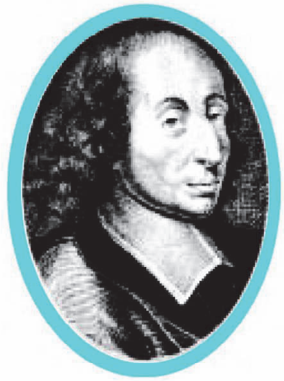
অধ্যায় ৮

দ্বিপদ উপপাদ্য
(BINOMIAL THEOREM)

❖ *Mathematics is a most exact science and its conclusions are capable of absolute proofs. – C.P. STEINMETZ* ❖

8.1 অৱতাৰণা (Introduction)

আগৰ শ্ৰেণীবোৰত আমি $(a+b)$ আৰু $(a-b)$ ধৰণৰ দ্বিপদবোৰৰ বৰ্গ, ঘন উলিওৱা সূত্ৰবোৰ পাই আহিছোঁ। এইবোৰৰ সহায়ত $(98)^2 = (100-2)^2$, $(999)^3 = (1000-1)^3$ ইত্যাদিৰ সাংখ্যিক মান উলিয়াব পাৰি। কিন্তু বাৰে বাৰে পূৰণ কৰি $(98)^5$, $(101)^6$ ইত্যাদি উচ্চ ঘাতৰ সংখ্যাবোৰৰ মান উলিওৱা বৰ সহজ নহয়। দ্বিপদ উপপাদ্য নামৰ উপপাদ্য এটাৰ সহায়ত এইবোৰৰ মান সহজে উলিয়াব পাৰি। n এটা অখণ্ড সংখ্যা বা পৰিমেয় সংখ্যা হ'লে এই উপপাদ্যটোৰ সহায়ত $(a+b)^n$ ক সহজে বিস্তাৰ কৰিব পাৰি। এই অধ্যায়ত আমি অকল ধনাত্মক অখণ্ড সূচকৰ বাবেহে দ্বিপদ উপপাদ্য অধ্যয়ন কৰিম।



Blaise Pascal (1623-1662)

8.2 ধনাত্মক অখণ্ড সূচকৰ বাবে দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem for positive integral index)

আমি নিম্নলিখিত অভেদবোৰ আগেয়ে পাই আহিছোঁ ঃ

$$(a+b)^0 = 1 \qquad a+b \neq 0$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

এই বিস্তৃতিসমূহত তলৰ কথাখিনি মন কৰিবলগীয়া ঃ

(i) বিস্তৃতিবোৰৰ পদৰ সংখ্যা সূচকৰ সংখ্যাতকৈ 1বেছি। উদাৰণস্বৰূপে, $(a+b)^2$ ৰ বিস্তৃতিত পদৰ সংখ্যা 3, কিন্তু $(a+b)^2$ ৰ সূচক 2।

(ii) ক্ৰমিক পদবোৰত ৰাশি a ৰ ঘাতবোৰ 1 কৈ কমি যায়, দ্বিতীয় ৰাশি b ৰ ঘাতবোৰ 1 কৈ বাঢ়ি যায়।

(iii) বিস্তৃতিৰ প্ৰতিটো পদত a আৰু b ৰ সূচকৰ সমষ্টি সমান আৰু এই সমষ্টিৰ মান $a+b$ ৰ সূচকটোৰ সমান।

এতিয়া আমি বিস্তৃতিবোৰৰ সহগবোৰ নিম্নলিখিত ধৰণে সজাওঁ (চিত্ৰ 8.1)ঃ

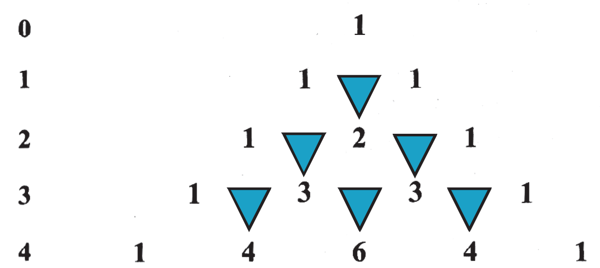
সূচক (Index)	**সহগ (Coefficients)**
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

চিত্ৰ 8.1

ওপৰৰ তালিকাখন লক্ষ্য কৰিলে দেখা যায় যে এটা শাৰীৰ সহগবোৰৰ সহায়ত পৰৱৰ্তী শাৰীৰ সহগবোৰ লিখিব পাৰি। দেখা যায় যে 1 সূচকৰ সহগৰ শাৰীটোৰ 1 দুটা যোগ কৰিলে 2-সূচকৰ শাৰীৰ 2 সহগটো হয়। 2-সূচকৰ শাৰীৰ 1, 2 আৰু 1, 2 যোগ কৰিলে, 3-সূচকৰ শাৰীৰ 3 আৰু 3 সহগ দুটা পোৱা যায়, ইত্যাদি। লগতে প্ৰতিটো শাৰীৰ আৰম্ভণি আৰু অন্তিম স্থানত 1 থাকে। এইদৰে আগ বাঢ়ি গৈ আমি যিকোনো সূচকৰ শাৰীৰ সহগবোৰ উলিয়াব পাৰোঁ।

চিত্ৰ 8.2 ত প্ৰদৰ্শন কৰা সহগ লিখাৰ এই ধাৰাটো আৰু কেইটামান শাৰীৰ বাবে প্ৰয়োগ কৰি চাব পাৰি।

সূচক (Index) **সহগ (Coefficients)**



চিত্ৰ 8.2

পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজ

চিত্ৰ 8.2 ৰ গাঁথনিটো এটা ত্ৰিভুজৰ দৰে। ত্ৰিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দুত 1 সংখ্যাটো থাকে আৰু ক্ৰমান্বয়ে এই সংখ্যাটো হেলনীয়া বাহুদুটাৰ দিশত নামি আহে। সংখ্যাৰ এই অনুবিন্যাসটো ফৰাচী গণিতজ্ঞ ব্লেইচ পাস্কেল (Blaise Pascal) ৰ নামেৰে পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজ বুলি কোৱা হয়। পিংগলে ইয়াৰ নাম দিছিল মেৰু প্ৰস্তৰ (Meru Prastara)।

পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজৰ সহায়ত উচ্চ ঘাতৰ দ্বিপদ ৰাশিৰ বিস্তৃতিও সম্ভৱ। ধৰা হ'ল আমি $(2x+3y)^5$ ৰাশিটো বিস্তাৰ কৰিব লাগে। পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজত 5-সূচকৰ শাৰীটো হ'ব

$$1, \quad 5, \quad 10, \quad 10, \quad 5, \quad 1$$

এই শাৰীটোৰ সংখ্যাবোৰ আৰু (i), (ii) আৰু (iii) মন্তব্যখিনি ব্যৱহাৰ কৰি আমি বিস্তৃতিটো নিম্নলিখিত ধৰণে সহজে উলিয়াব পাৰোঁ।

$$(2x+3y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4(3y) + 10\,(2x)^3(3y)^2 + 10(2x)^2(3y)^3 + 5(2x)(3y)^4 + (3y)^5$$
$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$

ধৰা হ'ল আমি $(2x+3y)^{12}$ ৰ বিস্তৃতিটো লিখিব লাগে। ইয়াৰ বাবে আমি পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজটোৰপৰা 12-সূচকৰ শাৰীটো উলিয়াবলৈ প্ৰথমে 11 সূচকলৈ আটাইবোৰ শাৰী লিখি উলিয়াব লাগিব। গতিকে পদ্ধতিটো দীঘলীয়া হ'ব। আৰু বেছি উচ্চ ঘাতৰ দ্বিপদ ৰাশি বিস্তাৰ কৰিবলৈ পদ্ধতিটো যথেষ্ট কষ্টকৰ হ'ব। সেয়েহে, এতিয়া এনে এটা পদ্ধতি আলোচনা কৰা হ'ব, যাৰ সহায়ত পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজৰ শাৰীবোৰ নিলিখাকৈয়েই যি কোনো সূচকৰ (অখণ্ড আৰু ধনাত্মক) বাবে দ্বিপদ ৰাশি বিস্তাৰ কৰিব পাৰি।

ইয়াৰ বাবে আমি আগতে পাই অহা দলৰ ধাৰণা ব্যৱহাৰ কৰি পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজৰ শাৰীবোৰ লিখি লম।

আমি জানো যে $^{n}C_{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$ আৰু n এটা অঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। লগতে আমি জানো যে $^{n}C_{0} = 1 = {}^{n}C_{n}$.

এতিয়া আমি পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজটো নতুনকৈ লিখি উলিয়াওঁ।

সূচক (Index)	সহগ (Coefficients)
0	$^0C_0$ (=1)
1	$^1C_0$ (=1) $^1C_1$ (=1)
2	$^2C_0$ (=1) $^2C_1$ (=2) $^2C_2$ (=1)
3	$^3C_0$ (=1) $^3C_1$ (=3) $^3C_2$ (=3) $^3C_3$ (=1)
4	$^4C_0$ (=1) $^4C_1$ (=4) $^4C_2$ (=6) $^4C_3$ (=4) $^4C_4$ (=1)
5	$^5C_0$ (=1) $^5C_1$ (=5) $^5C_2$ (=10) $^5C_3$ (=10) $^5C_4$ (=5) $^5C_5$ (=1)

চিত্ৰ 8.3 পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজ

এইটো পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজৰ সহায়ত আমি এতিয়া আগৰ শাৰীবোৰ নিলিখাকৈয়েই যি কোনো সূচকৰ শাৰীটো লিখিব পাৰোঁ। উদাহৰণস্বৰূপে, 7-তম শাৰীটো হ'ব

$$^7C_0 \;\, ^7C_1 \;\, ^7C_2 \;\, ^7C_3 \;\, ^7C_4 \;\, ^7C_5 \;\, ^7C_6 \;\, ^7C_7$$

এই শাৰীটো আৰু (i), (ii), (iii) মন্তব্যখিনি ব্যৱহাৰ কৰি আমি তলৰ বিস্তৃতিটো সহজে লিখিব পাৰোঁ

$(a+b)^7 = {}^7C_0a^7 + {}^7C_1a^6b + {}^7C_2a^5b^2 + {}^7C_3a^4b^3 + {}^7C_4a^3b^4 + {}^7C_5a^2b^5$
$+ {}^7C_6ab^6 + {}^7C_7b^7$

ওপৰৰ কথাখিনিৰ পৰা, যি কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সূচক n ৰ বাবে এটা দ্বিপদ ৰাশিৰ বিস্তৃতি কেনে হ'ব, আমি অনুমান কৰিব পাৰোঁ। অৰ্থাৎ আমি এতিয়া যি কোনো ধনাত্মক সূচকবিশিষ্ট দ্বিপদ এটাৰ বিস্তৃতি লিখিব পাৰোঁ।

8.2.1 অখণ্ড ধনাত্মক সূচকৰ দ্বিপদ উপপাদ্য

$$(a+b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + \ldots .. + {}^nC_{n-1}ab^{n-1} + {}^nC_nb^n$$

প্ৰমাণ গণিতীয় আৰোহ তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰমাণটো কৰা হ'ব। ধৰা হ'ল প্ৰদত্ত গাণিতিক উক্তিটো

$P(n)$, অৰ্থাৎ

$P(n) : (a+b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + \ldots .. + {}^nC_{n-1}ab^{n-1} + {}^nC_nb^n$

$n = 1$ ৰ বাবে পোৱা যাব,

$P(1) : (a+b)^1 = {}^1C_0a^1 + {}^1C_1b^1 = a+b$

গতিকে $P(1)$ সত্য।

ধৰা হ'ল কোনো এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা k ৰ বাবে P(k) সত্য হয়, অৰ্থাৎ

$$(a+b)^k = {}^kC_0a^k + {}^kC_1a^{k-1}b + {}^kC_2a^{k-2}b^2 + \ldots . + {}^kC_kb^k \ldots ..(1)$$

আমি প্ৰমাণ কৰিম যে $P(k+1)$ও সত্য

অৰ্থাৎ $(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0a^{k+1} + {}^{k+1}C_1a^kb + {}^{k+1}C_2a^{k-1}b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_{k+1}b^{k+1}$

এতিয়া, $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$

$$= (a+b)\left({}^kC_0a^k + {}^kC_1a^{k-1}b + {}^kC_2a^{k-2}b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}ab^{k-1} + {}^kC_kb^k\right)$$

[(i) ৰ সহায়ত]

$$= {}^kC_0a^{k+1} + {}^kC_1a^kb + {}^kC_2a^{k-1}b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}a^2b^{k-1} + {}^kC_kab^k$$
$$+ {}^kC_0a^kb + {}^kC_1a^{k-1}b^2 + {}^kC_2a^{k-2}b^3 + \ldots + {}^kC_{k-1}ab^k + {}^kC_kb^{k+1}$$

[ৰাশি দুটা পূৰণ কৰি]

$$= {}^kC_0a^{k+1} + \left({}^kC_1 + {}^kC_0\right)a^kb + \left({}^kC_2 + {}^kC_1\right)a^{k-1}b^2 + \ldots .$$
$$+ \left({}^kC_k + {}^kC_{k-1}\right)ab^k + {}^kC_kb^{k+1}$$ [সদৃশ পদবোৰ লগ লগাই]

$$= {}^{k+1}C_0a^{k+1} + {}^{k+1}C_1a^kb + {}^{k+1}C_2a^{k-1}b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_kab^k + {}^{k+1}C_{k+1}b^{k+1}$$

$\left[{}^{k+1}C_0 = 1, {}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r\right.$ আৰু ${}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}$ ব্যৱহাৰ কৰি $\left.\right]$

এইদৰে প্ৰমাণ কৰা হ'ল যে P $(k+1)$ সত্য হয় যদিহে P (k) সত্য। গতিকে গণিতীয় আৰোহ তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰমাণিত হ'ল যে সকলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে P (n) সত্য।

এতিয়া $(x+2)^6$ বিস্তাৰ কৰি উপপাদ্যটোৰ প্ৰয়োগ ব্যাখ্যা কৰা হ'ল ঃ

$$(x+2)^6 = {}^6C_0x^6 + {}^6C_1x^5 2 + {}^6C_2x^4 2^2 + {}^6C_3x^3 2^3 + {}^6C_4x^2 2^4 + {}^6C_5x2^5 + {}^6C_6 2^6$$
$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

গতিকে $(x+2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

দ্ৰষ্টব্য (Observations)

1. $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k$ প্ৰতীকেৰে তলৰ সমষ্টিটো বুজোৱা হয় ঃ

$${}^nC_0a^nb^o + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + \ldots + {}^nC_ra^{n-r}b^r + \ldots. + {}^nC_na^{n-n}b^n, \text{ য'ত } b^o = 1 = a^{n-n}.$$

গতিকে দ্বিপদ উপপাদ্যটো এইদৰেও লিখিব পাৰি—

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k$$

2. উপপাদ্যটোৰ ${}^nC_r$ সহগবোৰক দ্বিপদ সহগ (Binomial coefficients) বোলা হয়।
3. $(a+b)^n$ ৰ বিস্তৃতিত মুঠ পদৰ সংখ্যা হ'ল $(n+1)$; সূচকতকৈ এক বেছি।
4. বিস্তৃতিটোৰ পদবোৰত a ৰ সূচক ক্ৰমান্বয়ে এক এককৈ কমি যায়। প্ৰথম পদত a ৰ সূচক n, দ্বিতীয় পদত $(n-1)$, ইত্যাদিকৈ কমি গৈ অন্তিম পদত সূচক শূন্য হয়। একেদৰে b ৰ সূচক এক এককৈ বাঢ়ি যায়— প্ৰথম পদত শূন্য, দ্বিতীয় পদত 1, ইত্যাদিকৈ বাঢ়ি গৈ অন্তিম পদত b ৰ সূচক n হয়।
5. $(a+b)^n$ৰ বিস্তৃতিত প্ৰথম পদৰ a আৰু b ৰ সূচকৰ যোগফল $n+0=n$, দ্বিতীয় পদত $(n-1)+1=n$ ইত্যাদি আৰু n তম পদত $0+n=n$। গতিকে প্ৰতিটো পদত a আৰু b ৰ সূচকৰ সমষ্টি n।

8.2.2 কেইটামান বিশেষ অনুসিদ্ধান্ত (Some special cases)

(i) $a=x$ আৰু $b=-y$ লৈ পোৱা যাব

$$(x-y)^n = [x+(-y)]^n$$
$$= {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}(-y) + {}^nC_2x^{n-2}(-y)^2 + {}^nC_3x^{n-3}(-y)^3 + \ldots + {}^nC_n(-y)^n$$
$$= {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - {}^nC_3x^{n-3}y^3 + \ldots + (-1)^n\,{}^nC_ny^n$$

অৰ্থাৎ, $(x-y)^n = {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - {}^nC_3x^{n-3}y^3 + \ldots + (-1)^n\,{}^nC_ny^n$

এইটো ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ

$$(x-2y)^5 = {}^5C_0x^5 - {}^5C_1x^4(2y) + {}^5C_2x^3(2y)^2 - {}^5C_3x^2(2y)^3 + {}^5C_4x(2y)^4 - {}^5C_5(2y)^5$$

$$= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

(ii) $a = 1, b = x$ লৈ পোৱা যাব

$$(1+x)^n = {}^nC_0(1)^n + {}^nC_1(1)^{n-1}x + {}^nC_2(1)^{n-2}x^2 + \ldots + {}^nC_nx^n$$

বা $$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \ldots + {}^nC_nx^n$$

ইয়াত $x = 1$ বহুৱাই পোৱা যাব

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \ldots + {}^nC_n$$

(iii) $a = 1$আৰু $b = -x$ লৈ পোৱা যাব

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - \ldots + (-1)^n\,{}^nC_nx^n$$

ইয়াত $x = 1$ বহুৱাই পোৱা যাব

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^n\,{}^nC_n$$

উদাহৰণ 1 বিস্তাৰ কৰাঁ $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4, x \neq 0$

সমাধান দ্বিপদ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি,

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3\left(\frac{3}{x}\right) + {}^4C_2(x^2)^2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3(x^2)\left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= x^8 + 4x^6.\frac{3}{x} + 6.x^4.\frac{9}{x^2} + 4.x^2.\frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$$

উদাহৰণ 2 $(98)^5$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান আমি 98ক এনে দুটা সংখ্যাৰ অন্তৰ হিচাপে প্ৰকাশ কৰিম যাৰ ঘাতসমূহৰ মান সহজে উলিয়াব পাৰি আৰু তাৰ পিছত দ্বিপদ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰিম।

$$98 = 100 - 2$$

গতিকে, $(98)^5 = (100-2)^5$

$$= {}^5C_0(100)^5 - {}^5C_1(100)^4.2 + {}^5C_2(100)^3 2^2$$
$$- {}^5C_3(100)^2(2)^3 + {}^5C_4(100)\,(2)^4 - {}^5C_5(2)^5$$

$= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4 - 10$
$\times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$

$= 10040008000 - 1000800032 = 9039207968$

উদাহৰণ 3 $(1.01)^{1000000}$ আৰু 10,000 ৰ ভিতৰত কোনটো ডাঙৰ?

সমাধান 1.01 ক দুটা অংশত ভাগ কৰি আৰু দ্বিপদ উপপাদ্যৰ সহায়ত প্ৰথম কেইটামান পদ লিখি, আমি পাম

$$(1.01)^{1000000} = (1+0.01)^{1000000}$$

$$= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01) + \text{ আনবোৰ ধনাত্মক পদ}$$

$$= 1 + 1000000 \times 0.01 + \text{ আনবোৰ ধনাত্মক পদ}$$

$$= 1 + 10000 + \text{ আনবোৰ ধনাত্মক পদ}$$

$$> 10000$$

গতিকে $(1.01)^{1000000} > 10000$

উদাহৰণ 4 দ্বিপদ উপপাদ্যৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে $6^n – 5n$ ক 25 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ 1 হয়।

সমাধান যদি দুটা সংখ্যা a আৰু b ৰ বাবে আন দুটা সংখ্যা q আৰু r পোৱা যায় যে $a=bq+r$, তেনেহ'লে আমি কওঁ যে a ক b ৰে হৰণ কৰিলে ভাগফল q আৰু ভাগশেষ r হয়। গতিকে $6^n – 5n$ ক 25 ৰে হৰণ কৰাত ভাগশেষ 1 হ'বলৈ হ'লে আমি এনে এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা k পাব লাগিব যাতে $6^n – 5n = 25k + 1$ হয়

আমি জানো,

$$(1+a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 a + {}^nC_2 a^2 + \ldots + {}^nC_n a^n$$

a=5 লৈ,

$$(1+5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 .5 + {}^nC_2 .5^2 + \ldots + {}^nC_n 5^n$$

বা $6^n = 1 + 5n + 5^2\ {}^nC_2 + 5^3 .{}^nC_3 + \ldots + 5^n$

বা $6^n - 5n = 1 + 25({}^nC_2 + 5.{}^nC_3 + \ldots + 5^{n-2})$

বা $6^n - 5n = 25k + 1$ য'ত $k = {}^nC_2 + 5.{}^nC_3 + \ldots + 5^{n-2}$

গতিকে $6^n - 5n$ ক 25 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ 1 হয়।

অনুশীলনী 8.1

1 ৰ পৰা 5 লৈ বিস্তাৰ কৰাঃ

1. $(1-2x)^5$ 2. $\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)^5$ 3. $(2x-3)^6$ 4. $\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{x}\right)^5$ 5. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

দ্বিপদ উপপাদ্যৰ সহায়ত তলৰ প্ৰতিটোৰ মান উলিওৱাঁ

6. $(96)^3$ 7. $(102)^5$ 8. $(101)^4$ 9. $(99)^5$

10. দ্বিপদ উপপাদ্যৰ সহায়ত $(1.1)^{10000}$ আৰু 1000 ৰ কোনটো ডাঙৰ নিৰ্ণয় কৰাঁ।

11. $(a+b)^4 - (a-b)^4$ উলিওৱাঁ। ইয়াৰ সহায়ত $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰাঁ।

12. $(x+1)^6 + (x-1)^6$ উলিওৱাঁ। ইয়াৰ সহায়ত বা অন্যভাৱে $(\sqrt{2}+1)^6 + (\sqrt{2}-1)^6$ ৰ মান উলিওৱাঁ ।

13. দেখুওৱাঁ যে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে $9^{n+1} - 8n - 9$ ৰাশিটো 64 ৰে বিভাজ্য।

14. প্ৰমাণ কৰাঁ যে $\sum_{r=0}^{n} 3^r\ {}^nC_r = 4^n$.

8.3 সাধাৰণ পদ আৰু মধ্য পদ (General and middle terms)

1. $(a+b)^n$ ৰ বিস্তৃতিত প্ৰথম পদ ${}^nC_0a^n$, দ্বিতীয় পদ ${}^nC_1a^{n-1}b$, তৃতীয় পদ ${}^nC_2a^{n-2}b^2$ ইত্যাদি। পদবোৰৰ ধাৰা লক্ষ্য কৰি আমি $(r+1)$ তম পদটো পাওঁ ${}^nC_ra^{n-r}b^r$. $(r+1)$ তম পদটোক সাধাৰণ পদ বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক T_{r+1} বুলি লিখা হয়। গতিকে, $T_{r+1}={}^nC_ra^{n-r}b^r$

2. $(a+b)^n$ ৰ মধ্যপদ ঃ

(i) $(a+b)^n$ ৰ মুঠ পদৰ সংখ্যা $n+1$. গতিকে n যুগ্ম হ'লে, $n+1$অযুগ্ম হ'ব। গতিকে মধ্য পদ হ'ব $\left(\frac{n+1+1}{2}\right)$ তম পদটো, অৰ্থাৎ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদটো।

উদাহৰণস্বৰূপে , $(x+2y)^8$ ৰ বিস্তৃতিত মধ্য পদ হ'ব $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ তম , অৰ্থাৎ 5-তম পদটো।

(ii) n অযুগ্ম হ'লে, $n+1$যুগ্ম হ'ব। গতিকে বিস্তৃতিটোত দুটা মধ্য পদ থাকিব। পদ দুটা হ'ব $\left(\frac{n+1}{2}\right)$তম আৰু $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ তম পদ দুটা।

উদাহৰণস্বৰূপে, $(2x-y)^7$ৰ বিস্তৃতিত মধ্য পদ দুটা হ'ব $\frac{7+1}{2}$ তম অৰ্থাৎ, 4 তম পদটো আৰু $\left(\frac{7+1}{2}+1\right)$তম, অৰ্থাৎ, 5-তম পদটো।

3. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ ৰ বিস্তৃতিত $(x\neq 0)$ মধ্য পদটো হ'ব $\left(\frac{2n+1+1}{2}\right)$ তম অৰ্থাৎ $(n+1)$তম পদটো , কাৰণ $2n$ যুগ্ম সংখ্যা। পদটো হ'ব ${}^{2n}C_n\, x^n\left(\frac{1}{x}\right)^n={}^{2n}C_n$ (ধ্ৰুৱক)।

এই পদটোক x ৰহিত পদ বা ধ্ৰুৱক পদ (*term independent* of x or the constant term) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 5 $(2+a)^{50}$ ৰ বিস্তৃতিত17 তম আৰু 18 তম পদ দুটা সমান হ'লে, a ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধান $(x+y)^n$ৰ বিস্তৃতিত $(r+1)$ তম পদটো হ'ল $T_{r+1}={}^cC_rx^{n-r}y^r$. 17 তম পদৰ বাবে $r+1=17$, বা $r=16$

গতিকে $T_{17}=T_{16+1}={}^{50}C_{16}(2)^{50-16}a^{16}$

$={}^{50}C_{16}2^{34}a_{16}$

সেইদৰে, $T_{18}={}^{50}C_{17}2^{33}a^{17}$

দিয়া আছে $T_{17}=T_{18}$

গতিকে ${}^{50}C_{16}(2)^{34}a^{16}={}^{50}C_{17}(2)^{33}a^{17}$

বা $$\frac{{}^{50}C_{16}\,.\,2^{34}}{{}^{50}C_{17}\,.\,2^{33}}=\frac{a^{17}}{a^{16}}$$

বা $$a=\frac{{}^{50}C_{16}\times 2}{{}^{50}C_{17}}=\frac{50!}{16!34!}\times\frac{17!.33!}{50!}\times 2=1$$

উদাহৰণ 6 n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'লে দেখুওৱা যে $(1+x)^{2n}$ ৰ বিস্তৃতিত মধ্য পদটো হ'ব $\frac{1.3.5....(2n-1)}{n!}2^n.x^n$

সমাধান $2n$ যুগ্ম, গতিকে $(1+x)^{2n}$ ৰ মধ্য পদ হ'ল $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$তম অৰ্থাৎ $(n+1)$ তম পদটো আৰু এই পদটো হ'ব

$$T_{n+1} = {}^{2n}C_n(1)^{2n-n}(x)^n = {}^{2n}C_n x^n = \frac{(2n)!}{n!n!}x^n$$

$$= \frac{2n\ (2n-1)\ (2n-2)......4.3.2.1}{n!\ n!}x^n$$

$$= \frac{1.2.3.4........(2n-2)(2n-1)(2n)}{n!\ n!}x^n$$

$$= \frac{[1.3.5.......(2n-1)][2.4.6.......(2n)]}{n!\ n!}x^n$$

$$= \frac{[1.3.5.....(2n-1)]\ [1.2.3.....n].2^n}{n!\ n!}x^n$$

$$= \frac{1.3.5.....(2n-1)]\ n!}{n!\ n!}2^n\ x^n$$

$$= \frac{1.3.5.....(2n-1)}{n!}2^n\ x^n$$

উদাহৰণ 7 $(x+2y)^9$ ৰ বিস্তৃতিত x^6y^3 ৰ সহগ উলিওৱাঁ

সমাধান ধৰা হ'ল $(x+2y)^9$ ৰ বিস্তৃতিত $(r+1)$ তম পদত x^6y^3 থাকে।

এতিয়া $T_{r+1} = {}^9C_r x^{9-r}(2y)^r = {}^9C_r.2^r.x^{9-r}.y^r$

এই পদটোৰ x আৰু y ৰ সূচকৰ লগত x^6y^3 ৰ x আৰু y ৰ সূচক তুলনা কৰি পোৱা যায় $r=3$. গতিকে, x^6y^3 ৰ সহগ হ'ল

$${}^9C_3 2^3 = \frac{9!}{3!6!}.2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}.2^3 = 672\ ।$$

উদাহৰণ 8 $(x+a)^n$ ৰ বিস্তৃতিত দ্বিতীয়, তৃতীয় আৰু চতুৰ্থ পদকেইটা যথাক্ৰমে 240,720 আৰু 1080 হ'লে x, a আৰু n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ।

সমাধান দিয়া আছে $T_2=240$

আমি জানো $T_2 = {}^nC_1x^{n-1}.a$

গতিকে ${}^nC_1x^{n-1}.a = 240$ ..... (1)

সেইদৰে ${}^nC_2x^{n-2}.a^2 = 720$ ..... (2)

${}^nC_3x^{n-3}a^3 = 1080$ ..... (3)

(2) ক (1) ৰে হৰণ কৰি পোৱা যায়

$$\frac{{}^nC_2x^{n-2}a^2}{{}^nC_1x^{n-1}a} = \frac{720}{240} \quad \text{বা} \quad \frac{(n-1)!}{(n-2)!}.\frac{a}{x} = 6$$

বা $$\frac{a}{x}=\frac{6}{n-1} \qquad .....(4)$$

(3) ক (2) ৰে হৰণ কৰি পোৱা যাব

$$\frac{a}{x}=\frac{9}{2(n-2)} \qquad .....(5)$$

(4) আৰু (5) ৰ পৰা,

$$\frac{6}{n-1}=\frac{9}{2(n-2)} \qquad \text{বা } n=5$$

গতিকে (1)ৰ পৰা , $5x^4a=240$ আৰু (4)ৰ পৰা $\frac{a}{x}=\frac{3}{2}$. এই সমীকৰণ দুটা সমাধান কৰি আমি পাম $x=2$ আৰু $a=3$ ।

উদাহৰণ 9 $(1+a)^n$ ৰ বিস্তৃতিত তিনিটা ক্ৰমিক পদৰ সহগৰ অনুপাত1:7:42 হ'লে, n ৰ মান উলিওৱাঁ।

সমাধান ধৰা হ'ল ক্ৰমিক পদ তিনিটা যথাক্ৰমে $(r-1)$ তম, r-তম আৰু $(r+1)$তম পদ। $(r-1)$ তম পদটো হ'ল ${}^nC_{r-2}a^{r-2}$ আৰু ইয়াৰ সহগ হ'ল ${}^nC_{r-2}$. সেইদৰে r-তম আৰু $(r+1)$ তম পদৰ সহগ হ'ব ক্ৰমে ${}^nC_{r-1}$ আৰু ${}^nC_r$.

গতিকে, $$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}}=\frac{1}{7}, \text{ বা, } n-8r+9=0 \qquad .....(1)$$

আৰু $$\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r}=\frac{7}{42} \text{ বা, } n-7r+1=0 \qquad .....(2)$$

(1) আৰু (2) সমাধা কৰি পোৱা যাব, $n=55$.

অনুশীলনী 8.2

সহগ নিৰ্ণয় কৰাঁ ঃ

1. $(x+3)^8$ৰ বিস্তৃতিত x^5 ৰ

2. $(a-2b)^{12}$ ৰ বিস্তৃতিত a^5b^7ৰ

বিস্তৃতিৰ সাধাৰণ পদ নিৰ্ণয় কৰাঁ ঃ

3. $(x^2-y)^6$

4. $(x^2-yx)^{12}, \quad x\neq 0$

5. $(x-2y)^{12}$ৰ বিস্তৃতিত চতুৰ্থ পদটো উলিওৱাঁ ।

6. $\left(9x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ ৰ বিস্তৃতিত $(x\neq 0)$ 13 তম পদটো উলিওৱাঁ।

বিস্তৃতিৰ মধ্য পদ উলিওৱাঁ ঃ

7. $\left(3-\frac{x^3}{6}\right)^7$

8. $\left(\frac{x}{3}+9y\right)^{10}$

9. প্ৰমাণ কৰাঁ যে $(1+a)^{m+n}$ ৰ বিস্তৃতিত a^m আৰু a^n ৰ সহগ দুটা সমান।

10. $(x+1)^n$ৰ বিস্তৃতিত $(r-1)$ তম, r তম আৰু $(r+1)$ তম পদৰ সহগ কেইটাৰ অনুপাত 1:3:5. n আৰু r নিৰ্ণয় কৰাঁ।

11. প্ৰমাণ কৰাঁ যে $(1+x)^{2n}$ ৰ বিস্তৃতিত x^nৰ সহগটো $(1+x)^{2n-1}$ৰ বিস্তৃতিত x^nৰ সহগটোৰ দুগুণ।

12. $(1+x)^m$ৰ বিস্তৃতিত x^2ৰ সহগ 6 হ'লে, m ৰ এটা ধনাত্মক মান উলিওৱাঁ।

বিবিধ উদাহৰণ

উদাহৰণ 10 $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^6$ ৰ বিস্তৃতিত x ৰহিত পদটো নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান বিস্তৃতিটোৰ $(r+1)$ তম পদটো হ'ল

$$T_{r+1} = {}^6C_r\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r$$

$$= {}^6C_r\left(\frac{3}{2}\right)^{6-r}(x^2)^{6-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r\left(\frac{1}{3^r}\right)$$

$$= (-1)^r\ {}^6C_r\ \frac{(3)^{6-2r}}{(2)^{6-r}}x^{12-3r}$$

পদটো x ৰহিত হ'ব যদিহে x অৰ সূচক শূন্য হয়, অৰ্থাৎ, $12-3r=0$ বা $r=4$। গতিকে পঞ্চম পদটো x ৰহিত আৰু ইয়াৰ মান হ'ব $(-1)^4\ {}^6C_4\ \frac{(3)^{6-8}}{(2)^{6-4}} = \frac{5}{12}$.

উদাহৰণ 11 $(1+a)^n$ ৰ বিস্তৃতিত a^{r-1}, a^rআৰু a^{r+1}ৰ সহগকেইটা সমান্তৰ প্ৰগতিত থাকিলে, প্ৰমাণ কৰা যে $n^2-n(4r+1)+4r^2-2=0$.

সমাধান বিস্তৃতিটোৰ $(r+1)$ তম পদটো হ'ল ${}^nC_r a^r$. গতিকে $(r+1)$ তম পদত a^r থাকে আৰু ইয়াৰ সহগটো হ'ল ${}^nC_r$. গতিকে a^{r-1}, a^r আৰু a^{r+1}ৰ সহগকেইটা যথাক্ৰমে ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$, ${}^nC_{r+1}$ হ'ব। যিহেতু এইকেইটা সমান্তৰ প্ৰগতিত আছে, গতিকে ${}^nC_{r-1}+{}^nC_{r+1}=2.{}^nC_r$

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}=2\times\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

বা $$\frac{1}{(r-1)!\ (n-r+1)\ (n-r)\ (n-r-1)!}+\frac{1}{(r+1)(r)(r-1)!\ (n-r-1)!}$$

$$=2\times\frac{1}{r(r-1)!\ (n-r)\ (n-r-1)!}$$

বা $$\frac{1}{(r-1)!\ (n-r-1)!}\left[\frac{1}{(n-r)(n-r+1)}+\frac{1}{(r+1)r}\right]$$

$$= 2 \times \frac{1}{(r-1)!\,(n-r-1)!\,[r(n-r)]}$$

বা $\quad \frac{1}{(n-r+1)\,(n-r)} + \frac{1}{r(r+1)} = \frac{2}{r(n-r)}$

বা $\quad \frac{r(r+1)\ +\ (n-r)\,(n-r+1)}{(n-r)\,(n-r+1)r\,(r+1)} = \frac{2}{r(n-r)}$

বা $\quad r\,(r+1) + (n-r)\,(n-r+1) = 2(r+1)\,(n-r+1)$

বা $\quad r^2 + r + n^2 - nr + n - nr + r^2 - r = 2(nr - r^2 + r + n - r + 1)$

বা $\quad n^2 - 4nr - n + 4r^2 - 2 = 0$

অৰ্থাৎ, $\quad n^2 - n\,(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$

উদাহৰণ 12 দেখুওৱা যে $(1+x)^{2n}$ৰ বিস্তৃতিত মধ্য পদৰ সহগটো $(1+x)^{2n-1}$ৰ বিস্তৃতিত মধ্য পদ দুটাৰ সহগৰ যোগফলৰ সমান।

সমাধান যিহেতু $2n$ যুগ্ম সংখ্যা, গতিকে $(1+x)^{2n}$ ৰ বিস্তৃতিত এটা মধ্য পদ আছে আৰু এইটো হ'ল $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ তম, অৰ্থাৎ $(n+1)$ তম পদটো । এই পদটো হ'ল ${}^{2n}C_n\ x^n$ আৰু x^n ৰ সহগ হ'ল ${}^{2n}C_n$ ।

সেইদৰে, $(2n-1)$ অযুগ্ম হেতুকে আনটো বিস্তৃতিত দুটা মধ্য পদ

$\left(\frac{2n-1+1}{2}\right)$তম আৰু $\left(\frac{2n-1+1}{2}+1\right)$ তম , অৰ্থাৎ n তম আৰু $(n+1)$ তম পদ হ'ব। এই পদ দুটাৰ সহগ দুটা হ'ল ${}^{2n-1}C_{n-1}$ আৰু ${}^{2n-1}C_n$

স্পষ্টত ঃ ${}^{2n-1}C_{n-1} + {}^{2n-1}C_n = {}^{(2n-1)+1}C_n = {}^{2n}C_n \quad \left[{}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_r = {}^{n+1}C_r\right.$ ব্যৱহাৰ কৰি.$\left.\right]$

উদাহৰণ 13 দ্বিপদ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $(1+2a)^4\,(2-a)^5$ ৰ পৰা a^4ৰ সহগ উলিওৱাঁ ।

সমাধান দ্বিপদ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি পোৱা যাব

$$(1+2a)^4 = {}^4C_0 + {}^4C_1(2a) + {}^4C_2(2a)^2 + {}^4C_3(2a)^3 + {}^4C_4(2a)^4$$
$$= 1 + 4.(2a) + 6.(4a^2) + 4.(8a^3) + 16a^4$$
$$= 1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4$$

আৰু $(2-a)^5 = {}^5C_0 2^5 - {}^5C_1 2^4.a + {}^5C_2.2^3.a^2 - {}^5C_3 2^2.a^3 + {}^5C_4.2.a^4 - {}^5C_5 a^5$

$$= 32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5$$

গতিকে $(1+2a)^4\,(2-a)^5$

$$= (1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4)\ (32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5)$$

বন্ধনীৰ ভিতৰত আটাইবোৰ ৰাশিৰ পূৰণফল উলিওৱাৰ প্ৰয়োজন নাই। আমি অকল a^4 থকা পদকেইটাহে উলিয়াম। আমি জানো যে $a^r.a^{4-r}=a^4$ এইটো ব্যৱহাৰ কৰি a^4থকা পদকেইটা পোৱা যাব-

$$1(10a^4) + (8a)\,(-40a^3) + (24a^2)\,(80a^2) + (32a^3)\,(-80a) + (16a^4)\,(32) = -438a^4$$

গতিকে প্ৰদত্ত পূৰণটোত a^4ৰ সহগ হ'ল -438.

উদাহৰণ 14 $(x+a)^n$ৰ বিস্তৃতিত শেষৰ পৰা r তম পদটো উলিওৱাঁ ।

সমাধান $(x+a)^n$ ৰ বিস্তৃতিত $(n+1)$ টা পদ আছে। স্পষ্টত ঃ শেষৰ পৰা প্ৰথম পদটো আৰম্ভণিৰ পৰা অন্তিম পদটো, অৰ্থাৎ $(n+1)$ তম পদটো আৰু $n+1=(n+1)-(1-1)$। শেষৰ পৰা দ্বিতীয় পদটো হ'ল বিস্তৃতিৰ n তম পদটো আৰু $n=(n+1)-(2-1)$। শেষৰ পৰা তৃতীয় পদটো হ'ল বিস্তৃতিৰ $(n-1)$তম পদটো, আৰু $n-1=(n+1)-(3-1)$, ইত্যাদি। গতিকে, শেষৰ পৰা r তম পদটো হ'ব $(n+1)-(r-1)=(n-r+2)$ তম পদটো। পদটো হ'ব $T_{n-r+2}={}^nC_{n-r+1}\,x^{r-1}a^{n-r+1}$

উদাহৰণ 15 $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$ ৰ বিস্তৃতিত n ৰহিত পদটো উলিওৱাঁ, $x>0$।

সমাধান $(r+1)$ তম পদটো হ'ব $T_{r+1}={}^{18}C_r\left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r}\left(\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r$

$$={}^{18}C_r.x^{\frac{18-r}{3}}.\frac{1}{2^r.x^{\frac{r}{3}}}={}^{18}C_r.\frac{1}{2^r}.x^{\frac{18-2r}{3}}$$

পদটো x ৰহিত হ'ব যদিহে $\dfrac{18-2r}{3}=0$ হয়। অৰ্থাৎ, $r=9$।

গতিকে নিৰ্ণয় পদটো হ'ল ${}^{18}C_9.\dfrac{1}{2^9}$.

উদাহৰণ 16 $x\neq 0$ আৰু m এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা আৰু $\left(x-\dfrac{3}{x^2}\right)^m$ ৰ বিস্তৃতিত প্ৰথম তিনিটা পদৰ সহগৰ সমষ্টি 559. বিস্তৃতিটোত x^3 থকা পদটো নিৰ্ণয় কৰাঁ।

সমাধান প্ৰথম তিনিটা পদৰ সহগ কেইটা হ'ব ${}^mC_o$, $(-3)\,{}^mC_1$ আৰু $9.{}^mC_2$ । গতিকে প্ৰদত্ত চৰ্তসাপেক্ষে, ${}^mC_0-3.{}^mC_1+9.{}^mC_2=559$

বা $$1-3m+9\frac{m(m-1)}{2}=559.....(1)$$

দিয়া আছে যে m এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা। (1) সমাধা কৰি পোৱা যাব, $m=12$

এতিয়া $$T_{r+1}={}^{12}C_rx^{12-r}\left(-\frac{3}{x^2}\right)^r={}^{12}C_r(-3)^rx^{12-3r}$$

আমাক x^3 থকা পদটো লাগে। গতিকে $12-3r=3$ ধৰিলে $r=3$ হ'ব।

গতিকে নিৰ্ণয় পদটো হ'ল : ${}^{12}C_3(-3)^3x^3=-5940x^3$ ।

উদাহৰণ 17 $(1+x)^{34}$ ৰ বিস্তৃতিত $(r-5)$ তম আৰু $(2r-1)$ তমপদৰ সহগ সমান হ'লে, r ৰ মান নিৰ্ণয় কৰাঁ ।

সমাধান $(1+x)^{34}$ ৰ বিস্তৃতিত, $(r-5)$ তম আৰু $(2r-1)$ তম পদ দুটাৰ সহগ হ'ল ${}^{34}C_{r-6}$ আৰু ${}^{34}C_{2r-2}$. প্ৰদত্ত চৰ্তমতে, ${}^{34}C_{r-6}={}^{34}C_{2r-2}$

গতিকে $r-6=2r-2$ অথবা $r-6=34-(2r-2)$

[যিহেতু $^nC_r = {}^nC_p$ হ'লে, $r = p$ বা $r = n - p$ হয়]

গতিকে $r = -4$ অথবা $r = 14$. r এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা, সেয়েহে $r = -4$ হ'ব নোৱাৰে।

গতিকে $r = 14$

অষ্টম অধ্যায়ৰ বিবিধ অনুশীলনী

1. $(a+b)^n$ৰ বিস্তৃতিত প্ৰথম তিনিটা পদ যথাক্ৰমে 729, 7290 আৰু 30375. a, b আৰু n ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।
2. $(3+ax)^9$ৰ বিস্তৃতিত x^2 আৰু x^3ৰ সহগ সমান হ'লে, a ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ।
3. $(1+2x)^6(1-x)^7$গুণফলটোত x^5ৰ সহগ উলিওৱাঁ।
4. a আৰু b ভিন্ন অখণ্ড সংখ্যা আৰু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে $a^n - b^n$ৰ এটা উৎপাদক $a - b$.

   [**সংকেত ঃ** $a^n = (a-b+b)^n$ আৰু বিস্তাৰ কৰা]
5. মান নিৰ্ণয় কৰাঁ ঃ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^6$
6. $\left(a^2+\sqrt{a^2-1}\right)^4 + \left(a^2-\sqrt{a^2-1}\right)^4$ ৰ মান উলিওৱা ।
7. বিস্তৃতিৰ প্ৰথম তিনিটা পদ লিখি $(0.99)^5$ৰ এটা আসন্ন মান উলিওৱাঁ ।
8. $\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ ৰ বিস্তৃতিত আৰম্ভণিৰ পৰা 5 তম পদটো আৰু শেষৰ পৰা 5 তম পদটোৰ অনুপাত $\sqrt{6}:1$ হ'লে, n ৰ মান উলিওৱাঁ।
9. দ্বিপদ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি বিস্তাৰ কৰাঁ ঃ $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$
10. দ্বিপদ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি $(3x^2-2ax+3a^2)^3$ ৰ বিস্তৃতি উলিওৱাঁ।

সাৰাংশ

- যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সূচকৰ বাবে এটা দ্বিপদ ৰাশিৰ বিস্তৃতি দ্বিপদ উপপাদ্যৰ সহায়ত কৰা হয় আৰু এই উপপাদ্যটো হ'ল

  $(a+b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + C_2a^{n-2}b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}ab^{n-1} + {}^nC_nb^n$
- বিস্তৃতিটোৰ সহগবোৰ এটা অনুবিন্যাস (array) ত সজোৱা হয়। এই অনুবিন্যাসটোক পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজ বোলা হয়।
- $(a+b)^n$ ৰ বিস্তৃতিত সাধাৰণ পদটো হ'ল $T_{r+1} = {}^nC_ra^{n-r}.b^r$
- $(a+b)^n$ ৰ বিস্তৃতিত n যুগ্ম সংখ্যা হ'লে, মধ্যপদ হয় $\left(\frac{n}{2}+1\right)$তম পদটো। n অযুগ্ম সংখ্যা হ'লে, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম আৰু $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$তম পদ দুটা মধ্যপদ হয়।

ঐতিহাসিক টোকা

অতীত যুগৰ ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ সকলে $(x+y)^n$ ৰ বিস্তৃতিত $0 \le n \le 7$ ৰ ক্ষেত্ৰত সহগবোৰৰ মান, জানিছিল। এই সহগবোৰ এটা চিত্ৰত সজোৱা হৈছিল। চিত্ৰটোক 'মেৰু প্ৰস্তৰ' বোলা হৈছিল আৰু এইটো পিংগলৰ গ্ৰন্থ 'ছন্দশাস্ত্ৰত' (200 B.C.) পোৱা যায়। এই ত্ৰিভুজাকাৰৰ সজ্জাটো 1303 চনত চীনদেশৰ গণিতজ্ঞ চ্যু-ছি-কাই (Chu-Shi-Kie) ৰ কৰ্মৰাজিতো পোৱা যায়। জাৰ্মান গণিতজ্ঞ মাইকেল স্তিপেল (Michel Stipal 1486 - 1567) এ সম্ভৱতঃ 1544 চনত 'দ্বিপদ সহগ' পদটো প্ৰথম ব্যৱহাৰ কৰিছিল। বোম্বেলিও (Bomballi), (1572) $n = 1,2\ldots,7$ ৰ বাবে $(a+b)^n$ ৰ সহগবোৰ উলিয়াইছিল। অ'ট্ৰেড (Oughtred, 1631) এ এই সহগবোৰ $n = 1,2,\ldots\ldots,10$ লৈ জানিছিল। পিংগলৰ মেৰু-প্ৰস্তৰৰ সদৃশ 'পাস্কেলৰ ত্ৰিভুজ' নামেৰে জনপ্ৰিয় সাংখ্যিক ত্ৰিভুজটো ফৰাচী গণিতজ্ঞ ব্লেইছ পাস্কেল (Blaise Pascal, 1623-1662) এ উলিয়াইছিল।

বৰ্তমানৰ আৰ্হি অখণ্ড সূচক n ৰ বাবে দ্বিপদ উপপাদ্যটো পাস্কেলে লিখা আৰু তেওঁৰ মৃত্যুৰ পিছত 1665 চনত প্ৰকাশিত *Trate du triange arithmetic* নামৰ গ্ৰন্থখনত পোৱা যায়।

— ❖ —