}\right]$$

अतः धारिता

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A\in_0}{\left[d-(t_1+t_2+t_3+...+t_n) + \frac{t_1}{\in_{r_1}} + \frac{t_2}{\in_{r_2}} + \frac{t_3}{\in_{r_3}} + ... + \frac{t_n}{\in_{r_n}}\right]} \quad ...(4.16)$$

यदि $(t_1+t_2+t_3+...+t_n) = d$ हो अर्थात् प्लेटों के मध्य वायु भाग शेष न हो तो धारिता

$$C = \frac{A\in_0}{\frac{t_1}{\in_{r_1}} + \frac{t_2}{\in_{r_2}} + \frac{t_3}{\in_{r_3}} + ... + \frac{t_n}{\in_{r_n}}} \quad ...(4.17)$$

उदाहरण 4.9 एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेट का क्षेत्रफल 100 वर्ग सेमी. तथा प्लेटों के मध्य दूरी 1 mm है। संधारित्र को 120 वोल्ट की बैटरी से संयोजित करने पर 0.12 μC आवेश संचित होता है। प्लेटों के मध्य भरे पदार्थ का परावैद्युतांक ज्ञात कीजिए।

हल: ∵ धारिता $C = \frac{Q}{V} = \frac{A\in_0\in_r}{d}$

अतः $$\in_r = \frac{Qd}{A\in_0 V} = \frac{0.12\times10^{-6}\times1\times10^{-3}}{100\times10^{-4}\times8.85\times10^{-12}\times120}$$

$$= 0.001129\times10^4$$

या $\in_r = 11.3$

उदाहरण 4.10 एक समान्तर प्लेट संधारित्र, जिसकी प्लेट का क्षेत्रफल $2\times10^{-2}\,m^2$ है तथा प्लेटों के मध्य दूरी 0.01 m है, की प्लेटों के मध्य 6 mm मोटाई की ऐबोनाईट प्लेट (परावैद्युतांक=3) रखी जाती है। संधारित्र की धारिता कितनी होगी?

हल: ∵ $$C = \frac{A\in_0}{d-t+\frac{t}{\in_r}}$$

$$= \frac{2\times10^{-2}\times8.85\times10^{-12}}{0.01-6\times10^{-3}+\frac{6\times10^{-3}}{3}}$$

$$C = \frac{17.70\times10^{-14}}{0.01-4\times10^{-3}} = \frac{17.70\times10^{-14}}{0.01-0.004} = \frac{17.70\times10^{-14}}{0.006}$$

$C = 2.95\times10^{-11}F = 29.5\times10^{-12}F = 29.5\,pF$

उदाहरण 4.11 एक समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता C है। इसकी प्लेटों के मध्य दूरी d है। यदि प्लेटों के मध्य $3/4\,d$ दूरी में एक $\in_r$ परावैद्युतांक वाला पदार्थ भरा जाए तो संधारित्र की धारिता क्या होगी?

हल: $$C' = \frac{A\in_0}{d - t + \frac{t}{\in_r}}$$

दिया है $t = \frac{3}{4}d$

$$\therefore \quad C' = \frac{A\in_0}{d - \frac{3d}{4} + \frac{3d}{4\in_r}} = \frac{A\in_0}{\frac{d}{4} + \frac{3d}{4\in_r}} = \frac{A\in_0}{\frac{d}{4\in_r}(\in_r + 3)}$$

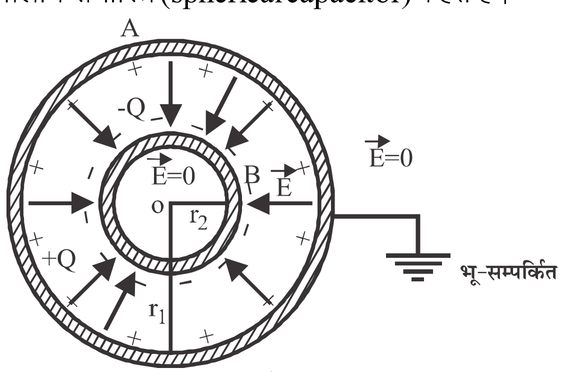
या $$C' = \frac{4\in_r A\in_0}{d(\in_r + 3)} = \frac{4\in_r}{\in_r + 3}C$$

$$\because \quad C = \frac{A\in_0}{d}$$

अतः संधारित्र की धारिता $\frac{4\in_r}{(\in_r + 3)}$ गुना हो जायेगी।

4.9 गोलीय संधारित्र की धारिता (Capacitance of Spherical Capacitor)

परस्पर समान एवं विपरीत प्रकृति के आवेश से युक्त लगभग समान आकार वाले संकेन्द्री चालक गोलों से बनी हुई युक्ति को गोलीय संधारित्र (spherical capacitor) कहते हैं।



चित्र 4.15 गोलीय संधारित्र

चित्र 4.15 में गोलीय संधारित्र प्रदर्शित है। आन्तरिक गोला जो कि बाह्य गोले से घिरा होता है, ठोस या खोखला हो सकता है। गोलीय चालकों A तथा B की त्रिज्यायें क्रमशः r_1 व r_2 एवं जिनका केन्द्र 0 हैं। यदि अन्दर वाले गोले को $-Q$ आवेश दिया जाता है तब प्रेरण द्वारा बाहरी गोले के अन्दर के पृष्ठ पर $+Q$ आवेश उत्पन्न हो जाता है, परन्तु बाह्य गोले का बाह्य पृष्ठ भू–सम्पर्कित होने के कारण इस पर स्थित $-Q$ आवेश पृथ्वी द्वारा निरस्त कर दिया जाता है।

गोले B के पृष्ठ पर स्वयं के आवेश $-Q$ के कारण विभव

$$V_B = \frac{1}{4\pi\in_0}\cdot\frac{(-Q)}{r_2} \qquad \ldots(4.18)$$

धातु के खोखले गोले के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विभव वही रहता है जो उसके पृष्ठ पर होता है, अतः गोले B के पृष्ठ पर गोले A के आवेश के कारण विभव

$$V'_B = \frac{1}{4\pi\in_0}\cdot\frac{(+Q)}{r_1} \qquad \ldots(4.19)$$

अतः गोले B पर परिणामी विभव

$$V = V_B + V'_B$$

या $$V = \frac{Q}{4\pi\in_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\in_0 r_2}$$

या $$V = \frac{Q}{4\pi\in_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

या $$V = -\frac{Q}{4\pi\in_0}\left[\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right] \qquad \ldots(4.20)$$

गोले A का बाह्य पृष्ठ भू–सम्पर्कित होने से इसके बाह्य पृष्ठ पर विभव शून्य होगा। अतः A व B के मध्य विभवान्तर

$$V_{AB} = 0 - V$$

या $$V_{AB} = 0 - \left[\frac{-Q}{4\pi\in_0}\frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}\right]$$

या $$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\in_0}\frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \qquad \ldots(4.21)$$

अतः यदि निर्वात के लिये इस गोलीय संधारित्र की धारिता C_0 है तो

$$C_0 = \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\in_0}\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right)}$$

या $$C_0 = 4\pi\in_0\left(\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}\right) \qquad \ldots(4.22)$$

स्पष्ट है कि गोलीय संधारित्र की धारिता गोलों के आकार पर निर्भर करती है तथा धारिता बढ़ाने के लिये लगभग समान त्रिज्या के समुचित आकार के गोले प्रयुक्त किये जाने चाहिये।

यदि दोनों गोलों के मध्य $\in_r$ परावैद्युतांक वाला पदार्थ भरा हो तब माध्यम के लिये

या $$C_m = \in_r 4\pi \in_0 \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}\right) \Rightarrow C_m = \in_r C_0$$

समीकरण 4.22 से यह भी स्पष्ट है कि

(i) यदि $r_2 = R$ तथा $r_1 = \infty$ तब $C_0 = 4\pi \in_0 R$ जो कि एक गोलीय चालक की धारिता का सूत्र है। अतः तुल्य रूप से एक गोलीय चालक ऐसा गोलीय संधारित्र है जिसकी एक प्लेट अनन्त पर भूसंपर्कित मानी गई है।

(ii) यदि r_1 व r_2 दोनों का मान बहुत बड़ा लिया जाए जब $r_1 - r_2 = d$ नियत रहे तब पर $r_1 r_2 \approx 4\pi r^2 = A$ (गोले का क्षेत्रफल) माना जा सकता है।

उदाहरण 4.12 एक गोलीय संधारित्र के बाहरी एवं भीतरी गोलों की त्रिज्यायें क्रमशः 2 m तथा 1 m है। परावैद्युतांक $\in_r = 8$ वाला काँच दोनों गोलों के मध्य भरा है। संधारित्र की धारिता ज्ञात करो।

हलः गोलीय संधारित्र की धारिता

$$C_m = \frac{4\pi \in_0 \in_r r_1 r_2}{(r_1 - r_2)}$$

यहाँ $r_1 = 2\,\text{m},\ r_2 = 1\,\text{m},\ \in_r = 8$

$$C_m = \frac{1}{9\times10^9}\frac{8\times2\times1}{(2-1)}$$

$$C_m = \frac{16}{9}\times10^{-9}\ \text{F}$$

$$C_m = 1.78\times10^{-9}\ F = 1.78\,\text{nF}$$

4.10 संधारित्रों का संयोजन (Combination of Capacitors)

परिपथों में भिन्न–भिन्न वांछित धारिता एवं विभवान्तर की आवश्यकता को ध्यान में रखते हुये संधारित्रों के संयोजन की आवश्यकता होती है। संधारित्रों के संयोजन निम्न प्रकार हो सकते हैं

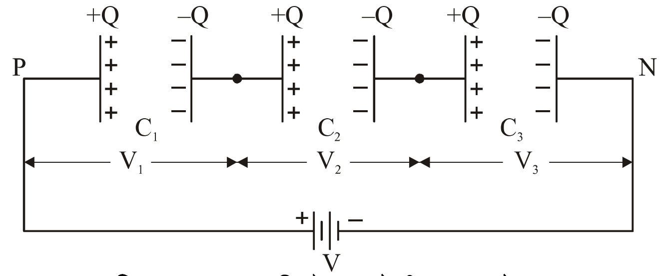
(अ) श्रेणीक्रम संयोजन (ब) समान्तर क्रम संयोजन

4.10.1 श्रेणीक्रम संयोजन (Series Combination)

यदि संधारित्रों में इस प्रकार संयोजित किया जाए कि पहले संधारित्र की द्वितीय प्लेट दूसरे संधारित्र की प्रथम प्लेट से, दूसरे संधारित्र की द्वितीय प्लेट तीसरे संधारित्र की प्रथम प्लेट से एवं अन्य संधारित्रों को भी इसी प्रकार जोड़ा जाता है तो इसे संधारित्रों का श्रेणी क्रम संयोजन करते है। प्रत्येक संधारित्र पर आवेश का परिमाण एकसमान रहता है।

चित्र 4.16 के अनुसार संधारित्रों के श्रेणीक्रम संयोजन में प्रथम संधारित्र की प्रथम प्लेट को विद्युत आवेश स्रोत के धन सिरे और दूसरी प्लेट को द्वितीय संधारित्र की प्रथम प्लेट से, फिर द्वितीय संधारित्र की द्वितीय प्लेट को तृतीय संधारित्र की प्रथम प्लेट से जोड़ते हैं।

इस प्रकार कई संधारित्रों का संयोजन किया जा सकता है। अंतिम संधारित्र की द्वितीय प्लेट को आवेश स्रोत के ऋणाग्र से जोड़ा जाता है।



चित्र 4.16 संधारित्रों का श्रेणीक्रम संयोजन

चित्र में C_1, C_2 व C_3 धारिता वाले संधारित्रों का श्रेणीक्रम संयोजन दर्शाया गया है।

माना प्रथम संधारित्र की प्रथम प्लेट को स्रोत से $+Q$ आवेश दिया जाता है तब प्रेरण के कारण इसकी द्वितीय प्लेट के अन्दर की सतह पर $-Q$ आवेश तथा बाह्य सतह पर $+Q$ आवेश उत्पन्न हो जाता है यह $+Q$ आवेश द्वितीय संधारित्र की प्रथम प्लेट पर पहुँच जाता है जिससे द्वितीय संधारित्र की द्वितीय प्लेट के अन्दर की सतह पर $-Q$ तथा बाहर की सतह पर $+Q$ आवेश प्रेरित हो जाता है। अतः प्रत्येक संधारित्र की प्रथम प्लेट पर $+Q$ आवेश तथा द्वितीय प्लेट पर $-Q$ आवेश उत्पन्न हो जाता है। प्रत्येक संधारित्र पर आवेश का परिमाण समान रहता है परन्तु संधारित्रों की धारितायें भिन्न–भिन्न होने के कारण संधारित्र की प्लेटों के मध्य विभवान्तर भिन्न–भिन्न होते हैं माना ये क्रमशः V_1, V_2 व V_3 हैं। तब

$$V_1 = \frac{Q}{C_1},\ V_2 = \frac{Q}{C_2} \text{ तथा } V_3 = \frac{Q}{C_3}$$

यदि P व N बिन्दुओं के मध्य कुल विभवान्तर V है तब

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \qquad \ldots(4.23)$$

यदि संयोजन की कुल (तुल्य) धारिता C_S है तब

$$V = \frac{Q}{C_S} \qquad \ldots(4.24)$$

तब $$\frac{Q}{C_S} = Q\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right]$$

या $$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \qquad \ldots(4.25)$$

इसी प्रकार n संधारित्रों के संयोजन की तुल्य धारिता

$$\frac{1}{C_S}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\ldots+\frac{1}{C_n} \qquad \ldots(4.26)$$

स्पष्ट है कि–

(अ) श्रेणीक्रम संयोजन की तुल्य धारिता का व्युत्क्रम, संयोजन में लगे सभी संधारित्रों की अलग–अलग धारिताओं के व्युत्क्रमों के योग के बराबर होती है।

(ब) तुल्य धारिता का मान श्रेणीक्रम में जुड़े सबसे कम धारिता वाले संधारित्र की धारिता से भी कम प्राप्त होता है।

महत्वपूर्ण तथ्य (Important Facts)

1. विद्युत परिपथ में संधारित्रों का श्रेणीक्रम संयोजन तभी काम में लेते हैं जब किसी उच्च विभव को संधारित्रों में विभाजित करना हो या उपलब्ध संधारित्रों से भी कम धारिता वाला संधारित्र बनाना हो।

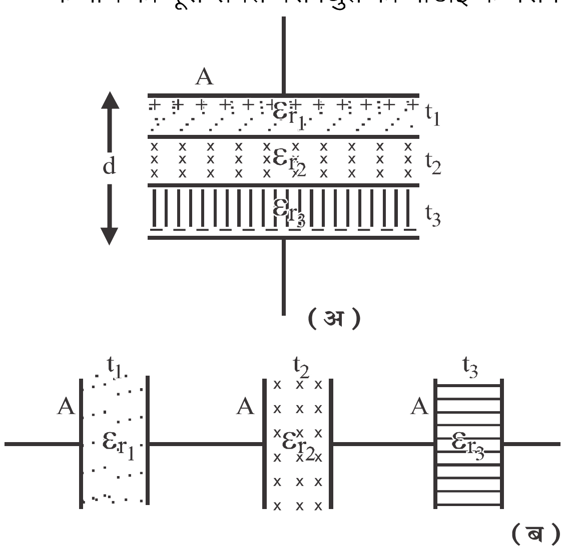
2. श्रेणीक्रम में लगे सभी संधारित्रों पर आवेश का परिमाण समान होता है चाहे धारिता कुछ भी हो अतः

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 : \ldots = 1:1:1:\ldots$$

3. समान धारिता C के n संधारित्रों की श्रेणीक्रम संयोजन की तुल्य धारिता एक संधारित्र की धारिता एवं संधारित्रों की संख्या के अनुपात के बराबर होती है अर्थात्

$$C_S=\frac{C}{n}$$

4. यदि संधारित्र की प्लेटों के मध्य $\in_{r_1}, \in_{r_2}, \in_{r_3} \ldots$ परावैद्युतांक की कई पट्टियाँ चित्र 4.17 में दर्शाए अनुसार प्लेटों के समान्तर रखी हैं तब यह संधारित्र उसी संधारित्र की प्लेटो के मध्य उन पट्टियों को अलग–अलग रखकर बने संधारित्रों के श्रेणीक्रम संयोजन के बराबर माना जाता है। जिनमें प्रत्येक का प्लेट क्षेत्रफल A समान है किन्तु प्लेटों के बीच की दूरी संगत परावैद्युत की मोटाई के बराबर है।



चित्र 4.17 विभिन्न परावैद्युतांक के संधारित्र का श्रेणीक्रम

$$C_1=\frac{\in_{r_1}\in_0 A}{t_1},\quad C_2=\frac{\in_{r_2}\in_0 A}{t_2}$$

तथा $$C_3=\frac{\in_{r_3}\in_0 A}{t_3}$$

$$\frac{1}{C_S}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}$$

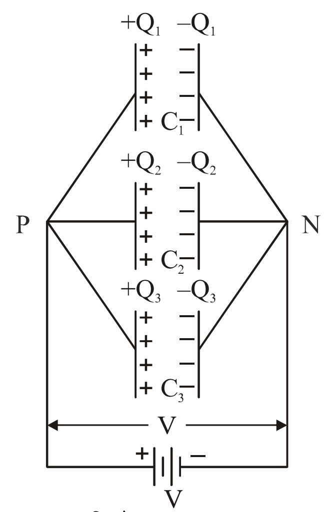
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{C_S}=\frac{t_1}{\in_{r_1}\in_0 A}+\frac{t_2}{\in_{r_2}\in_0 A}+\frac{t_3}{\in_{r_3}\in_0 A}$$

या $$\frac{1}{C_S}=\frac{1}{\in_0 A}\left[\frac{t_1}{\in_{r_1}}+\frac{t_2}{\in_{r_2}}+\frac{t_3}{\in_{r_3}}\right]$$

या $$C_S=\frac{\in_0 A}{\frac{t_1}{\in_{r_1}}+\frac{t_2}{\in_{r_2}}+\frac{t_3}{\in_{r_3}}}$$

4.10.2 पार्श्वक्रम या समान्तर क्रम संयोजन (Parallel Combination)

संधारित्रों का ऐसा संयोजन जिसमें प्रत्येक संधारित्र पर विभवान्तर का मान एकसमान हो, उसे समान्तर क्रम संयोजन कहते हैं। यदि संधारित्रों को इस प्रकार संयोजित करें कि उन सभी को पहली प्लेटें एक बिन्दु पर तथा दूसरी प्लेटे एक साथ अन्य बिन्दु पर जुड़ी होतो इसे संधारित्रों या समान्तर क्रम संयोजन कहते हैं।



चित्र 4.18 संधारित्रों का समान्तर क्रम संयोजन

संधारित्रों के समान्तर क्रम संयोजन में प्रत्येक संधारित्र की प्रथम प्लेट को उच्च विभव बिन्दु P तथा द्वितीय प्लेट को निम्न विभव बिन्दु N से जोड़ते हैं।

चित्र 4.18 में तीन संधारित्र जिनकी धारितायें क्रमशः C_1, C_2 व C_3 हैं, को समान्तर क्रम में संयोजित दर्शाया गया है।

बिन्दु P को स्रोत के धन सिरे से तथा N को स्रोत के ऋण सिरे से जोड़ा जाता है। इस प्रकार प्रत्येक संधारित्र की प्लेटों के मध्य विभवान्तर स्रोत (बैटरी) के विभवान्तर V के बराबर होता है।

माना बिन्दु P को किसी स्रोत द्वारा $+Q$ आवेश दिया जाता है यह आवेश तीनों संधारित्रों की प्रथम प्लेट पर उनकी धारिताओं के अनुसार बँट जाता है माना ये आवेश क्रमशः Q_1, Q_2 व Q_3 हैं। प्रेरण के कारण संधारित्रों की द्वितीय प्लेटों की अन्दर की सतह पर उतना ही (समान परिमाण) ऋण आवेश तथा बाह्य सतह पर धनावेश उत्पन्न होता है परन्तु बाह्य सतह वाले ऋणावेश बैटरी के ऋण सिरे में चले जाते हैं। तब

$$Q_1 = C_1V,\ Q_2 = C_2V \text{ तथा } Q_3 = C_3V$$

तब कुल आवेश $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

या $$Q = C_1V + C_2V + C_3V$$

या $$Q = (C_1 + C_2 + C_3)V \qquad \ldots(4.27)$$

यदि समान्तर क्रम संयोजन की कुल धारिता (तुल्य धारिता) C_P हो तब

$$Q = C_PV \qquad \ldots(4.28)$$

समीकरण (4.27) तथा (4.28) से

$$C_PV = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

या $$C_P = C_1 + C_2 + C_3 \qquad \ldots(4.29)$$

n संधारित्रों के समान्तर क्रम संयोजन के लिये

$$C_P = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n \qquad \ldots(4.30)$$

स्पष्ट है कि–

(अ) संधारित्रों को समान्तर क्रम में संयोजित करने पर संयोजन की तुल्य धारिता, प्रत्येक संधारित्र की धारिता के योग के बराबर होती है।

(ब) संधारित्रों के समान्तर क्रम में तुल्य धारिता, संयोजन में लगे सबसे अधिक धारिता वाले संधारित्र की धारिता से भी अधिक होती है।

महत्वपूर्ण तथ्य (Important Facts)

1. विद्युत परिपथ में संधारित्रों का समान्तर क्रम संयोजन तभी काम में लेते हैं जब साधारण विभव पर अधिक धारिता की आवश्यकता हो या साधारण विभव पर अधिक मात्रा में आवेश का संचय करना हो अथवा उपलब्ध संधारित्रों की धारिता से भी अधिक धारिता प्राप्त करनी हो।

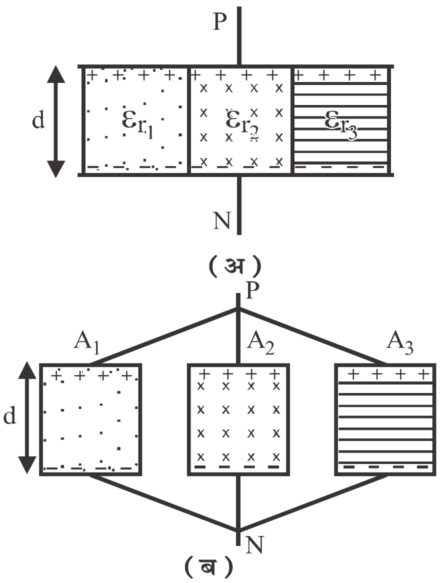
2. समान्तर क्रम संयोजन में प्रत्येक संधारित्र का विभवान्तर समान होता है और यह स्रोत (बैटरी) के विभवान्तर के बराबर होता है। अतः

$$V_1 : V_2 : V_3 : \ldots = 1 : 1 : 1 : \ldots$$

3. समान धारिता C के n संधारित्रों की समान्तर क्रम संयोजन की तुल्य धारिता, एक संधारित्र की धारिता के n गुना होती है।

$$C_P = nC$$

4. यदि संधारित्र की प्लेटों के मध्य समान मोटाई d के $\in_{r_1}, \in_{r_2}, \in_{r_3} \ldots$ परावैद्युतांक वाले पदार्थ चित्र 4.19 में दर्शाए अनुसार रखे जायें तब इनको समान्तर क्रम में जुड़े संधारित्रों के तुल्य माना जा सकता है। यहाँ A_1, A_2, A_3 क्रमशः परावैद्युत पट्टियों के क्षेत्रफल है।



चित्र 4.19 विभिन्न परावैद्युतांको से युक्त संधारित्र का तुल्य समान्तर क्रम

इनकी धारिताएँ क्रमशः

$$C_1 = \frac{\in_{r_1}\in_0 A_1}{d},\ C_2 = \frac{\in_{r_2}\in_0 A_2}{d}$$

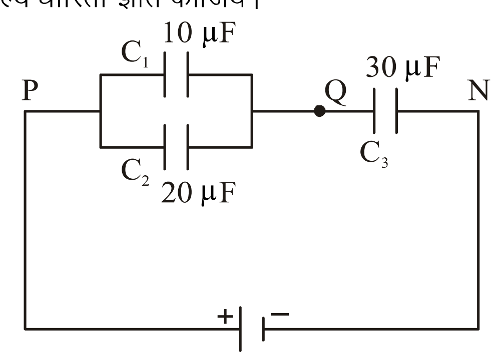
तथा $$C_3 = \frac{\in_{r_3}\in_0 A_3}{d}$$

समान्तर क्रम संयोजन से तुल्य धारिता

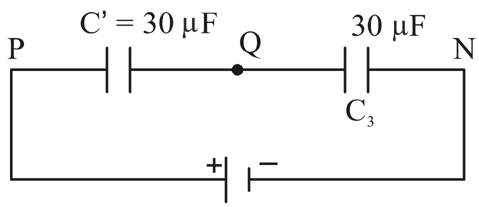
$$C_P = C_1 + C_2 + C_3$$

या $$C_P = \frac{\in_0}{d}\left[A_1\in_{r_1} + A_2\in_{r_2} + A_3\in_{r_3}\right]$$

उदाहरण 4.13 चित्र में दर्शाये गये संयोजन की बिन्दु P व N के मध्य तुल्य धारिता ज्ञात कीजिये।



हलः यहाँ 10 μF तथा 20 μF मान के संधारित्र समान्तर क्रम में जुड़े हुये हैं अतः इनकी तुल्य धारिता $C' = 10 + 20 = 30\,\mu F$ फलस्वरूप 10 μF तथा 20 μF के संधारित्रों को 30 μF मान के संधारित्र से प्रतिस्थापित कर सकते हैं। यह प्रतिस्थापित संधारित्र, पहले से लगे एये 30 μF (C_3) संधारित्र के श्रेणीक्रम में है। अतः संयोजन की तुल्य धारिता C होगी

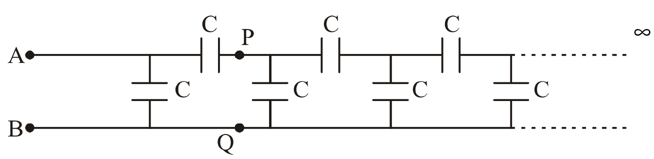


$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}$$

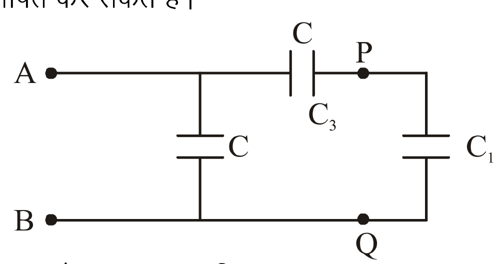
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{2}{30}$$

$$C = 15\,\mu F$$

उदाहरण 4.14 C धारिता वाले अनेक संधारित्र चित्र में दर्शाये अनुसार अनन्त संख्या में संयोजित हैं। बिन्दु A तथा B के मध्य कुल धारिता का मान ज्ञात कीजिये।



हलः चूँकि श्रेणी अनन्त लम्बाई की है अतः बिन्दुओं P व Q के दाहिनी ओर की श्रेणी की धारिता का मान उतना ही होगा जो कि श्रेणी के बिन्दुओं A व B के दाहिनी ओर है। यदि श्रेणी की तुल्य धारिता C_1 हो तो चित्र के संयोजन को नीचे दिए गए चित्र द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते हैं।



अतः A व B के मध्य तुल्य धारिता

$$C_1 = C + \frac{CC_1}{C + C_1}$$

$$C_1 = \frac{C(C + C_1) + CC_1}{(C + C_1)}$$

$$C_1^2 - CC_1 - C^2 = 0$$

$$C_1 = \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 4C^2}}{2} = \frac{C \pm \sqrt{5C^2}}{2}$$

$$C_1 = \frac{C\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$$

अर्थात् $C_1 = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)C}{2}$ या $C_1 = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)C}{2}$

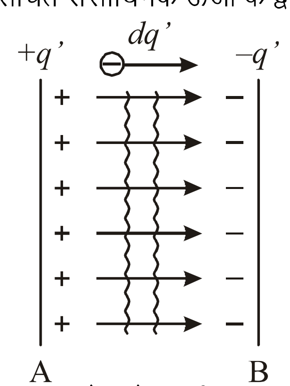
परन्तु धारिता का मान सदैव धनात्मक होता है अतः दिये गये संयोजन की तुल्य धारिता

$$C_1 = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)C}{2}$$

4.11 संधारित्र में संचित ऊर्जा (Energy Stored in a Capacitor)

जैसाकि पूर्व में उल्लेखित किया जा चुका है संधारित्रों का एक महत्वपूर्ण उपयोग विद्युत ऊर्जा संचय युक्ति की तरह है। इस अनुभाग में हम संधारित्र में ऊर्जा संचय के बारे में विस्तार से जानकारी प्राप्त करेंगे।

पिछले अध्याय में हम देख चुके है कि किसी भी आवेश संरचना के साथ कुछ स्थिर वैद्युत स्थितिज ऊर्जा U संबंद्ध होती है जो कि इस आवेश संरचना को इसके व्यक्तिगत आवेशों (जो प्रारंभ में एक दूसरे से अनन्त दूरी पर विराम में माने जाते है) से निर्मित करने के प्रक्रम में किसी बाह्य कर्त्ता द्वारा किए गए कार्य के बराबर होती है। इसी प्रकार एक संधारित्र में भी स्थिर वैद्युत ऊर्जा संग्रहित होती है जो इसके आवेशन में किसी बाह्य कर्त्ता द्वारा किए गए कार्य के बराबर होती है। आवेशन की प्रक्रिया को समझने के लिए हम कल्पना कर सकते है कि कोई बाह्य कर्त्ता संधारित्र की धनात्मक प्लेट से इलेक्ट्रॉन हटाकर इन्हें ऋणात्मक प्लेट में धकेल रहा है तथा इस प्रकार आवेश पृथक्करण हो रहा है। सामान्यतः आवेशन का यह कार्य बैटरी द्वारा इसमें संचित रासायनिक ऊर्जा के द्वारा किया जाता है।



चित्र 4.20 संधारित्र एक प्लेट से दूसरी तक लघु चरणों में आवेश स्थानांतरण की कल्पना

माना किसी क्षण t पर आवेश q' पहले से ही किसी एक प्लेट से दूसरी को स्थानांतरित हो चुका है। इस क्षण संधारित्र की प्लेटों के मध्य विभवान्तर $V^1 = \frac{q'}{C}$ है।

अब dq'आवेश और स्थानांतरित करने में किया गया कार्य

$$dW = V'dq' \qquad \ldots(4.31)$$

यह कार्य स्थितिज ऊर्जा के रूप में संधारित्र में संचित हो जायेगा। संधारित्र को शून्य से Q आवेश देने में किया गया कुल कार्य

$$W = \int_0^Q V'dq'$$

या $$W = \int_0^Q \frac{q'}{C}dq'$$

या $$W = \frac{1}{C}\int_0^Q q'dq$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{C}\left[\frac{q'^2}{2}\right]_0^Q$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

अतः आवेशित संधारित्र में संचित ऊर्जा $U = W$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad \ldots(4.32)$$

समीकरण (4.32) में $Q = CV$ रखने पर

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \qquad \ldots(4.33)$$

तथा समीकरण (4.32) में $\frac{Q}{C} = V$ रखने पर

$$U = \frac{1}{2}QV \qquad \ldots(4.34)$$

अतः आवेशित संधारित में संचित ऊर्जा

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

यही सूत्र किसी आवेशित चालक की विद्युत स्थितिज ऊर्जा होती है। U के लिए उपर्युक्त उल्लेखित समीकरणे यह प्रदर्शित नही करती है कि यह स्थितिज ऊर्जा कहाँ होती है तर्क के आधार पर समझा सकते है कि यह ऊर्जा संधारित्र के विद्युत क्षेत्र में विद्यमान होती है। मान लीजिए हमारे पास दो संधारित्र 1 व 2 है जिनका प्लेट क्षेत्रफल A समान है पर संधारित्र 1 का प्लेट पार्थक्य संधारित्र 2 की तुलना में दो गुना है। अतः संधारित्र 1 की धारिता संधारित्र 2 की आधी होगी। यदि दोनो संधारित्रों पर आवेश समान माना q है तब दोनो ही प्लेटो के मध्य विद्युत क्षेत्र $E = \frac{q}{\in_0 A}$ भी समान होगा। अब धारिता में अन्तर होने के कारण समीकरण 4.32 से स्पष्ट है कि संधारित्र 1 में संधारित्र 2 से दो गुनी स्थितिज ऊर्जा संग्रहित है। संधारित्र 1 की प्लेटो के मध्य के स्थान का आयतन भी संधारित्र 2 से दो गुना है। अतः समान q के लिए आयतन दो गुना होने पर स्थितिज ऊर्जा को दो गुना होने से यह निष्कर्ष निकालना औचित्य पूर्ण है कि ऊर्जा इस आयतन में ही संचित है किन्तु इस संपूर्ण आयतन में विद्युत क्षेत्र उपस्थित है अतः ऊर्जा इस आयतन में उपस्थित विद्युत क्षेत्र से संबंद्ध मानी जा सकती है।

4.11.1 समान्तर प्लेट संधारित्र के लिए विद्युत क्षेत्र का ऊर्जा घनत्व (Energy Density of a Parallel Plate Capacitor)

यदि समान्तर प्लेट संधारित्र की प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल A हो तथा उसकी प्लेटों को Q आवेश दिया जाता है तब उसकी प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र

$$E = \frac{\sigma}{\in_0} = \frac{Q}{\in_0 A}$$

$$Q = \in_0 EA$$

आवेशित संधारित्र की ऊर्जा $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

परन्तु $$C = \frac{\in_0 d}{d}$$

तब $$U = \frac{1}{2}\frac{(\in_0 EA)^2}{\left(\frac{\in_0 A}{d}\right)}$$

$$U = \frac{1}{2}\in_0 E^2 Ad$$

परन्तु Ad = प्लेटों के मध्य आयतन (V_l)

या $$U = \frac{1}{2}\in_0 E^2 V_l$$

अतः ऊर्जा घनत्व u = एकांक आयतन की ऊर्जा

$$u = \frac{U}{V_l} = \frac{1}{2}\in_0 E^2 \qquad \ldots(4.35)$$

यद्यपि समीकरण (4.35) एक समान्तर प्लेट संधारित्र के प्रकरण हेतु व्युत्पन्न की गई है पर यह व्यापक रूप से किसी भी संरक्षी विद्युत क्षेत्र के लिए सही है। अतः किसी स्थान जहाँ विद्युत क्षेत्र उपस्थित है के लिए u प्रतिएकांक आयतन वैद्युत स्थितिज ऊर्जा

$\frac{1}{2}\in_0 E^2$ से दी जाएगी। समान्तर प्लेट संधारित्र के प्रकरण में E एक समान है अतः u भी एक समान होगी। व्यापक रूप में E स्थिति के साथ बदल सकता है अतः u भी निर्देशांको का फलन होगी।

उदाहरण 4.15 समान्तर प्लेट संधारित्र के प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल 90 cm² है तथा उनके मध्य की दूरी 2.5 mm है। इसको 400 V आपूर्ति से जोड़कर आवेशित किया जाता है। संधारित्र द्वारा संचित स्थिर विद्युत ऊर्जा का मान ज्ञात करो।

हल: यहाँ $A = 90\,\text{cm}^2 = 90\times10^{-4}\,\text{m}^2$

$$d = 2.5\,\text{mm} = 2.5\times10^{-3}\,\text{m}$$

$$V = 400\,\text{V}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

यहाँ $$C = \frac{\in_0 A}{d} = \frac{8.85\times10^{-12}\times90\times10^{-4}}{2.5\times10^{-3}}$$

या $$C = 3.18\times10^{-11}F = 31.8\,p\,\text{F}$$

$\therefore$ $$U = \frac{1}{2}\times3.18\times10^{-11}\times(400)^2 = 2.54\times10^{-6}J$$

4.11.2 संधारित्रों के संयोजन में संचित ऊर्जा (Energy Stored in Combinations of Capacitors)

(अ) श्रेणीक्रम संयोजन: श्रेणीक्रम में जुड़े हुए $C_1, C_2, C_3,....,C_n$ धारिता वाले n संधारित्र हैं तब तुल्य धारिता

$$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+...+\frac{1}{C_n}$$

यहाँ सभी संधारित्रों पर आवेश समान Q है

तुल्य संधारित्र में संचित ऊर्जा $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_S}$

या $$U = \frac{Q^2}{2}\left[\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+...+\frac{1}{C_n}\right]$$

या $$U = \frac{Q^2}{2C_1}+\frac{Q^2}{2C_2}+\frac{Q^2}{2C_3}+...+\frac{Q^2}{2C_n}$$

या $$U = U_1+U_2+U_3+...+U_n$$

(ब) समान्तर क्रम संयोजन: समान्तर क्रम में जुड़े हुये $C_1, C_2, C_3,....,C_n$ धारिता वाले n संधारित्र हैं तब तुल्य धारिता

$$C_P = C_1+C_2+C_3+...+C_n$$

यहाँ सभी संधारित्रो पर विभव समान V है।

तुल्य संधारित्र में संचित ऊर्जा $U = \frac{1}{2}C_P V^2$

या $$U = \frac{1}{2}[C_1+C_2+C_3+...+C_n]V^2$$

या $$U = \frac{1}{2}C_1V^2+\frac{1}{2}C_2V^2+\frac{1}{2}C_3V^2+...+\frac{1}{2}C_nV^2$$

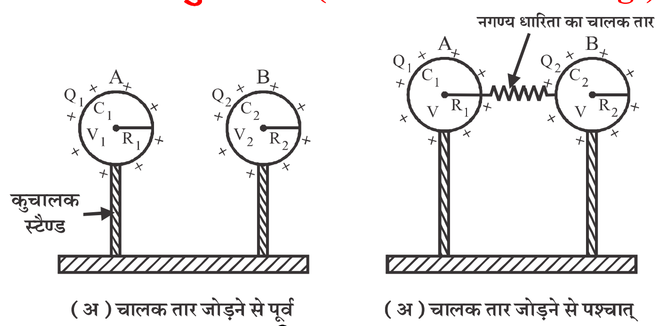
या $$U = U_1+U_2+U_3+...+U_n$$

स्पष्ट है कि श्रेणीक्रम या समानतर क्रम संयोजन में संचित कुल ऊर्जा का मान प्रत्येक संधारित्र में संचित ऊर्जाओं के योगफल के बराबर होता है।

4.12 आवेशित चालकों के संयोजन से आवेशों का पुनर्वितरण तथा ऊर्जा हानि (Redistribution of Charges and Loss of Energy by Combination of Charged Conductors)

दो आवेशित चालकों जो असमान विभव पर है को परस्पर संयोजित करने पर उनमें आवेश पुनर्वितरित होकर दोनों समान विभव पर हो जाते हैं। इस प्रक्रिया में एक निश्चित ऊर्जा की हानि भी होती है।

4.12.1 आवेश पुनर्वितरण (Redistribution of Charge)



चित्र 4.21

चित्र 4.21 के अनुसार माना दो विलगित चालकों A तथा B की त्रिज्यायें क्रमशः R_1 व R_2 तथा धारितायें क्रमशः C_1 व C_2 हैं। A को Q_1 आवेश देने पर विभव V_1 तथा B को Q_2 आवेश देने पर विभव V_2 हो जाता है।

चालक तार जोड़ने से पूर्व

$$Q_1 = C_1V_1 \qquad ...(4.36)$$

तथा $$Q_2 = C_2V_2 \qquad ...(4.37)$$

अतः दोनों चालकों पर आवेश की कुल मात्रा

$$Q = Q_1+Q_2$$

या $$Q = C_1V_1+C_2V_2 \qquad ...(4.38)$$

अब यदि दोनों चालकों को एक नगण्य धारिता वाले चालक तार से जोड़ दिया जाता है तब आवेश सदैव उच्च विभव वाले चालक

से निम्न विभव वाले चालक की ओर तब तक प्रवाहित होता है जब तक कि दोनों चालकों के विभव समान नहीं हो जाते हैं। यदि विद्युत साम्य में उभयनिष्ठ विभव V तथा चालकों पर आवेश क्रमशः Q'_1 तथा Q'_2 हैं तब इस स्थिति में दोनों चालकों को एक निकाय मानने पर कुल धारिता $C = C_1 + C_2$ होगी क्योंकि दोनों चालक के विभव समान होने पर दोनों चालक समान्तर क्रम में होंगे।

पुनर्वितरण के पश्चात आवेश

$$Q_1' = C_1 V \qquad \ldots(4.39)$$

तथा $$Q_2' = C_2 V \qquad \ldots(4.40)$$

तब पुनर्वितरण के पश्चात् कुल आवेश

$$\therefore \quad Q = Q_1' + Q_2' = (C_1 + C_2)V$$

आवेश संरक्षण नियम से

$$C_1V_1 + C_2V_2 = (C_1 + C_2)V$$

अतः उभयनिष्ठ विभव

$$V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2} \qquad \ldots(4.41)$$

तथा पुनर्वितरण के पश्चात् चालकों पर आवेशों का अनुपात

$$\frac{Q_1'}{Q_3'} = \frac{C_1V}{C_2V} = \frac{C_1}{C_2} \qquad \ldots(4.42)$$

अर्थात् आवेशों के पुनर्वितरण के पश्चात चालकों पर आवेशों का अनुपात उनकी धारिताओं के अनुपात में होता है।

यदि $\quad V_1 > V_2$

तब $\quad V_1 > V > V_2$

प्रथम चालक के विभव में परिवर्तन $\Delta V_1 = V_1 - V$

या $$\Delta V_1 = V_1 - \left(\frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}\right)$$

या $$\Delta V_1 = \frac{C_2(V_1 - V_2)}{C_1 + C_2} \qquad \ldots(4.43)$$

द्वितीय चालक के विभव में परिवर्तन

$$\Delta V_2 = V - V_2$$

या $$\Delta V_2 = \left(\frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}\right) - V_2$$

या $$\Delta V_2 = \frac{C_1(V_1 - V_2)}{C_1 + C_2} \qquad \ldots(4.44)$$

अतः $$\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{C_2}{C_1}$$

अर्थात् आवेशों के पुनर्वितरण के पश्चात्, चालकों के विभव परिवर्तनों का अनुपात उनकी धारिता के अनुपातों के व्युत्क्रम के तुल्य होता है। उपर्युक्त विवेचन दो आवेशित संधारित्रों जो प्रारंभ में असमान विभव पर है को परस्पर जोड़े जाने के लिए भी सत्य है।

4.13 ऊर्जा हानि (Energy Loss)

आवेशों के पुनर्वितरण प्रक्रिया में आवेश चालक तार से प्रवाहित होता है फलस्वरूप ऊर्जा की कुछ मात्रा ऊष्मा के रूप में विकरित हो जाती है तथा ऊर्जा की हानि होती है। ऐसा चालक तार के प्रतिरोध के कारण होता है।

चालक तार जोड़ने से पूर्व निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 \qquad \ldots(4.45)$$

चालक तार जोड़ने के पश्चात निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा

$$U' = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2$$

$$U' = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\left(\frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}\right)^2$$

$$\left(\because \; V = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}\right)$$

अतः $$U^1 = \frac{1}{2}\frac{(C_1V_1 + C_2V_2)^2}{C_1 + C_2} \qquad \ldots(4.46)$$

अतः ऊर्जा हानि $\Delta U = U - U'$

या $$\Delta U = \left(\frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2\right) - \frac{1}{2}\frac{(C_1V_1 + C_2V_2)^2}{C_1 + C_2}$$

या $$\Delta U = \frac{1}{2}\left[\frac{C_1V_1^2(C_1 + C_2) + C_2V_2^2(C_1 + C_2) - (C_1V_1 + C_2V_2)^2}{C_1 + C_2}\right]$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(V_1 - V_2)^2 \qquad \ldots(4.47)$$

$(V_1 - V_2)^2$ सदैव धनात्मक होता है अतः आवेशित चालकों अथवा संधारित्रों को परस्पर जोड़ने पर आवेश के पुनर्वितरण में सदैव ऊर्जा की हानि होती है।

यदि $V_1 = V_2$ तब $\Delta U = 0$

अर्थात् दोनों चालकों के विभव समान होने पर आवेशों का प्रवाह नहीं होता फलस्वरूप ऊर्जा हानि नहीं होती है।

V वोल्ट विवाबल की बैटरी द्वारा संधारित्र को आवेशित करने में प्रदाय ऊर्जा QV का आधा भाग $1/2QV$ संधारित्र में संचित हो जाता है (ध्यान दे $U = \frac{QV}{2}$) तथा शेष आधा भाग $1/2QV$ ऊष्मा के रूप में व्यय हो जाता है।

उदाहरण 4.16 एक 600 pF धारिता वाले संधारित्र को 200 V की बैटरी से आवेशित किया जाता है। अब संधारित्र से बैटरी को हटाकर संधारित्र को अनावेशित 600 pF धारिता के अन्य संधारित्र से जोड़ा जाता है। इस प्रक्रिया में कितनी स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा की हानि हुई।

हलः यहाँ $C_1 = C_2 = 600\ pF$

$$= 600 \times 10^{-12} F = 6 \times 10^{-10} F$$

$$V_1 = 200 V,\ V_2 = 0$$

ऊर्जा हानि $= \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (V_1 - V_2)^2$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{6 \times 10^{-10} \times 6 \times 10^{-10}}{12 \times 10^{-10}} (200 - 0)^2$$

$$= 6 \times 10^{-6}\ \text{J}$$

उदाहरण 4.17 एक 900 pF धारिता का संधारित्र 100 V की बैटरी से आवेशित किया जाता है। (अ) संधारित्र में संचित स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा का मान ज्ञात कीजिये। (ब) यदि संधारित्र से बैटरी को हटाकर इस संधारित्र को एक अन्य 900 pF धारिता के संधारित्र से जोड़ा जाता है। निकाय में संचित स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा का मान ज्ञात कीजिये।

हलः यहाँ $C = 900\ pF = 9 \times 10^{-10} F \qquad V = 100 V$

संचित ऊर्जा $U_1 = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} (9 \times 10^{-10})(100)^2$

$$U_1 = 4.5 \times 10^{-6} J$$

जब प्रथम संधारित्र को बैटरी से हटाकर अन्य उसी धारिता के संधारित्र से जोड़ते हैं तब दोनों में आवेश समान बँट जाता है। यदि संधारित्रों पर अंतिम आवेश Q' है तथा उभयनिष्ठ विभव V' है तो

तब $\quad Q' = \frac{Q}{2}$ तथा $V' = \frac{V}{2}$

निकाय में संचित ऊर्जा

$$U_2 = 2\left(\frac{1}{2} Q' V'\right)$$

$$U_2 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{Q}{2} \times \frac{V}{2} = \frac{1}{4} QV$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \times 4.5 \times 10^{-6} = 2.25 \times 10^{-6}\ \text{J}$$

शेष आधी ऊर्जा ऊष्मा एवं विद्युत चुम्बकीय विकिरण के रूप में व्यय हो जाती है।

महत्वपूर्ण बिन्दु (Important Points)

1. परावैद्युत पदार्थ – वे पदार्थ जिनमें विद्युत धारा का चालन नहीं होता परन्तु बाह्य विद्युत क्षेत्र में ध्रुवित हो जाते हैं, परावैद्युत पदार्थ कहलाते हैं।
2. विद्युत धारिता – किसी चालक का विभव V इसे दिए आवेश Q के समानुपाती होती है $Q = CV$ यहाँ समानुपाती नियतांक C को चालक की धारिता कहा जाती है। आंकिक रुप से किसी चालक की धारिता चालक को दिये गये आवेश की वह मात्रा है जो चालक के विभव में एकांक वृद्धि कर दे।
3. संधारित्र एक ऐसा समायोजन है जिसमें दो चालक परस्पर निकट होते हैं तथा जिन पर समान परिमाण एवं विपरीत प्रकृति के आवेश होते हैं। संधारित्र की धारिता के लिए भी सूत्र $Q = CV$ ही होता है पर यहाँ Q चालक की किसी एक प्लेट पर आवेश तथा V प्लेटो के मध्य विभवांतर है।
4. संधारित्र की धारिता का मान इनकी प्लेटों के क्षेत्रफल प्लेटों के मध्य दूरी तथा इनके बीच उपस्थित माध्यम के परावैद्युतांक पर निर्भर करता है।
5. किसी विलगित गोलीय चालक की धारिता निर्वात के लिये $C_0 = 4\pi \in_0 R$ जहाँ R चालक की त्रिज्या है।
6. एक फैरड धारिता के गोलीय चालक का आकार पृथ्वी से बड़ा होता है।
7. परौवद्युतांक $\in_r$ का माध्यम भरा होने पर संधारित्र की धारिता $\in_r$ गुना बढ़ जाती है।
8. समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता

$$C = \in_r \frac{\in_0 A}{d}$$

निर्वात के लिये $C_0 = \dfrac{\in_0 A}{d}$

9. आंशिक भरे परावैद्युत पदार्थ (परावैद्युतांक $\in_r$, मोटाई t) के समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता

$$C = \frac{\in_0 A}{d - t + \dfrac{t}{\in_r}}$$

10. गोलीय संधारित्र की धारिता

$$C_0 = \frac{4\pi \in_0 r_1 r_2}{(r_1 - r_2)}$$

माध्यम के लिये $C = \in_r \dfrac{4\pi \in_0 r_1 r_2}{(r_1 - r_2)}$

11. संधारित्रों को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर प्रत्येक संधारित्र पर आवेश की मात्रा समान होती है तथा कुल धारिता का सूत्र

$$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

12. संधारित्रों को समान्तर क्रम में जोड़ने पर प्रत्येक संधारित्र पर विभवान्तर समान रहता है तथा कुल धारिता का सूत्र

$$C_P = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n$$

13. संधारित्र को आवेशित करने में कुछ कार्य करना पड़ता है यह कार्य, संधारित्र की प्लेटों के मध्य स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा के रूप में विद्युत क्षेत्र में संचित हो जाता है तथा यह $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2}CV^2 = \dfrac{1}{2}QV$ होता है।

14. आवेशित चालकों के संयोजन से उभयनिष्ठ विभव $V = \dfrac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}$ तथा आवेश का पुनर्वितरण उनकी धारिताओं के अनुपात में होता है। अर्थात

$$\frac{Q_1'}{Q_2'} = \frac{C_1}{C_2}$$

15. आवेशित चालकों के संयोजन से ऊर्जा हानि

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(V_1 - V_2)^2$$

अभ्यासार्थ प्रश्न

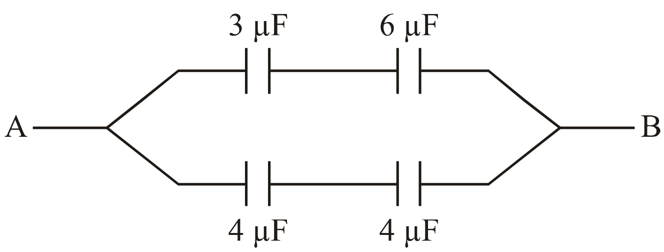
बहुचयनात्मक प्रश्न

1. किसी गोलीय चालक की धारिता का मान समानुपाती होता है

(अ) $C \propto R$ (ब) $C \propto R^2$

(स) $C \propto R^{-2}$ (द) $C \propto R^{-1}$

2. दिये गये चित्र में बिन्दु A तथा B के मध्य तुल्य धारिता का मान होगा



(अ) 2 μF (ब) 4 μF

(स) 25 μF (द) 3 μF

3. एक आवेशित संधारित्र की दोनों प्लेटों को एक तार से जोड़ दिया जाये तब

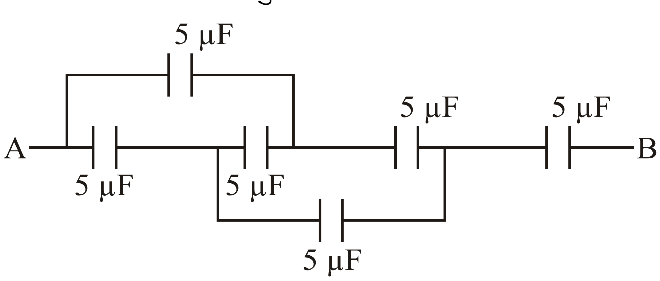
(अ) विभव अनन्त हो जायेगा

(ब) आवेश अनन्त हो जायेगा

(स) आवेश पूर्व मान का दुगुना हो जायेगा

(द) संधारित्र निरावेशित हो जायेगा

4. दिये गये चित्र में संयोजित संधारित्रों के लिये बिन्दु A तथा B के मध्य तुल्य धारिता का मान होगा



(अ) 5 μF (ब) 2.5 μF

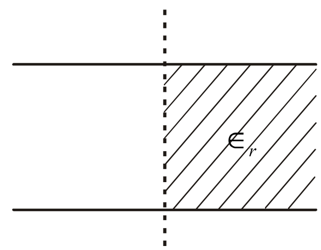
(स) 10 μF (द) 20 μF

5. दो गोलाकार चालकों की त्रिज्याओं का अनुपात 1 : 2 है तो उनकी धारिताओं का अनुपात होगा

(अ) 4 : 1 (ब) 1 : 4

(स) 1 : 2 (द) 2 : 1

6. चित्र के अनुसार एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य आधे भाग में किसी परावैद्युत पदार्थ जिसका परावैद्युतांक $\in_r$ है, सरकाया जाता है। यदि संधारित्र की प्रारम्भिक धारिता C हो तब नवीन धारिता का मान होगा



(अ) $\dfrac{C}{2}(\in_r + 1)$ (ब) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{C}{(\in_r + 1)}$

(स) $\dfrac{(1+\in_r)}{2C}$ (द) $C(1+\in_r)$

7. समान त्रिज्या तथा समान आवेश की पारे की आठ बूँदें परस्पर मिलकर एक बड़ी बूँद बनाती हैं। बड़ी बूँद की धारिता प्रत्येक छोटी बूँद की धारिता की तुलना में होगी

(अ) 2 गुना (ब) 8 गुना

(स) 4 गुना (द) 16 गुना

8. एक संधारित्र की धारिता C है। इसे V विभवान्तर तक आवेशित किया गया है। यदि अब इसे प्रतिरोध से सम्बन्धित कर दिया जाये तब ऊर्जा क्षय की मात्रा होगी

(अ) CV^2 (ब) $\dfrac{1}{2}CV^2$

(स) $\dfrac{1}{3}CV^2$ (द) $\dfrac{1}{2}QV^2$

9. यदि एक संधारित्र को आवेश Q देने पर संग्रहित ऊर्जा W है। आवेश दुगुना करने पर संग्रहित ऊर्जा होगी।

(अ) 2 W (ब) 4 W

(स) 8 W (द) $\frac{1}{2}W$

10. 3 μF व 5 μF के दो गोलों को क्रमशः 300 V तथा 500 V तक आवेशित कर जोड़ दिया जाता है। उभयनिष्ठ विभव होगा

(अ) 400 V (ब) 375 V

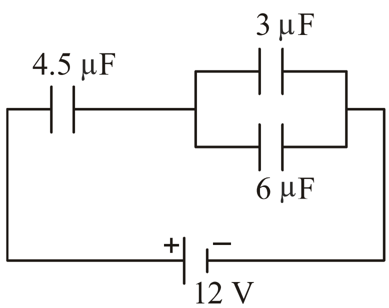
(स) 425 V (द) 350 V

11. एक आवेशित समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य स्थितिज ऊर्जा U_0 है यदि एक $\in_r$ परावैद्युतांक वाली पट्टिका मध्य में रख दी जाये तब नवीन स्थितिज ऊर्जा होगी

(अ) $\frac{U_0}{\in_r}$ (ब) $U_0 \in_r^2$

(स) $\frac{U_0}{\in_r^2}$ (द) U_0

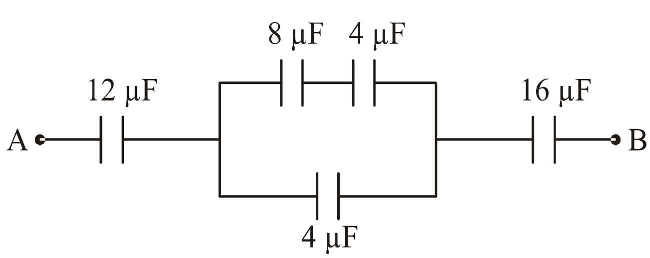
12. चित्र में दिखाये गये परिपथ में 4.5 μF वाले संधारित्र पर विभवान्तर है



(अ) $\frac{8}{3}V$ (ब) 4 V

(स) 6 V (द) 8 V

13. चित्र में दिखाये गये परिपथ में A व B के मध्य तुल्य धारिता होगी



(अ) 1 μF (ब) 9 μF

(स) 1.5 μF (द) 1/3 μF

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1 एक समान्तर प्लेट संधारित्र की एक प्लेट का क्षेत्रफल आधा कर दिया जाये तो क्या यह युक्ति संधारित्र का कार्य करेगी?

2 तीन संधारित्रों जिनके प्रत्येक की धारिता 6 μF है, के संयोजनों से प्राप्त अधिकतम व न्यूनतम धारिताओं का मान क्या होगा?

3 किसी चालक की धारिता का मान किन कारकों पर निर्भर करता है।

4 पृथ्वी को गोलीय चालक मानने पर पृथ्वी की धारिता कितनी होती है?

5 आवेशित समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य परिणामी विद्युत क्षेत्र कितना होता है जबकि प्लेटों पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ है?

6 यदि समान धारिता C के n संधारित्र श्रेणीक्रम में जोड़े जायें तब तुल्य धारिता कितनी होगी?

7 समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य विद्युत से k का ऊर्जा घनत्व का सूत्र लिखिये।

8 ऊर्जा घनत्व का मात्रक लिखिये।

9 दो संधारित्र जिनकी धारितायें C_1 व C_2 हैं यदि उन्हें समान आवेश दिये जायें तब उनमें एकत्रित स्थिरविद्युत स्थितिज ऊर्जाओं का अनुपात लिखिये।

10 ऐसा चालक बताइये जिसको लगभग असीमित (अनन्त) आवेश दिया जा सकता हो।

11 किसी आवेशित संधारित्र की ऊर्जा किस रूप में कहाँ संचित रहती है?

12 किसी आवेशित संधारित्र पर नेट विद्युत आवेश कितना होता है?

13 किसी समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के सम्पूर्ण स्थान में कोई परावैद्युत भरने से उसकी धारिता 5 गुनी हो जाती है। परावैद्युत का परावैद्युतांक क्या है?

14 संधारित्र का मूल उपयोग क्या है?

15 एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य की दूरी d है। यदि $d/2$ मोटाई की कोई धात्विक प्लेट संधारित्र के प्लेटों के मध्य रख दी जाये तब धारिता पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

16 24 μF धारिता के संधारित्र को आवेशित करने में कितना कार्य करना पड़ेगा जबकि प्लेटों के मध्य विभवान्तर 500 V है।

17 यदि आपको कम धारिता के संधारित्र दिये हैं तो इनसे अधिक धारिता किस प्रकार प्राप्त करेंगे?

18 2 μF धारिता वाले दो संधारित्रों को श्रेणीक्रम में जोड़ने पर तुल्य धारिता कितनी होगी?

19 एक समान्तर प्लेट संधारित्र को तेल में डुबोने से उसकी धारिता पर क्या प्रभाव पड़ेगा? तेल का परावैद्युतांक 2 है।

20 वृत्ताकार समान्तर प्लेट संधारित्र की त्रिज्या r है। प्लेटों के मध्य हवा भरी है। यदि संधारित्र की धारिता R त्रिज्या के गोले की धारिता के बराबर है तब प्लेटों के मध्य दूरी बताइये।

लघूत्तरात्मक प्रश्न

1 चालक एवं विद्युतरोधी को उदाहरण सहित समझाइये।

2 ध्रुवीय तथा अध्रुवीय परावैद्युत में अन्तर स्पष्ट कीजिये।

3 किसी गोलीय चालक की धारिता का व्यंजक स्थापित कीजिये।

4 एक आवेशित समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों को निकट लाने पर उसकी प्लेटों के मध्य विभवान्तर पर क्या प्रभाव पड़ेगा? जबकि आवेश नियत रखा जाता है। समझाइये।

5 एक समान्तर प्लेट संधारित्र एक स्रोत (बैटरी) से V विभवान्तर तक आवेशित किया गया है, जबकि प्लेटों के मध्य वायु है। संधारित्र को बैटरी से अलग किये बिना वायु के स्थान पर $\in_r$ परावैद्युतांक का परावैद्युत माध्यम भर दिया गया है। कारण सहित बताइये कि निम्नलिखित में क्या परिवर्तन होगा?
(i) विभवान्तर (ii) प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र (iii) धारिता (iv) आवेश (v) ऊर्जा

6 एक समान्तर प्लेट वायु संधारित्र एक विद्युत संभरण से जुड़ा है तथा V_0 विभवान्तर तक आवेशित किया गया है। इसको विद्युत संभरण [Supply] से अलग करके इसके प्लेटों के मध्य परावैद्युत पदार्थ भर दिया जाता है। कारण सहित बताइये कि निम्नलिखित में क्या परिवर्तन होगा?
(i) आवेश (ii) विभवान्तर (iii) धारिता (iv) विद्युत क्षेत्र (v) ऊर्जा

7 आवेशित संधारित्र में संचित ऊर्जा का सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।

8 C धारिता के तीन संधारित्र एक बार श्रेणीक्रम में व दूसरी बार समान्तर क्रम में जोड़े जाते हैं। इन स्थितियों में तुल्य धारिता का अनुपात क्या होगा?

9 समान धारिता के n संधारित्रों को श्रेणीक्रम में संयोजित करने पर तुल्य धारिता C_s तथा समान्तर क्रम में संयोजित करने पर तुल्य धारिता C_p है। $\frac{C_p}{C_s}$ का मान ज्ञात कीजिये।

10 विद्युत धारिता की परिभाषा लिखिये तथा इसका S.I. मात्रक लिखिये।

11 एक गोलीय चालक पर आवेश की मात्रा तीन गुनी करने पर उसकी धारिता पर क्या प्रभाव पड़ेगा? कारण दीजिये।

12 $2\,\mu F$ धारिता वाले वायु संधारित्र की प्लेटों के मध्य अभ्रक की प्लेट रखने से उसकी धारिता $5\,\mu F$ हो जाती है। अभ्रक का परावैद्युतांक ज्ञात कीजिये।

13 दो आवेशित चालकों की त्रिज्यायें क्रमशः R_1 व R_2, धारितायें क्रमशः C_1 व C_2, आवेश क्रमशः Q_1 व Q_2 तथा विभव क्रमशः V_1 व V_2 हैं $(V_1 > V_2)$। यदि चालकों को परस्पर एक नगण्य धारिता वाले चालक तार से जोड़ दिया जाता है तब सिद्ध कीजिये कि चालकों के विभव में परिवर्तनों का अनुपात $\frac{\Delta V_1}{\Delta V_2} = \frac{C_2}{C_1}$ होगा।

14 संधारित्र किसे कहते हैं? समझाइये।

15 तीन संधारित्र जिनकी धारितायें क्रमशः C_1, C_2 व C_3 हैं, श्रेणीक्रम में जुड़े हैं। तुल्य धारिता का सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।

16 तीन संधारित्र जिनकी धारितायें क्रमशः C_1, C_2 व C_3 हैं, समान्तर क्रम में जुड़े हैं। तुल्य धारिता का सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।

निबन्धात्मक प्रश्न

1 समान्तर प्लेट संधारित्र का सिद्धान्त समझाते हुए इसकी धारिता का व्यंजक स्थापित कीजिये।

2 आंशिक रूप से भरे परावैद्युत पदार्थ के लिये समान्तर प्लेट संधारित्र की धारिता का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।

3 किसी समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र के ऊर्जा घनत्व का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।

4 गोलीय संधारित्र क्या है? गोलीय संधारित्र की धारिता के लिये व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।

5 आवेशित चालकों के संयोजन से आवेशों का पुनर्वितरण समझाइये। आवेश के पुनर्वितरण के पश्चात आवेशों का अनुपात ज्ञात कीजिये तथा ऊर्जा हानि का सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तरमाला (बहुचयनात्मक प्रश्न)

1. (अ) 2. (ब) 3. (द) 4. (ब) 5. (स) 6. (अ)
7. (अ) 8. (ब) 9. (ब) 10. (स) 11. (अ) 12. (द)
13. (अ)

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. नहीं

2. $C_{\max} = 18\,\mu F$ तथा $C_{\min} = 2\,\mu F$

3 किसी चालक की धारिता चालक की ज्यामिति एवं चारों ओर के माध्यम पर निर्भर करती है।

4 $C_0 = 4\pi \in_0 R$, यहाँ

$R = 6400 km = 6400 \times 10^3 m$, $C_0 = 711 \mu F$

5 $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$

6 $C_s = \dfrac{C}{n}$

7 $\dfrac{U}{V}$ या $u = \dfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$

8 J/m^3

9 $$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1}}{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1}$$

10 पृथ्वी, क्योंकि इसकी धारिता बहुत अधिक है।

11 विद्युत स्थितिज ऊर्जा के रूप में प्लेटों के मध्य स्थित माध्यम में।

12 शून्य, क्योंकि प्रत्येक प्लेट पर समान परिमाण एवं विपरीत प्रकृति का आवेश होता है।

13 $\epsilon_r = \dfrac{C}{C_0} = \dfrac{5C_0}{C_0} = 5$

14 विद्युत आवेश एवं विद्युत ऊर्जा की बड़ी मात्रा संचित करने के लिये।

15 $$C' = \frac{\epsilon_0 A}{(d-t)} = \frac{\epsilon_0 A}{(d-d/2)} = 2\left(\frac{\epsilon_0 A}{d}\right) = 2C$$

अर्थात् धारिता दुगुनी हो जायेगी।

16 $W = QV = (CV)V = CV^2$

$= 24\times10^{-6}\times500\times500 = 6\,J$

17 दिये गये संधारित्रों को समान्तर क्रम में जोड़ने पर

18 $\dfrac{1}{C_s} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$ से $C_s = 1\mu F$

19 $C = \epsilon_r C_0 = 2C_0$ अर्थात दुगुनी हो जायेगी।

20 $$C = 4\pi\epsilon_0 R \Rightarrow \frac{\epsilon_0 \pi r^2}{d} = 4\pi\epsilon_0 R \Rightarrow d = \frac{r^2}{4R}$$

आंकिक प्रश्न

1 एक गोलाकार चालक की धारिता 1 pF है। इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

(उत्तर : 9 mm)

2 एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल $100\ cm^2$ तथा दोनों प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र की तीव्रता 100 N/C है। प्रत्येक प्लेट पर आवेश कितना है?

(उत्तर : $+8.85 \times 10^{-12}$ C, -8.85×10^{-12} C)

3 किसी समान्तर प्लेट संधारित्र को एक निश्चित विभवान्तर पर रखा जाता है। इसके विभवान्तर को समान रखते हुए प्लेटों के मध्य 3 mm मोटी स्लैब रखी जाती है तो प्लेटों के मध्य दूरी 2.4 mm बढ़ानी पड़ती है। स्लैब के परावैद्युतांक की गणना कीजिये।

(उत्तर : $\epsilon_r = 5$)

4 दो संधारित्र की धारितायें क्रमशः $2\,\mu F$ तथा $4\,\mu F$ हैं। जब इनको क्रमशः श्रेणीक्रम में तथा समान्तर क्रम में जोड़ा जाता है तो इनकी तुल्य धारिताओं की तुलना कीजिये।

(उत्तर : 2 : 9)

5 दो आवेशित धातु के गोलों की त्रिज्यायें क्रमशः 0.05 m तथा 0.10 m हैं। प्रत्येक गोले पर $75\,\mu C$ आवेश है। इन गोलों को पतले तार द्वारा जोड़ने पर (i) उभयनिष्ठ विभव तथा (ii) आवेश प्रवाह की मात्रा ज्ञात करो।

(उत्तर : 9×10^6 V, $25\,\mu C$)

6 150 वोल्ट पर आवेशित $2\,\mu F$ धारिता के एक गोलीय चालक का सम्बन्ध $1\,\mu F$ के किसी निरावेशित चालक गोले से कर दिया जाता है। उभयनिष्ठ विभव की गणना करो। प्रत्येक चालक पर आवेश का मान भी ज्ञात करो।

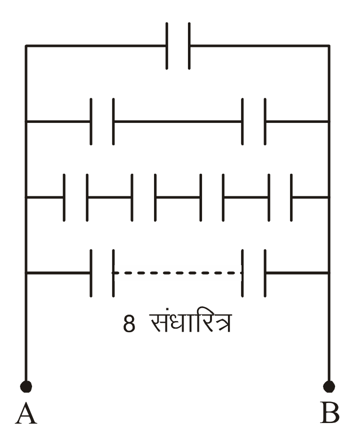
(उत्तर : $V = 100\,V$, $Q_1' = 200\mu C$, $Q_2' = 100\mu C$)

7 125 बूँदों को 200 वोल्ट के विभव तक आवेशित किया जाता है। इन बूँदों को मिलाकर एक बड़ी बूँद बनाते हैं। इससे विभव तथा ऊर्जा में परिवर्तन की गणना कीजिये।

(उत्तर : $V_b = 500\,V$, $U_b = 25U_s$

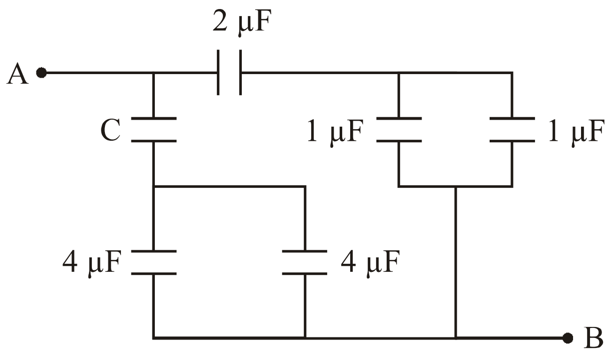
$b \rightarrow$ बड़ी बूँद के लिये, $s \rightarrow$ छोटी बूँद के लिये)

8 चित्र में प्रत्येक संधारित्र की धारिता $1\,\mu F$ है। A व B के मध्य तुल्य धारिता ज्ञात कीजिये।



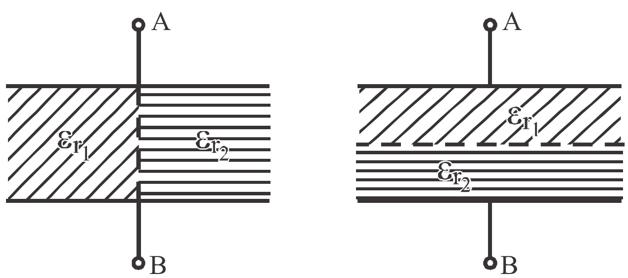
(उत्तर : $2\,\mu F$)

9 चित्र में A व B के मध्य तुल्य धारिता $5\,\mu F$ है। संधारित्र C की धारिता ज्ञात करो।



(उत्तर : $C = 8\,\mu F$)

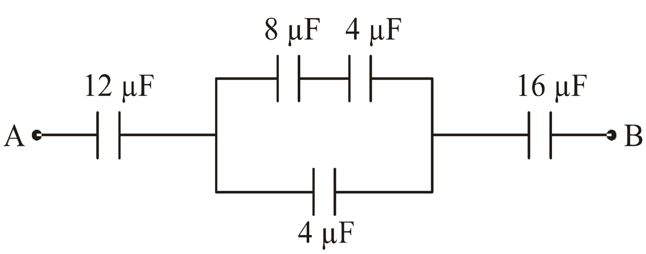
10 चित्र 4.34 में दर्शाये गये संधारित्रों की धारिता ज्ञात कीजिये। प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल A व प्लेटों के मध्य की दूरी d है।



(अ) (ब)

(उत्तर : (अ) $\left[\frac{\in_0 A}{2d}\left(\in_{r_1} + \in_{r_2}\right)\right]$ (ब) $\left[\frac{2\in_{r_1}\in_{r_2}\in_0 A}{d\left(\in_{r_1} + \in_{r_2}\right)}\right]$)

11 चित्र में A तथा B के मध्य तुल्य धारिता ज्ञात कीजिये।



(उत्तर : $C = \frac{1}{31}\mu F$)

12 एक विलगित गोलीय चालक को दूसरे संकेन्द्रिय गोलीय चालक जिसका बाहरी पृष्ठ पृथ्वी से सम्बन्धित है, से ढक देते हैं।

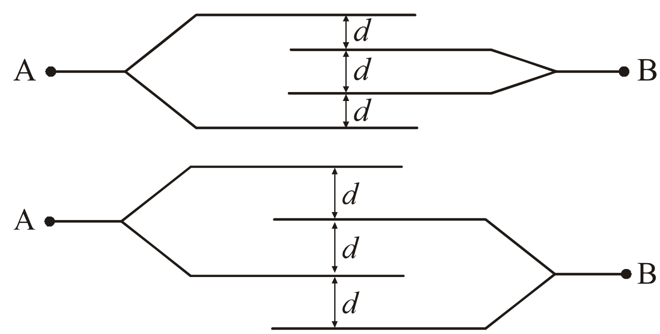
इन गोलीय चालकों की त्रिज्याओं का अनुपात $\frac{n}{n-1}$ है।

सिद्ध कीजिये कि इस समायोजन से गोलीय चालक की धारिता n गुना बढ़ जाती है।

13 एक समान्तर प्लेट संधारित्र द्वारा संचित ऊर्जा घनत्व $4.43\times10^{-10}\,J/m^3$ है। संधारित्र की प्लेटों के मध्य विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिये। $\in_0 = 8.86\times10^{-12}\,F/m$

(उत्तर : $E = 10\,N/C$)

14 चित्र अ तथा ब में प्रदर्शित निकाय के मध्य की धारिता कितनी होगी यदि प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल A तथा दो निकटवर्ती प्लेटों के मध्य की दूरी d हो।



(उत्तर : (अ) $\frac{2\in_0 A}{d}$ (ब) $\frac{3\in_0 A}{d}$)

15 C धारिता के n संधारित्रों को श्रेणीक्रम में संयोजित करने पर तुल्य धारिता Cs तथा समान्तर क्रम में संयोजित करने पर तुल्य धारिता Cp है। सिद्ध कीजिये।

$$C_p - C_s = \frac{\left(n^2 - 1\right)}{n}C$$

16 एक समान्तर प्लेट संधारित्र में प्रयुक्त प्लेट की त्रिज्या 10 cm है। यदि प्लेटों के मध्य की दूरी 10 cm हो तो हवा के लिये संधारित्र की धारिता ज्ञात कीजिये।

(उत्तर : $C = 2.78\,pF$)