(2) ઘટના B = પસંદ કરેલ ઉમેદવારના 60થી વધુ ગુણ હોય

$P(B)$ = 60 થી વધુ ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{60 થી વધુ ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના ઉમેદવારોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

m = 60થી વધુ ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા

$= 326 + 124$

$= 450$

હવે, $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{450}{1191}$

$= \frac{150}{397}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{150}{397}$

(3) ઘટના C = પસંદ કરેલ ઉમેદવારના 21થી 80 સુધી ગુણ હોય

$P(C)$ = 21થી 80 સુધી ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{21થી 80 સુધી ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના ઉમેદવારોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

m = 21થી 80 સુધી ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા

$= 162 + 496 + 326$

$= 984$

હવે, $P(C) = \frac{m}{n}$

$= \frac{984}{1191}$

$= \frac{328}{397}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{328}{397}$

ઉદાહરણ 37 : એક કારખાનામાં બે પાળી ચાલે છે. આ પાળીમાં ઉત્પાદિત એકમોની ગુણવત્તાની નિદર્શ માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

ગુણવત્તા	પાળી		કુલ
	I	II	
ખામીવાળા એકમો	24	46	**70**
ખામીરહિત એકમો	2176	2754	**4930**
કુલ	**2200**	**2800**	**5000**

કારખાનાનાં ઉત્પાદનમાંથી એક એકમ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) જો એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય, તો તે ખામીવાળો હોય તેની સંભાવના શોધો.

(2) જો એકમ ખામીવાળો હોય તો તે પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં નિદર્શમાં પસંદ કરેલા એકમોની કુલ સંખ્યા = 5000

આપણે નીચે જણાવ્યા પ્રમાણે ઘટનાઓ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

ઘટના A = પસંદ કરેલ એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલ હોય.

$P(A)$ = પહેલી પાળીના ઉત્પાદનના એકમોની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$= \frac{\text{પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાં મળેલ એકમો}}{\text{નિદર્શના એકમોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$

m = પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાં મળેલ એકમો

= 2200

હવે, $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{2200}{5000}$

ઘટના D = પસંદ કરેલ એકમ ખામીવાળો હોય

$P(D)$ = ખામીવાળા એકમની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$= \frac{\text{ખામીવાળા એકમોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના એકમોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$

m = ખામીવાળા એકમોની સંખ્યા

= 70

હવે, $P(D) = \frac{m}{n}$

$= \frac{70}{5000}$

ઘટના $A \cap D$ = પસંદ કરેલ એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલ હોય અને તે ખામીવાળો હોય.

$P(A \cap D)$ = ઘટના $A \cap D$ની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$= \frac{\text{ઘટના } A \cap D \text{ માં આવતા એકમોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના એકમોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$

m = ઘટના $A \cap D$માં આવતા એકમોની સંખ્યા

= 24

હવે, $P(A \cap D) = \frac{m}{n} = \frac{24}{5000}$

(1) એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય તો તે ખામીવાળો હોય તે ઘટના = D/A

શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા મુજબ ઘટના D/Aની સંભાવના

$$P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{24}{5000}}{\frac{2200}{5000}}$$

$$= \frac{24}{2200}$$

$$= \frac{3}{275}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{3}{275}$

(આ સંભાવના સીધી જ D/A ઘટનાની સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{24}{2200}$ પરથી પણ મેળવી શકાય.)

(2) એકમ ખામીવાળો હોય તો તે પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય તે ઘટના A/D શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા મુજબ ઘટના A/Dની સંભાવના

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{\frac{24}{5000}}{\frac{70}{5000}}$$

$$= \frac{24}{70}$$

$$= \frac{12}{35}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{12}{35}$

(આ સંભાવના સીધી જ A/D ઘટનાની સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{24}{70}$ પરથી પણ મેળવી શકાય.)

મર્યાદા : સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યાની મર્યાદાઓ નીચે મુજબ છે :

(1) સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યામાં $n \to \infty$ એટલે કે nની કિંમત અનંતને અનુલક્ષે ત્યારે જ સંભાવનાની કિંમત મળે છે પરંતુ વ્યવહારમાં nની કિંમત અનંત લઈ શકાય નહિ.

(2) આ વ્યાખ્યાથી મળતી કોઈપણ ઘટનાની સંભાવના એ અંદાજિત કિંમત છે. આ વ્યાખ્યાની મદદથી સંભાવનાની સાચી કિંમત જાણી શકાતી નથી.

સ્વાધ્યાય 1.5

1. એક મેગા સિટીમાં લોકલ બસમાં પ્રવાસ કરતાં પ્રવાસીઓના વિશાળ સમૂહમાંથી તેમણે કરેલા માસિક પ્રવાસ-ખર્ચની (₹ માં) નિદર્શ માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી છે :

માસિક પ્રવાસ-ખર્ચ (₹)	501–600	601–700	701–800	801–900	901 કે તેથી વધુ
પ્રવાસીઓની સંખ્યા	318	432	639	579	174

આ મેગા સિટીમાંથી લોકલ બસમાં પ્રવાસ કરતાં એક વ્યક્તિને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. આ વ્યક્તિનો માસિક પ્રવાસ-ખર્ચ (1) ₹ 900થી વધુ હોય (2) વધુમાં વધુ ₹ 700 હોય અને (3) ₹ 601 કે તેથી વધુ પરંતુ ₹ 900 કે તેથી ઓછો હોવાની સંભાવના શોધો.

2. એક મત-વિસ્તારના 4979 મતદારોની નિદર્શ તપાસમાં નીચેની વીગત મળે છે :

વીગત	પુરુષો	સ્ત્રીઓ
પક્ષ Aના ટેકેદાર	1319	1118
પક્ષ Bના ટેકેદાર	1217	1325

આ મત-વિસ્તારમાંથી એક મતદારને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) જો મતદાર પુરુષ હોય તો તે પક્ષ Aનો ટેકેદાર હોય તેની સંભાવના શોધો.

(2) જો મતદાર પક્ષ Aનો ટેકેદાર છે એમ આપેલ હોય, તો તે પુરુષ હોવાની સંભાવના શોધો.

*

સારાંશ

- ચાન્સ પર આધાર રાખતી ઘટનાઓને યાદૃચ્છિક ઘટનાઓ કહે છે.
- જે પ્રયોગનું નિરપેક્ષ રીતે સમાન સંજોગોમાં પુનરાવર્તન કરી શકાતું હોય અને તે પ્રયોગનાં બધાં જ શક્ય પરિણામો જ્ઞાત હોય પરંતુ તે પૈકી કયું ચોક્કસ પરિણામ મળશે તેનું નિશ્ચિત અનુમાન પ્રયોગ પૂર્વે કરી શકાતું ન હોય તેવા પ્રયોગને યાદૃચ્છિક પ્રયોગ કહે છે.
- કોઈપણ યાદૃચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામોના ગણને તે યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ કહે છે.
- યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના ઉપગણને તે યાદૃચ્છિક પ્રયોગની ઘટના કહે છે.
- U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A અને B બંને એક સાથે બની જ ન શકે એટલે કે $A \cap B = \phi$ હોય, તો ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહેવાય.
- જો યાદૃચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓનાં શક્ય પરિણામોનો સમૂહ નિદર્શ અવકાશ થાય તો તે ઘટનાઓને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય.
- પ્રાથમિક ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ હોય છે.
- કોઈ યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે કે તેથી વધુ ઘટનાઓ પૈકી એક ઘટના બનવાની શક્યતા બીજી કોઈપણ ઘટના બનવાની શક્યતા કરતાં વધુ કે ઓછી હોવાનું કોઈ દેખીતું કારણ ન હોય તેવી ઘટનાઓને સમસંભાવી ઘટનાઓ કહે છે.
- કોઈ યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ U ના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા n છે. તે પૈકી કોઈ ઘટના A બનવાને સાનુકૂળ પરિણામો m હોય, તો ઘટના Aની સંભાવના $\frac{m}{n}$ થાય.
- નિદર્શ અવકાશ Uની કોઈપણ ઘટના Aની સંભાવના $P(A)$ની કિંમતનો વિસ્તાર 0 થી 1 સુધીનો છે. એટલે કે, $0 \le P(A) \le 1$
- U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે તથા A અને B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. જો ઘટના A બનવાની સંભાવના ઘટના B બનવા (કે ન બનવા)થી બદલાતી ન હોય, તો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.
- ધારો કે સમાન પરિસ્થિતિમાં કોઈ યાદૃચ્છિક પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે છે. આ n પ્રયત્નો પૈકી m પ્રયત્નોમાં ઘટના A બને છે, તો ઘટના Aની સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{m}{n}$ ઘટના A બનવાની સંભાવના $P(A)$નો અંદાજ આપે છે. જ્યારે nની કિંમત વધુ ને વધુ મોટી લેવામાં આવે એટલે કે nની કિંમત અનંત તરફ $(n \to \infty)$ જાય ત્યારે $\frac{m}{n}$ની લક્ષિત કિંમતને ઘટના Aની સંભાવના કહે છે.

સૂત્રોની યાદી :

(1) ઘટના Aની પૂરક ઘટના $A' = U - A$

(2) ઘટના A અને Bની તફાવત ઘટના $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$ (ફક્ત ઘટના A બને)

(3) ઘટના B અને Aની તફાવત ઘટના $B - A = A' \cap B = B - (A \cap B)$ (ફક્ત ઘટના B બને)

(4) યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

(5) સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ

કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

કોઈ ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C માટે,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક હોય,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક હોય,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ હોય,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$$

ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ હોય,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

(6) શરતી સંભાવના

ઘટના A બની હોય તે શરતે ઘટના B બને.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; \quad P(A) \neq 0$$

ઘટના B બની હોય તે શરતે ઘટના A બને

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \quad P(B) \neq 0$$

(7) સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ

કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A);\ P(A) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B);\ P(B) \neq 0$

- બે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોય,

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$

$P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$

$P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

(8) સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા અનુસાર,

$P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{m}{n}$

સ્વાધ્યાય 1

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નિદર્શ અવકાશ Uના વિશિષ્ટ ઉપગણ ϕ ને કઈ ઘટના કહે છે ?

(a) ચોક્કસ ઘટના (b) ϕ ની પૂરક ઘટના

(C) U અને ϕ ની યોગઘટના (d) અશક્ય ઘટના

2. ઘટનાઓ A અને A' માટે $P(A \cap A')$નું મૂલ્ય કેટલું થાય ?

(a) 1 (b) 0 (c) 0.5 (d) 0 અને 1ની વચ્ચે

3. નિદર્શ અવકાશમાંની કોઈપણ ઘટના A માટે નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ સાચો છે ?

(a) $P(A) < 0$ (b) $0 \le P(A) \ge 1$ (c) $0 \le P(A) \le 1$ (d) $P(A) > 1$

4. નિદર્શ અવકાશ Uમાંની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે $A \subset B$ હોય, તો નીચેનામાંથી કયું વિધાન સાચું નથી ?

(a) $P(A \cap B) = P(B)$ (b) $P(A \cap B) = P(A)$

(c) $P(A \cup B) \ge P(A)$ (d) $P(B - A) = P(B) - P(A)$

5. સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા બીજા કયા નામે ઓળખાય છે ?

(a) ગાણિતિક વ્યાખ્યા (b) પૂર્વ ધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા

(c) આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા (d) ભૌમિતિક વ્યાખ્યા

6. એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવાના યાદૃચ્છિક પ્રયોગમાં મળતી પ્રાથમિક ઘટનાઓ H અને T માટે સંભાવનાનું નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું નથી ?

(a) $P(T)=0.5$ (b) $P(H)+P(T)=1$ (c) $P(H\cap T)=0.5$ (d) $P(H)=0.5$

7. નીચે જણાવેલ યાદૃચ્છિક પ્રયોગો પૈકી કયા યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ અનંત છે ?

(a) બે પાસા ઉછાળવા (b) ઑફિસમાંથી બે કર્મચારીઓ પસંદ કરવા

(c) ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય કલાકમાં માપવું (d) 52 પત્તાંમાંથી એક પત્તું પસંદ કરવું

8. ઘટના $A\cup A'=U$ હોય, તો A અને A' કેવી ઘટનાઓ કહેવાય ?

(a) નિરપેક્ષ ઘટનાઓ (b) પૂરક ઘટનાઓ (c) ચોક્કસ ઘટનાઓ (d) અશક્ય ઘટનાઓ

9. જો $P(A/B)=P(A)$ અને $P(B/A)=P(B)$ હોય તો ઘટનાઓ A અને B કેવી ઘટનાઓ કહેવાય ?

(a) નિરપેક્ષ ઘટનાઓ (b) પૂરક ઘટનાઓ (c) ચોક્કસ ઘટનાઓ (d) અશક્ય ઘટનાઓ

10. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે. $P(B-A)$ નીચેના પૈકી કોના બરાબર થશે ?

(a) $P(A)$ (b) $P(B)$ (c) $P(A\cap B)$ (d) $P(A\cup B)$

11. છ બાજુવાળા ત્રણ સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે, તો બનતા નિદર્શ અવકાશમાં નિદર્શ બિંદુઓની કુલ સંખ્યા કેટલી થાય ?

(a) 6^2 (b) 3^6 (c) 6×3 (d) 6^3

12. પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ 1 અને 20 વચ્ચેની સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો તે સંખ્યા 5ની ગુણક હોવાની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{3}$

13. બે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોય, તો નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ સાચો છે ?

(a) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ (b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

(c) $P(A\cup B)=P(A)\times P(B)$ (d) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

14. લીપ વર્ષ ન હોય તેવા વર્ષના ફેબ્રુઆરી માસમાં 5 ગુરુવાર આવે તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0 (b) $\frac{1}{7}$ (c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{3}{7}$

15. નિદર્શ અવકાશની બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A)=0.4$ અને $P(B')=0.3$ હોય, તો $P(A\cap B)$ની કિંમત જણાવો.

(a) 0.12 (b) 0.42 (c) 0.28 (d) 0.18

16. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે ઘટના $(A\cap B)\cup(A\cap B')$ જણાવો.

(a) ϕ (b) B (c) A (d) U

17. સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા મુજબ યાદૃચ્છિક પ્રયોગનાં n પરિણામો પૈકી દરેક પરિણામની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0 (b) $\frac{1}{n}$ (c) 1 (d) કહી શકાય નહિ.

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. યાદૃચ્છિક પ્રયોગનાં બે ઉદાહરણો આપો.

2. A અને B ની તફાવત ઘટના A-Bની વેન આકૃતિ દોરો.

3. ઘટનાની વ્યાખ્યા લખો.

4. એક સમતોલ પાસો અને એક સમતોલ સિક્કો એક સાથે ઉછાળવાના યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

5. શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા આપો.

6. ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બને તેની સંભાવના મેળવવાનું સૂત્ર લખો.

7. નિરપેક્ષ ઘટનાની વ્યાખ્યા લખો.

8. નિદર્શ અવકાશની બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ લખો.

9. $P(A/B)$ અને $P(B/A)$નું અર્થઘટન લખો.

10. નિદર્શ અવકાશ Uમાંની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C નિઃશેષ ઘટનાઓ ક્યારે કહેવાય ?

11. $P(A\cup B), P(A), P(A\cap B), 0, P(A)+P(B)$ને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો.

12. વ્યાખ્યા આપો :

(1) યાદૃચ્છિક પ્રયોગ (2) નિદર્શ અવકાશ

(3) સમસંભાવી ઘટનાઓ (4) સાનુકૂળ પરિણામો

(5) સંભાવના (ગાણિતિક વ્યાખ્યા) (6) સંભાવના (આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા)

(7) અશક્ય ઘટના (8) ચોક્કસ ઘટના

13. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે $A \cap B = \phi$ અને $A \cup B = U$ હોય, તો $P(A \cap B)$ અને $P(A \cup B)$ની કિંમતો જણાવો.

14. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો $P(A \cup B)$નું સૂત્ર લખો.

15. $A = \{x \mid 0 < x < 1\}$ હોય, તો $B = \{x \mid \frac{1}{4} \le x \le 3\}$ હોય, તો $A \cap B$ મેળવો.

16. નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = 0.5$ અને $P(B) = 0.7$ હોય, તો $P(A' \cap B')$ શોધો.

17. જો $P(A) = 0.8$ અને $P(A \cap B) = 0.25$ હોય, તો $P(A - B)$ શોધો.

18. જો $P(A) = 0.3$ અને $P(A \cap B) = 0.03$ હોય, તો $P(B/A)$ શોધો.

19. પરસ્પર નિવારક બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = P(B) = K$ હોય, તો $P(A \cup B)$ શોધો.

20. જો $P(A' \cap B) = 0.45$ અને $A \cap B = \phi$ હોય, તો $P(B)$ શોધો.

21. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ છે. જો $P(A) = \frac{1}{3}$ હોય, તો $P(B)$ શોધો.

22. એક સમૂહના 2 % એકમો ખામીવાળા છે. આ સમૂહમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ એક એકમ ખામીરહિત હોવાની સંભાવના કેટલી થાય ?

23. પાંચ સમતોલ સિક્કા ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા જણાવો.

24. એક સમતોલ સિક્કો અને બે સમતોલ પાસાં એક સાથે ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા જણાવો.

25. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = 0.7$ અને $P(A \cup B) = 0.45$ શક્ય છે ? કારણ આપો.

26. 52 પત્તાંમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે પત્તાં પુરવણી સહિત એક પછી એક પસંદ કરવામાં આવે છે. આ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના ઘટકોની સંખ્યા લખો.

27. બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(B/A) = \frac{1}{2}$ અને $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ હોય તો $P(A)$ શોધો.

28. 2000 ટિકિટોમાંથી 1998 ટિકિટો ઇનામ વગરની છે. એક વ્યક્તિ 2000 ટિકિટોમાંથી એક ટિકિટ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે, તો પસંદ કરેલ ટિકિટ ઇનામપાત્ર હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. નીચે આપેલી ઘટનાઓ માટે વેન આકૃતિ દોરી તેની વ્યાખ્યા લખો :

(1) પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ (2) યોગઘટના

(3) છેદઘટના (4) તફાવત ઘટના

(5) નિઃશેષ ઘટનાઓ (6) પૂરક ઘટના

2. સાન્ત અને અનંત નિદર્શ અવકાશનાં ઉદાહરણો આપો.

3. અશક્ય અને ચોક્કસ ઘટનાનાં ઉદાહરણો આપો.

4. યાદૃચ્છિક પ્રયોગનાં લક્ષણો જણાવો.

5. સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની ધારણાઓ લખો.

6. સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની મર્યાદાઓ લખો.

7. સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યાની મર્યાદાઓ લખો.

8. સમસંભાવી ઘટનાઓ ઉદાહરણ આપી સમજાવો.

9. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ લખો. જો આ ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક હોય, તો સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ લખો.

10. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ લખો. જો ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોય ત્યારે સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ લખો.

11. નિદર્શ અવકાશની બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે નીચેનાં પરિણામો લખો :

(1) $P(A \cap B)$ (2) $P(A' \cap B')$

(3) $P(A \cap B')$ (4) $P(A' \cap B)$

12. જો $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ અને $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ હોય, તો $P(A' \cap B')$ શોધો.

13. જો $P(B) = 2P(A/B) = 0.4$ હોય, તો $P(A \cap B)$ શોધો.

14. ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને $3P(A) = 2P(B) = 0.12$ હોય, તો $P(A \cap B)$ શોધો.

15. બે ઘટનાઓ A અને B માટે $5P(A) = 3P(B) = 2\,P(A \cup B) = \frac{3}{2}$ હોય, તો $P(A' \cup B')$ શોધો.

16. બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A \cap B) = 0.12$ અને $P(B) = 0.3$ હોય, તો $P(A \cup B)$ શોધો.

17. જો $A = \{x \mid 1 < x < 3\}$ અને $B = \{x \mid \frac{1}{2} \leq x < 2\}$ હોય, તો $A \cup B$ અને $A \cap B$ મેળવો.

18. બે ઘટનાઓ A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બનવાની સંભાવના $\frac{1}{4}$ અને ઘટના A બને પરંતુ ઘટના B ન બને તેની સંભાવના $\frac{1}{5}$ હોય, તો ઘટના B બનવાની સંભાવના શોધો.

19. ઘટનાઓ A અને B માટે $P(B)=\frac{3}{5}$ અને $P(A'\cap B)=\frac{1}{2}$ હોય, તો $P(A/B)$ શોધો.

20. 10 વ્યક્તિઓના સમૂહમાં 6 વ્યક્તિઓ પાસે પાસપોર્ટ છે. આ સમૂહમાંથી 3 વ્યક્તિઓની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે તો તેમાં,

(1) ત્રણેય વ્યક્તિઓ પાસે પાસપોર્ટ હોય.

(2) બે વ્યક્તિઓ પાસે પાસપોર્ટ ન હોય તેની સંભાવના શોધો.

21. કોઈ વર્ષના બજેટમાં પુરુષોની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે તેની સંભાવના 0.66 અને સ્ત્રીઓની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે તેની સંભાવના 0.72 છે. પુરુષો અને સ્ત્રીઓ એમ બંનેની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે તેની સંભાવના 0.47 હોય, તો તે વર્ષના બજેટમાં,

(1) પુરુષો અને સ્ત્રીઓ બેમાંથી ફક્ત એકની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે.

(2) પુરુષો અને સ્ત્રીઓ પૈકી કોઈની આવક માટે કર-મર્યાદા ન વધે તેની સંભાવના શોધો.

22. ક્રૂડ ઑઇલના ભાવ વધ્યા પછી પેટ્રોલના ભાવ વધે તેવું 80 % કિસ્સામાં બને છે અને ડિઝલના ભાવ વધે તેવું 77 % કિસ્સામાં બને છે. પેટ્રોલ અને ડિઝલ બંનેના ભાવ વધે તેવું 68 % કિસ્સામાં બને છે. પેટ્રોલના ભાવ વધે તે શરતે ડિઝલના ભાવ વધે તેની સંભાવના શોધો.

23. હવામાન ખાતાની આગાહી મુજબ આવતાં અઠવાડિયાના ત્રણ દિવસો ગુરુવાર, શુક્રવાર અને શનિવારના દિવસે વરસાદ પડવાની સંભાવના અનુક્રમે 0.8, 0.7 અને 0.6 છે. આવતા અઠવાડિયામાં આ ત્રણ દિવસો પૈકી ઓછામાં ઓછા એક દિવસે વરસાદ પડવાની સંભાવના શોધો.

(નોંધ : અઠવાડિયાના ત્રણ દિવસો ગુરુવાર, શુક્રવાર અને શનિવારના દિવસે વરસાદ પડે તે ઘટનાઓ નિરપેક્ષ છે.)

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ડિજિટલ સ્ટોર Aમાં 6 *LED* ટી.વી. અને 4 *LCD* ટી.વી. તથા ડિજિટલ સ્ટોર Bમાં 5 *LED* ટી.વી. અને 3 *LCD* ટી.વી. ડિસ્પ્લેમાં મૂકેલાં છે. બેમાંથી એક સ્ટોરની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરી તેમાંથી એક ટી.વી.ની પસંદગી કરવામાં આવે, તો તે *LCD* ટી.વી. હોવાની સંભાવના શોધો.

2. 1 થી 100 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલી સંખ્યા એક અંકની હોય અથવા પૂર્ણવર્ગ હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

3. એક સમતોલ સિક્કો ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો પ્રથમ બે પ્રયત્નોમાં સિક્કા પર કાંટો મળ્યો હોય, તો ત્રણેય પ્રયત્નોમાં સિક્કા પર કાંટો મળે તેની સંભાવના શોધો.

4. ઘટનાઓ *A, B* અને *C* નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને તેમના માટે $P(A)=P(B)=P(C)=p$ હોય, તો $P(A \cup B \cup C)$ની કિંમત *p*ના સ્વરૂપમાં મેળવો.

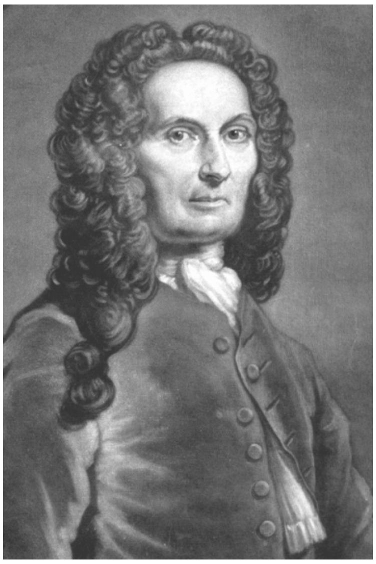
5. એક રાજ્યના સરકારી નોકરી કરતાં વર્ગ 3 અને વર્ગ 4ના કર્મચારીઓમાંથી પસંદ કરેલા 6000 કર્મચારીઓના નિદર્શની જાતિ અનુસાર માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

કર્મચારી-વર્ગ	**જાતિ**		**કુલ**
	પુરુષો	**સ્ત્રીઓ**	
વર્ગ 3	3600	900	4500
વર્ગ 4	400	1100	1500
કુલ	4000	2000	6000

આ રાજ્યના સરકારી નોકરી કરતાં વર્ગ 3 અને વર્ગ 4ના તમામ કર્મચારીઓમાંથી એક કર્મચારીને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) પસંદ થયેલ કર્મચારી પુરુષ હોય તો તે વર્ગ 3નો હોય તેની સંભાવના શોધો.

(2) પસંદ થયેલ કર્મચારી વર્ગ 3નો છે એમ આપેલ હોય, તો તે પુરુષ હોવાની સંભાવના શોધો.



Abraham de Moivre
(1667 -1754)

Abraham de Moivre was a French mathematician known for de Moivre's formula, one of those that link complex numbers and trigonometry, and for his work on the normal distribution and probability theory. De Moivre wrote a book on probability theory, The Doctrine of Chances. De Moivre first discovered Binet's formula, the closed-form expression for Fibonacci numbers linking the n^{th} power of the golden ratio ϕ to the n^{th} Fibonacci number. He also was the first to postulate the Central Limit Theorem, a cornerstone of probability theory. In the later editions of his book, de Moivre included his unpublished result of 1733, which is the first statement of an approximation to the binomial distribution in terms of what we now call the normal or Gaussian function.

De Moivre continued studying the fields of probability and mathematics until his death and several additional papers were published after his death.

●

2

યાદચ્છિક ચલ અને અસતત સંભાવના-વિતરણ

(Random Variable and Discrete Probability Distribution)

વિષયવસ્તુ :

2.1 યાદચ્છિક ચલ

2.1.1 અસતત યાદચ્છિક ચલ

2.1.2 સતત યાદચ્છિક ચલ

2.2 અસતત સંભાવના-વિતરણ

2.2.1 અસતત ચલના સંભાવના-વિતરણનાં ઉદાહરણો

2.2.2 મધ્યક અને વિચરણ

2.3 દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ

2.3.1 દ્વિપદી વિતરણનાં ગુણધર્મો

2.3.2 દ્વિપદી વિતરણનાં ઉદાહરણો

2.1 યાદચ્છિક ચલ (Random Variable)

આપણે સંભાવનાના પ્રકરણમાં યાદચ્છિક પ્રયોગ, નિદર્શ અવકાશ તથા સંભાવનાનો અભ્યાસ કર્યો. આ પ્રકરણમાં આપણે યાદચ્છિક ચલ અને અસતત સંભાવના-વિતરણોનો અભ્યાસ કરીશું.

સૌપ્રથમ આપણે યાદચ્છિક ચલને વ્યાખ્યાયિત કરીશું અને ત્યાર બાદ તેને ઉદાહરણ દ્વારા સમજીશું.

યાદચ્છિક ચલ : ધારો કે એક યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ U છે. Uના દરેક ઘટક હંમેશાં સંખ્યાત્મક હોવા જરૂરી નથી. છતાં પણ આપણે દરેક ઘટના માટે કોઈ ચોક્કસ સંખ્યા ફાળવવા ઇચ્છીએ છીએ.

Uના દરેક ઘટકને વાસ્તવિક સંખ્યા સાથે સાંકળતા વિધેયને યાદચ્છિક ચલ કહેવામાં આવે છે. તેને સંકેતમાં X વડે દર્શાવવામાં આવે છે. એટલે કે નિદર્શ અવકાશ U પર આધારિત યાદચ્છિક ચલ Xને સંકેતમાં $X : U \rightarrow R$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

દાખલા તરીકે

(i) એક અનભિનત સિક્કાને 3 વખત ઉછાળતા મળતી છાપ (H)ની સંખ્યા

(ii) કોઈ એક શહેરમાં એક અઠવાડિયા દરમિયાન થતા અકસ્માતની સંખ્યા

(iii) કોઈ એક વ્યક્તિનું વજન (કિલોગ્રામમાં)

(iv) કોઈ એક ચોક્કસ સ્થળનું દિવસ દરમિયાનનું મહત્તમ તાપમાન (અંશ સેલ્શિયસમાં)

હવે આપણે યાદચ્છિક ચલ વિશેનો ખ્યાલ કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.

(1) એક સમતોલ પાસાને એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો પાસા પર મળતા અંકને 'u' વડે દર્શાવીએ, તો આ પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ Uના ઘટકોને ગણના સંકેતમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય :

$$U = \{u \mid u = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

એટલે કે $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

જો નિદર્શ અવકાશના ઘટક u પર વાસ્તવિક સંખ્યા Xને

$X(u)$ = પાસા પર મળતા અંક દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરીએ તો અહીં

$$X(u) = u, u = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

લખી શકાય. આમ ચલ Xએ યાદચ્છિક ચલ થશે જે 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 કિંમતો ધારણ કરી શકે છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં Uના ઘટકો સંખ્યાત્મક છે. હવે આપણે Uના ઘટકો સંખ્યાત્મક ન હોય તેવું ઉદાહરણ જોઈએ.

(2) ધારો કે એક પેટીમાં એક લાલ રંગનો, એક વાદળી રંગનો, એક પીળા રંગનો અને એક સફેદ રંગનો એમ ચાર દડા છે. ધારો કે લાલ રંગના દડાને R, વાદળી રંગના દડાને B, પીળા રંગના દડાને Y અને સફેદ રંગના દડાને W વડે દર્શાવવામાં આવે છે. એક વ્યક્તિ આ પેટીમાંથી ત્રણ દડા એક સાથે યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે છે. આ પ્રયોગ માટેનો નિદર્શ અવકાશ

$U = \{RBY, RBW, BYW, WYR\}$ બનશે.

ધારો કે Uના ઘટક u માટે

$X(u)=u$ માં સફેદ દડાની સંખ્યા લઈએ, તો $X(RBY)=0, X(RBW)=1, X(BYW)=1, X(WYR)=1$ મળે.

આમ, યાદચ્છિક ચલ X ગણ {0, 1}માંની કિંમત ધારણ કરે છે. અહીં નિદર્શ અવકાશના ઘટકો સંખ્યાત્મક નથી પરંતુ તેને આપણે યાદચ્છિક ચલ દ્વારા વાસ્તવિક સંખ્યા સાથે સાંકળીએ છીએ.

(3) ધારો કે એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ 120 સેમીથી 180 સેમી સુધીની જ છે. જો આપણે આ વર્ગના કોઈ પણ વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ માપીએ, તો તે 120 સેમીથી 180 સેમી વચ્ચેની કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરશે.

અહીં નિદર્શ અવકાશ $U=\{u \mid 120 \le u \le 180\}$ બનશે.

જો પસંદ કરેલા વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈને X વડે દર્શાવીએ તો Xએ $X(u)=u=$ પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ (સેમીમાં) થાય. આમ X એ યાદચ્છિક ચલ બનશે તથા $X=x, 120 \le x \le 180$ વડે દર્શાવીશું.

ઉપરના ઉદાહરણ (1) તથા ઉદાહરણ (2)માં યાદચ્છિક ચલ X ગણી શકાય તેટલી ચોક્કસ કિંમતો ધારણ કરે છે. જ્યારે ઉદાહરણ (3)માં યાદચ્છિક ચલ X એ અંતરાલ [120, 180]માંથી કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે છે. આ યાદચ્છિક ચલ એ અગાઉનાં બે ઉદાહરણમાંના યાદચ્છિક ચલ કરતાં જુદો પડે છે.

આ યાદચ્છિક ચલો વચ્ચેનો તફાવત આપણે હવે નીચેના વિભાગમાં સમજીએ :

2.1.1 અસતત યાદચ્છિક ચલ (Discrete Random Variable)

જે યાદચ્છિક ચલ X વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R ની સાન્ત સંખ્યામાં અથવા ગણ્ય અનન્ત કિંમતો ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તેવા ચલ X ને અસતત યાદચ્છિક ચલ કહેવાય.

દાખલા તરીકે (i) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થીનું જન્મ વર્ષ

(ii) 6 ઇંડાંઓવાળા એક બૉક્સમાં ભાંગી ગયેલાં ઇંડાંઓની સંખ્યા.

હવે આપણે અસતત યાદચ્છિક ચલને વિશે કેટલાંક વિશેષ ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ.

(1) ધારો કે એક બૉક્સમાં એક કાળા રંગનો અને બે સફેદ રંગના દડા છે. ધારો કે કાળા રંગના દડાને B અને બે સફેદ રંગના દડાને W_1 તથા W_2 વડે દર્શાવવામાં આવે છે. કોઈ એક વ્યક્તિ રૂપિયા 15 આપીને નીચેની રમત રમી શકે છે :

રમત રમનાર વ્યક્તિને આ બૉક્સમાંથી બે દડા યાદચ્છિક રીતે પુરવણી સહિત પસંદ કરવાનું કહેવામાં આવે છે. તેણે પસંદ કરેલ દડાના રંગ પ્રમાણે તેને નીચે પ્રમાણે નક્કી કરેલ રૂપિયા ચૂકવવામાં આવે છે :

જો સફેદ રંગનો દડો પસંદ થાય તો પ્રત્યેક સફેદ રંગના દડા દીઠ તેને ₹ 5 ચૂકવવામાં આવે છે અને જો કાળા રંગનો દડો પસંદ થાય તો કાળા રંગના દડા દીઠ રૂ. 15 ચૂકવવામાં આવે છે.

જો પ્રત્યેક ઘટનાને અનુરૂપ રમત રમનાર વ્યક્તિને રમત દ્વારા મળતી ચોખ્ખી રકમ (મેળવેલ રકમ - રમત માટે ચૂકવેલ રકમ) ને આપણે X વડે દર્શાવીએ, તો X એ અસતત યાદચ્છિક ચલ બનશે. X એ ધારણ કરેલ કિંમતો નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

પ્રયોગનું પરિણામ (ઘટના)	રમત દ્વારા વ્યક્તિને મળતી રકમ	રમત રમવા માટે ચૂકવેલ રકમ	Xની કિંમત (રૂપિયા)
W_1W_1	5 + 5 = 10	15	$X(W_1W_1) = 10 - 15 = -5$
W_1W_2	5 + 5 = 10	15	$X(W_1W_2) = 10 - 15 = -5$
W_1B_1	5 + 15 = 20	15	$X(W_1B_1) = 20 - 15 = 5$
W_2W_1	5 + 5 = 10	15	$X(W_2W_1) = 10 - 15 = -5$
W_2W_2	5 + 5 = 10	15	$X(W_2W_2) = 10 - 15 = -5$
W_2B_1	5 + 15 = 20	15	$X(W_2B_1) = 20 - 15 = 5$
B_1W_1	15 + 5 = 20	15	$X(B_1W_1) = 20 - 15 = 5$
B_1W_2	15 + 5 = 20	15	$X(B_1W_2) = 20 - 15 = 5$
B_1B_1	15 + 15 = 30	15	$X(B_1B_1) = 30 - 15 = 15$

આમ, યાદચ્છિક ચલ X એ ફક્ત -5, 5 અને 15 કિંમતો જ ધારણ કરે છે. એટલે કે Xની કુલ શક્ય કિંમતોની સંખ્યા સાન્ત છે.

(2) ધારો કે એક સિક્કો જ્યાં સુધી કાંટો (T) અથવા ચાર છાપ (H) મળે ત્યાં સુધી ઉછાળવામાં આવે છે. ધારો કે X એ સિક્કો ઉછાળવા માટેની જરૂરી પ્રયત્નોની સંખ્યા દર્શાવે છે.

અહીં યાદચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલો નિદર્શ અવકાશ

$U = \{T, HT, HHT, HHHT, HHHH\}$ બનશે.

અહીં યાદચ્છિક ચલ X એ પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ સિક્કો ઉછાળવાની જરૂરી સંખ્યા દર્શાવે છે અને તે નિદર્શ અવકાશના ઘટકો માટે નીચે મુજબ 1, 2, 3 અને 4 કિંમતોમાંથી કોઈ એક કિંમત ધારણ કરે છે.

$$X(T) = 1,\ X(HT) = 2,\ X(HHT) = 3$$

$$X(HHHT) = 4,\ X(HHHH) = 4$$

અહીં, અસતત યાદચ્છિક ચલ Xની કુલ શક્ય કિંમતોની સંખ્યા સાન્ત છે.

(3) જ્યાં સુધી પ્રથમ વખત છાપ મળે ત્યાં સુધી સિક્કો ઉછાળવાનું ચાલુ રાખવાના પ્રયોગમાં પ્રથમ વખત છાપ મળતા પહેલાં મળતા કાંટાની સંખ્યાને યાદચ્છિક ચલ X લઈએ.

આ પ્રયોગમાં છાપ પ્રથમ પ્રયત્ને અથવા બીજા પ્રયત્ને અથવા ત્રીજા પ્રયત્ને.... આ જ રીતે પ્રથમ વખતે છાપ મેળવવા માટે અનન્ત વખત પ્રયત્ન કર્યા પછી પણ મળી શકે. એટલે કે આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ

$U = \{H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, ...\}$ થાય.

તેથી પ્રથમ વખત છાપ મેળવતા પહેલાં મળેલ કાંટાની સંખ્યા 0, 1, 2, 3, 4.... થશે.

આમ, યાદચ્છિક ચલ X કુલ શક્ય ગણ્ય અનંત કિંમતો 0, 1, 2, 3, 4.... માંથી કોઈ એક કિંમત ધારણ કરશે.

2.1.2 સતત યાદચ્છિક ચલ (Continuous Random Variable)

જે યાદચ્છિક ચલ X વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R માં અથવા R ના કોઈ અંતરાલમાં કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે તેવા ચલને સતત યાદચ્છિક ચલ કહેવાય.

દાખલા તરીકે (i) એક 250 મિલિલીટરના કદવાળા કૉફી મગમાં ભરેલ કોફીનું ખરેખરું માપ.

(ii) બહુમાળી ઑફિસના બિલ્ડિંગમાં કોઈ પણ એક માળ પર લિફ્ટ માટેનો પ્રતીક્ષા-સમય.

સતત યાદચ્છિક ચલ વિશેનો વિશેષ ખ્યાલ આપણે નીચેનાં ઉદાહરણો દ્વારા મેળવીએ.

(1) 3 કલાકના સમયવાળી એક પરીક્ષા માટે કોઈ વિદ્યાર્થી દ્વારા લેવાતા સમયને યાદચ્છિક ચલ X વડે દર્શાવીએ તો અહીં નિદર્શ અવકાશ એ

$U = \{u | 0 \le u \le 3\}$ બનશે.

કારણ કે કોઈ પણ વિદ્યાર્થી દ્વારા પરીક્ષા માટે લેવાતો સમય 0 થી 3 સુધીની કોઈ પણ વાસ્તવિક કિંમત બનશે.

તથા યાદચ્છિક ચલ X એ કોઈ વિદ્યાર્થી દ્વારા લેવાતો પરીક્ષા માટેનો ખરેખરો સમય એ પણ 0 થી 3 સુધીની કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા જ બનશે.

આમ, અહીં

$X(u) = u,\ 0 \le u \le 3$ થાય.

એટલે કે $X = x, 0 \le x \le 3$

અહીં યાદચ્છિક ચલ X એ 0થી 3 સુધીની કોઈ પણ વાસ્તવિક કિંમત ધારણ કરતો હોવાથી તે R નો ઘટક બને છે અને તેથી X એ સતત યાદચ્છિક ચલ બનશે.

(2) ધારો કે એક એક્સપ્રેસ હાઈવે ઉપર બે સ્ટેશનો A અને B આવેલાં છે. સ્ટેશન Aનું સ્ટેશન Bથી અંતર 200 કિમી છે. આ હાઈવે ઉપર સ્ટેશનો A અને B વચ્ચે બનતા અકસ્માતનું સ્થાન સ્ટેશન A થી કેટલું દૂર છે તે જાણવાનો પ્રયોગ હાથ ધરીએ. સરળતા ખાતર ધારો કે Aનું સ્થાન 0 કિમી પર અને Bનું સ્થળ 200 કિમી પર છે. આ પ્રયોગ માટેનો નિદર્શ અવકાશ એ 0 અને 200 વચ્ચેની કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા બનશે. તેથી આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ લખી શકાય.

$U = \{u \mid 0 \le u \le 200\}$

ધારો કે યાદચ્છિક ચલ X એ સ્ટેશન A અને સ્ટેશન B વચ્ચે કોઈ પણ સ્થળે બનતા અકસ્માતનું સ્ટેશન Aથી અંતર કિલોમીટરમાં દર્શાવે છે, તો યાદચ્છિક ચલ X નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થાય :

$X(u)$ = સ્ટેશન Aથી અકસ્માત સ્થળનું અંતર = u

ટૂંકમાં આપણે યાદચ્છિક ચલ X ને $X = x,\ 0 \le x \le 200$ વડે દર્શાવી શકીએ.

અહીં યાદચ્છિક ચલ X એ 0 થી 200 સુધી કોઈ પણ વાસ્તવિક કિંમત ધારણ કરે છે, જે વાસ્તવિક સંખ્યાના ગણ R નો ઘટક બને છે અને તેથી X એ સતત યાદચ્છિક ચલ બનશે.

2.2 અસતત સંભાવના-વિતરણ (Discrete Probability Distribution)

ધારો કે $X: U \rightarrow R$ એ એક યાદચ્છિક ચલ છે, જે R ના ઉપગણ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ માંથી જ કોઈ એક કિંમત ધારણ કરી શકે છે. વળી, ધારો કે X એ ધારણ કરેલ કિંમત x_i ની સંભાવના $P(X = x_i) = p(x_i)$ છે. જો $p(x_i) > 0, \ i = 1, 2, ..., n$ અને $\Sigma\, p(x_i) = 1$ હોય, તો વાસ્તવિક કિંમતોના ગણ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ અને $\{p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)\}$ ને યાદચ્છિક ચલ Xનું અસતત સંભાવના-વિતરણ કહે છે. યાદચ્છિક ચલ X ના અસતત સંભાવના-વિતરણને કોષ્ટકના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે લખવામાં આવે છે.

$\boldsymbol{X = x}$	x_1	x_2	....	x_i	...	x_n
$\boldsymbol{p(x)}$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	....	$p(x_i)$	...	$p(x_n)$

અહીં $0 < p(x_i) < 1, i = 1, 2, ..., n$ અને $\Sigma\, p(x_i) = 1$

2.2.1 અસતત ચલના સંભાવના-વિતરણનાં ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ કિંમતો એ અસતત ચલના સંભાવના-વિતરણ માટેની યોગ્ય કિંમતો છે કે નહિ તે નક્કી કરો :

અહીં અસતત ચલ X એ 1, 2, 3 કે 4 કિંમત જ ધારણ કરી શકે છે.

(i) $p(1) = 0.25, p(2) = 0.75, p(3) = 0.25, p(4) = -0.25$

(ii) $p(1) = 0.15, p(2) = 0.27, p(3) = 0.29, p(4) = 0.29$

(iii) $p(1) = \frac{1}{19}, \ p(2) = \frac{9}{19}, \ p(3) = \frac{3}{19}, \ p(4) = \frac{4}{19}$

(i) અહીં $P(4)$ની કિંમત -0.25 એટલે ઋણ છે. જે અસતત સંભાવના-વિતરણની શરત $p(x_i) > 0, i = 1, 2, 3, 4$ નું સમાધાન કરતી નથી. તેથી આપેલ કિંમતો એ અસતત ચલના સંભાવના-વિતરણ માટે યોગ્ય નથી અને આમ આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ ન કહેવાય.

(ii) અહીં x ની દરેક કિંમતો 1, 2, 3 અને 4 માટે $p(x) > 0$ છે તથા $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$ છે.

આમ અસતત ચલના સંભાવના-વિતરણની બંને શરતોનું પાલન થાય છે તેથી આપેલ કિંમતો યોગ્ય છે અને આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ છે.

(iii) અહીં $p(x_i) > 0, i = 1, 2, 3, 4$ માટે થાય છે. પરંતુ સંભાવનાનો સરવાળો એટલે કે

$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = \frac{17}{19}$ થાય છે, જે 1 થતો ન હોવાથી આપેલ કિંમતો સંભાવના-વિતરણ માટે યોગ્ય નથી અને આમ આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ ન કહેવાય.

ઉદાહરણ2 : નીચે આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ ક્યારે બને તે નક્કી કરો. તે પરથી $x = 2$ માટેની સંભાવના મેળવો :

$$\boldsymbol{p(x) = c\left(\frac{1}{4}\right)^x, \quad x = 1, 2, 3, 4}$$

અહીં $p(1) = c\left(\frac{1}{4}\right), \ p(2) = c\left(\frac{1}{4}\right)^2 = c\left(\frac{1}{16}\right), \ p(3) = c\left(\frac{1}{4}\right)^3 = c\left(\frac{1}{64}\right), \ p(4) = c\left(\frac{1}{4}\right)^4 = c\left(\frac{1}{256}\right)$ થાય.

હવે અસતત સંભાવના-વિતરણ માટે સંભાવનાનો કુલ સરવાળો 1 થવો જોઈએ. એટલે કે

$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=1$ થવું જોઈએ.

$\therefore c\left(\frac{1}{4}\right)+c\left(\frac{1}{16}\right)+c\left(\frac{1}{64}\right)+c\left(\frac{1}{256}\right)=1$

$\therefore c\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}\right]=1$

$\therefore c\left[\frac{85}{256}\right]=1$

$\therefore c=\frac{256}{85}$

તેથી જ્યારે $c=\frac{256}{85}$ હોય ત્યારે આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ થાય.

હવે $P(X=2)=c\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=\frac{256}{85}\times\frac{1}{16}$

$=\frac{16}{85}$ મળે.

$\therefore x=2$ માટેની સંભાવના $\frac{16}{85}$ થાય.

ઉદાહરણ 3 : યાદચ્છિક ચલ X એ એક કંપનીમાં થતા વાર્ષિક અકસ્માતની સંખ્યા દર્શાવે છે. તેનું સંભાવના વિતરણ નીચે મુજબ આપેલ છે :

$X=x$	0	1	2	3	4
$p(x)$	$4K$	$15K$	$25K$	$5K$	K

(i) અચળાંક K શોધો અને સંભાવના-વિતરણ ફરીથી લખો.
(ii) આ કંપનીમાં વાર્ષિક એક અથવા બે અકસ્માત બને તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.
(iii) આ કંપનીમાં વર્ષ દરમિયાન એક પણ અકસ્માત ન બને તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) અસતત સંભાવના-વિતરણની વ્યાખ્યા મુજબ

$p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=1$ થવું જોઈએ એટલે કે

$4K+15K+25K+5K+K=1$

$\therefore 50K=1$

$\therefore K=\frac{1}{50}$

$=0.02$

આમ, $K=0.02$ હોય તો આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના-વિતરણ બને જે નીચે પ્રમાણે મળે છે :

$X=x$	0	1	2	3	4	કુલ
$p(x)$	0.08	0.30	0.50	0.10	0.02	1

(ii) એક અથવા બે અકસ્માત બને તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X=1)+P(X=2)$

$= 0.30 + 0.50$

$= 0.80$

(iii) એક પણ અકસ્માત ન બને તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X=0)$

$= 0.08$

ઉદાહરણ 4 : એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલ બ્લેડ્સમાંથી 50 બ્લેડ્સના એક એવા પૅકેટેસ બનાવવામાં આવે છે. ગુણવત્તા નિયંત્રણ ઇજનેર આવા તૈયાર થયેલા પૅકેટ્સમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પૅકેટ પસંદ કરે છે અને તેમાંની બધી જ બ્લેડની તપાસ કરે છે. જો પસંદ કરેલા પૅકેટમાંથી 4 કે તેથી વધુ ખામીવાળી બ્લેડ્સ મળી આવે તો તે પૅકેટને અસ્વીકાર્ય ગણવામાં આવે છે. પૅકેટમાંથી મળતી ખામીવાળી બ્લેડ્સની સંખ્યાનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ આપેલ છે.

પૅકેટમાં ખામીવાળી બ્લેડ્સની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5	6 કે તેથી વધુ
સંભાવના	$9K$	$3K$	$3K$	$2K$	$2K$	$K-0.02$	0.02

આપેલ સંભાવના-વિતરણ પરથી

(i) અચળાંક K શોધો.

(ii) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પૅકેટ ગુણવત્તા-નિયંત્રણ ઇજનેર દ્વારા સ્વીકાર્ય બને તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) અહીં X = તપાસ દરમિયાન પસંદ કરેલ પૅકેટમાંથી મળતી ખામીવાળી બ્લેડની સંખ્યા લઈએ.

અસતત સંભાવના-વિતરણની વ્યાખ્યા મુજબ

$p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6 \text{ કે તેથી વધુ})=1$ થાય.

$\therefore 9K+3K+3K+2K+2K+K-0.02+0.02=1$

$\therefore 20K=1$

$\therefore K=\frac{1}{20}=0.05$

(ii) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પૅકેટ ગુણવત્તા નિયંત્રણ ઇજનેર દ્વારા ત્યારે જ સ્વીકાર્ય બને જ્યારે તે પૅકેટમાં 3 કે તેથી ઓછી ખામીવાળી બ્લેડ્સ મળે.

$\therefore P(X \le 3)$

$= p(0)+p(1)+p(2)+p(3)$

$= 9K+3K+3K+2K$

$= 17K$

$= 0.85 \quad (\because K=0.05)$

ઉદાહરણ 5 : એક બૉક્સમાં 4 લાલ અને 2 સફેદ દડા છે. તેમાંથી 2 દડા યાદચ્છિક રીતે પુરવણી વગર પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ દડામાં મળતા સફેદ દડાની સંખ્યાનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો.

ધારો કે X એ પસંદ કરેલા બે દડામાં મળતા સફેદ દડાની સંખ્યા દર્શાવે છે. અહીં X એ 0, 1 અને 2 કિંમતો ધારણ કરી શકે છે.

અહીં $X = 0$ એટલે કે પસંદ કરેલા બે દડામાં એક પણ દડો સફેદ ન હોય, એટલે કે બંને દડા લાલ રંગના હોય.

$\therefore P(X=0) = P$ (2 લાલ દડા) $= \dfrac{{}^4C_2}{{}^6C_2} = \dfrac{6}{15}$

હવે $x=1$ એટલે કે પસંદ કરેલા બે દડામાં એક દડો સફેદ રંગનો અને એક દડો લાલ રંગનો હોય.

$\therefore P(X=1) = P$ (1 સફેદ, 1 લાલ)

$= \dfrac{{}^2C_1 \times {}^4C_1}{{}^6C_2}$

$= \dfrac{2\times 4}{15} = \dfrac{8}{15}$

અને $X = 2$ એટલે કે પસંદ કરેલા બંને દડા સફેદ રંગના હોય.

$\therefore P(X=2) = P$ (2 સફેદ)

$= \dfrac{{}^2C_2}{{}^6C_2}$

$= \dfrac{1}{15}$

આમ, યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ લખી શકાય :

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$p(x) > 0$ અને $\Sigma p(x) = 1$

2.2.2 મધ્યક અને વિચરણ

હવે આપણે અસતત યાદચ્છિક ચલના સંભાવના-વિતરણ પર આધારિત અગત્યના બે પરિણામોની ચર્ચા કરીશું. જેમાંનું એક પરિણામ છે યાદચ્છિક ચલનો મધ્યક (સરેરાશ કિંમત) અને બીજું છે યાદચ્છિક ચલનું વિચરણ.

ધારો કે X એ અસતત યાદચ્છિક ચલ છે જે $x_1, x_2, ..., x_n$ કિંમતોમાંથી જ કોઈ એક કિંમત ધારણ કરે છે અને તેનું સંભાવના-વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે :

$X = x$	x_1	x_2	....	x_i	...	x_n
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	....	$p(x_i)$	...	$p(x_n)$

જ્યાં $0 < p(x_i) < 1, i = 1, 2, ..., n$ તથા $\Sigma p(x_i) = 1$

અસતત યાદચ્છિક ચલ X ના મધ્યકને μ અથવા $E(X)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે, જે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$\mu = E(X) = \Sigma\, x_i\, p(x_i)$$

આ કિંમતને અસતત ચલ X ની અપેક્ષિત કિંમત પણ કહેવામાં આવે છે.

અસતત યાદચ્છિક ચલ X નું વિચરણને σ^2 અથવા $V(X)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે, જે નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2$$

$$= E\left(X^2\right) - (\mu)^2$$

$$= E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

જ્યાં $E\left(X^2\right) = \Sigma\, x_i^2\, p(x_i)$ છે.

નોંધ : (i) અહીં આપણે સરળતા ખાતર નીચે મુજબના સંકેતો વાપરીશું :

$\Sigma\, x_i\, p(x_i)$ ને બદલે $\Sigma\, x\, p(x)$

તથા

$\Sigma\, x_i^2\, p(x_i)$ ને બદલે $\Sigma\, x^2\, p(x)$

(ii) અહીં ચલ X ના મધ્યક અને વિચરણને અનુક્રમે X ના વિતરણના પણ મધ્યક અને વિચરણ કહે છે.

(iii) ચલ X ના વિચરણનું મૂલ્ય હંમેશાં ધન હોય છે.

અસતત સંભાવના-વિતરણના મધ્યક અને વિચરણ શોધવાના નીચેનાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 6 : નીચે આપેલ અસતત સંભાવના-વિતરણ માટે અચળ C શોધી આ વિતરણના મધ્યક અને વિચરણ મેળવો.

$$\boldsymbol{p(x) = C \cdot {}^4P_x,\ x = 0, 1, 2, 3, 4}$$

અસતત સંભાવના-વિતરણના ગુણધર્મ પરથી

$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$ થવું જોઈએ.

$$\therefore\ C \cdot {}^4P_0 + C \cdot {}^4P_1 + C \cdot {}^4P_2 + C \cdot {}^4P_3 + C \cdot {}^4P_4 = 1$$

$$\therefore C\left[\frac{4!}{4!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{1!} + \frac{4!}{0!}\right] = 1$$

$$\therefore C[1 + 4 + 12 + 24 + 24] = 1$$

$$\therefore C[65] = 1$$

$$\therefore C = \frac{1}{65}$$

આમ સંભાવના-વિતરણ કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખી શકાય.

$X = x$	0	1	2	3	4	કુલ
$p(x)$	$\frac{1}{65}$	$\frac{4}{65}$	$\frac{12}{65}$	$\frac{24}{65}$	$\frac{24}{65}$	1

હવે વિતરણનો મધ્યક $= \mu = \Sigma xp(x)$

$= 0\left(\frac{1}{65}\right) + 1\left(\frac{4}{65}\right) + 2\left(\frac{12}{65}\right) + 3\left(\frac{24}{65}\right) + 4\left(\frac{24}{65}\right)$

$= \frac{0+4+24+72+96}{65}$

$= \frac{196}{65}$

હવે આપણે $E\left(X^2\right)$ શોધીશું.

$E\left(X^2\right) = \Sigma\, x^2 p(x)$

$= (0)^2\left(\frac{1}{65}\right) + (1)^2\left(\frac{4}{65}\right) + (2)^2\left(\frac{12}{65}\right) + (3)^2\left(\frac{24}{65}\right) + (4)^2\left(\frac{24}{65}\right)$

$= 0 + \frac{4}{65} + \frac{48}{65} + \frac{216}{65} + \frac{384}{65}$

$= \frac{652}{65}$

તેથી વિતરણનું વિચરણ $= V(X)$

$= E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$

$= \frac{652}{65} - \left(\frac{196}{65}\right)^2$

$= \frac{42380 - 38416}{4225} = \frac{3964}{4225}$

ઉદાહરણ 7 : એક બૉક્સમાં એક લીલા અને બે લાલ રંગના દડા છે. તેમાંથી બે દડા યાદચ્છિક રીતે પુરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલા બે દડામાં મળતા લાલ રંગના દડાનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો તથા તેના મધ્યક અને વિચરણ પણ મેળવો.

પસંદ કરેલા બે દડાઓમાં મળતા લાલ રંગના દડાની સંખ્યાને આપણે X વડે દર્શાવીએ, તો Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ મેળવીએ.

બૉક્સમાંના બે લાલ દડાને આપણે R_1 અને R_2 સંજ્ઞા વડે દર્શાવીએ તથા એક લીલા રંગના દડાને G વડે દર્શાવીએ.

હવે પસંદ કરેલા બે દડાઓમાં મળતા લાલ રંગના દડાની સંખ્યા અને તેની સંભાવના નીચેના કોષ્ટક મુજબ મેળવી શકાય :

પસંદ થયેલ બે દડા (ઘટના)	**ઘટનાની સંભાવના**	$X = x$
R_1R_1	$\frac{1}{9}$	2
R_1R_2	$\frac{1}{9}$	2
R_1G	$\frac{1}{9}$	1
R_2R_1	$\frac{1}{9}$	2
R_2R_2	$\frac{1}{9}$	2
R_2G	$\frac{1}{9}$	1
GR_1	$\frac{1}{9}$	1
GR_2	$\frac{1}{9}$	1
GG	$\frac{1}{9}$	0

ઉપરના કોષ્ટક પરથી કહી શકાય કે, આપણે પસંદ કરેલા બે દડામાં

(i) 0 લાલ દડા મળે તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X = 0)$

$= \frac{1}{9}$

(ii) 1 લાલ દડો મળે તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X = 1)$

$= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$

$= \frac{4}{9}$

(iii) 2 લાલ દડો મળે તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X = 2)$

$= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$

$= \frac{4}{9}$

આમ, X સંભાવના-વિતરણ કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખાય

$X = x$	0	1	2	કુલ
$p(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

હવે વિતરણનો મધ્યક = $\mu = E(X)$

$$= \Sigma\, x\, p(x)$$

$$= 0\left(\frac{1}{9}\right) + 1\left(\frac{4}{9}\right) + 2\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$= \frac{0 + 4 + 8}{9}$$

$$= \frac{12}{9}$$

હવે વિચરણ શોધવા માટે આપણે પહેલાં $E(X^2)$ મેળવીએ.

$$E(X^2) = \Sigma\, x^2 p(x)$$

$$= 0^2\left(\frac{1}{9}\right) + 1^2\left(\frac{4}{9}\right) + 2^2\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$= \frac{0+4+16}{9}$$

$$= \frac{20}{9}$$

તેથી, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ સૂત્ર પરથી

$$V(X) = \frac{20}{9} - \left(\frac{12}{9}\right)^2$$

$$= \frac{20}{9} - \frac{144}{81}$$

$$= \frac{180 - 144}{81}$$

$$= \frac{36}{81}$$

ઉદાહરણ 8 : એક બૉક્સમાં 2 કાળા અને 2 સફેદ દડા છે. તેમાંથી 2 દડા યાદચ્છિક રીતે પુરવણી વગર પસંદ કરવામાં આવે છે, તો પસંદ કરેલ દડામાં સફેદ રંગના દડાની સંખ્યાનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો. તે પરથી તેના મધ્યક અને વિચરણ મેળવો.

ધારો કે X = પસંદ કરેલા બે દડામાં મળતા સફેદ રંગના દડાની સંખ્યા લઈએ, તો સંભાવનાના સૂત્ર મુજબ

(i) $X = 0$ થાય, તેની સંભાવના

$$= P(X = 0) = P \text{ (0 સફેદ દડા મળે) } = \frac{{}^2C_0}{{}^4C_2} = \frac{1}{6}$$

(ii) $X=1$ થાય. તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X=1) = P$ (1 સફેદ દડો અને 1 કાળો દડો)

$$= \frac{^2C_1 \times {}^2C_1}{^4C_2}$$

$$= \frac{2\times 2}{6}$$

$$= \frac{4}{6}$$

(iii) $X=2$ થાય. તે ઘટનાની સંભાવના

$= P(X=2) = P$ (2 સફેદ દડા)

$$= \frac{^2C_2}{^4C_2}$$

$$= \frac{1}{6}$$

આમ યાદૃચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ કોષ્ટક સ્વરૂપે લખાય.

$X=x$	0	1	2	કુલ
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

હવે સંભાવના-વિતરણનો મધ્યક $= E(X)$

$$= \Sigma\, x\, p(x)$$

$$= 0\left(\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{4}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{0+4+2}{6}$$

$$= 1$$

હવે સંભાવના-વિતરણનું વિચરણ શોધવા માટે આપણે $E(X^2)$ શોધીએ.

$$E(X^2) = \Sigma\, x^2 p(x)$$

$$= 0^2\left(\frac{1}{6}\right) + 1^2\left(\frac{4}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{0+4+4}{6}$$

$$= \frac{8}{6}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{8}{6} - (1)^2 \qquad (\because E(X)=1)$$

$$= \frac{8-6}{6}$$

$$= \frac{2}{6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ઉદાહરણ 9 : ધારો કે X એ એક સાથે બે પાસાઓને ઉછાળતા મળતાં પરિણામો પૈકી મહત્તમ અંક દર્શાવે છે. તો ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ મેળવો તથા તેનો મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

બે પાસાઓને એક સાથે ઉછાળવાથી તેના નિદર્શ અવકાશ Uમાં આપણને 36 ઘટકો મળે તથા મળતા દરેક પરિણામમાં મહત્તમ પૂર્ણાંક 1, 2, 3, 4, 5 અથવા 6માંથી કોઈ એક અંક આવી શકે.

નીચેનું કોષ્ટક ચલ X માટેની બનતી શક્ય ઘટના તથા તેની સંભાવના આપે છે :

Uનો ઘટક u	**મહત્તમ પૂર્ણાંક** $X(u) = x$	$P(X = x)$
(1, 1)	1	$\frac{1}{36}$
(1, 2), (2, 1), (2, 2)	2	$\frac{3}{36}$
(1, 3), (2, 3), (3, 3) (3, 2), (3, 1)	3	$\frac{5}{36}$
(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4) (4, 3), (4, 2), (4, 1)	4	$\frac{7}{36}$
(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5) (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1)	5	$\frac{9}{36}$
(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6) (6, 6), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2) (6, 1)	6	$\frac{11}{36}$
		કુલ 1

હવે Xનો મધ્યક $= E(X)$

$$= \Sigma\, x\, p(x)$$

$$= 1\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{3}{36}\right) + 3\left(\frac{5}{36}\right) + 4\left(\frac{7}{36}\right) + 5\left(\frac{9}{36}\right) + 6\left(\frac{11}{36}\right)$$

$$= \frac{161}{36}$$

હવે $E\left(X^2\right) = \Sigma\, x^2 p(x)$

$$= 1^2\left(\frac{1}{36}\right) + 2^2\left(\frac{3}{36}\right) + 3^2\left(\frac{5}{36}\right) + 4^2\left(\frac{7}{36}\right) + 5^2\left(\frac{9}{36}\right) + 6^2\left(\frac{11}{36}\right)$$

$$= \frac{791}{36}$$

X નું વિચરણ $= V(X)$

$$= E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

$= \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2$

$= \frac{791}{36} - \frac{25921}{1296}$

$= \frac{28476 - 25921}{1296}$

$= \frac{2555}{1296}$

ઉદાહરણ **10 : એક આયુષ્ય કોષ્ટક પરથી માલૂમ પડે છે કે, 40 વર્ષની ઉંમરની એક વ્યક્તિ વધુ એક વર્ષ જીવે તેની સંભાવના 0.95 છે. જીવન વીમાકંપની એક વર્ષ માટે રૂ. 10,000ની પૉલિસી આવી વ્યક્તિને વેચવા ઇચ્છે છે. આ પૉલિસીનું વાર્ષિક પ્રીમિયમ કેટલું રાખવું જોઈએ કે જેથી કંપનીને થતો અપેક્ષિત લાભ ઓછામાં ઓછી ધન સંખ્યામાં આવે ?**

ધારો કે X એ કંપનીનો લાભ દર્શાવે છે તથા પૉલિસીનું વાર્ષિક પ્રીમિયમ ₹ K છે, $K > 0$ તેથી જો 40 વર્ષની એક વ્યક્તિ વધુ એક વર્ષ જીવે, તો કંપનીને થતો લાભ $X = K$ બને.

અને જો 40 વર્ષની વ્યક્તિ એક વર્ષ દરમિયાન મૃત્યુ પામે તો કંપનીને થતો લાભ $X = K - 10,000$ બને.

આમ, કંપનીને થતા લાભનું સંભાવના-વિતરણ નીચે પ્રમાણે મળે :

$X = x$	K	$K - 10000$
$p(x)$	0.95	0.05

તેથી કંપનીને થતો અપેક્ષિત લાભ

$= E(X)$

$= \Sigma x\, p(x)$

$= K(0.95) + (K - 10,000)(0.05)$

$= K(0.95) + K(0.05) - 500$

$= K(0.95 + 0.05) - 500$

$= K - 500$

હવે અપેક્ષિત લાભ ધન થવા માટે

$K - 500 > 0$ થવું જોઈએ.

$\therefore K > 500$

તેથી કંપનીએ વાર્ષિક પ્રીમિયમ ₹ 500થી વધુ રાખવું જોઈએ. જેથી કંપનીને થતો અપેક્ષિત લાભ હંમેશાં ધન સંખ્યામાં આવે.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. નીચે આપેલ વિતરણ એ અસતત ચલ X માટેનું સંભાવના-વિતરણ છે કે નહિ તે ચકાસો.

$$p(x) = \frac{x+2}{25}, \; x = 1, 2, 3, 4, 5$$

2. નીચે આપેલ વિતરણ એ ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ હોય, તો અચળાંક K શોધો.

$$p(x) = \frac{6-|x-7|}{K}, \; x = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

3. એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે.

$$p(x) = \frac{K}{(x+1)!}, \; x = 1, 2, 3; K = \text{અચળાંક},$$

તો તે પરથી (i) અચળાંક K શોધો (ii) $P(1 < X < 4)$ મેળવો.

4. એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે.

$X = x$	-2	-1	0	1	2
$p(x)$	$\frac{K}{3}$	$\frac{K}{3}$	$\frac{K}{3}$	$2K$	$4K^2$

તો (i) અચલ Kની સ્વીકાર્ય કિંમત નક્કી કરો. (ii) વિતરણનો મધ્યક શોધો.

5. એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ $P(x)$ છે. ચલ X એ $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1$ અને $x_4 = 2$ કિંમતો ધારણ કરી શકે છે તથા જો

$4p(x_1) = 2p(x_2) = 3p(x_3) = 4p(x_4)$ હોય તો આ સંભાવના-વિતરણનો મધ્યક અને વિચરણ મેળવો.

6. એક પાસાને બે વખત યાદચ્છિક રીતે ઉછાળવામાં આવે છે. બંને વખતે પાસા પર મળતા અંકના સરવાળા માટેનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો તથા તે સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત મેળવો.

7. એક પેટીમાં 4 લાલ અને 2 વાદળી દડા છે. એક સાથે યાદચ્છિક રીતે 3 દડા પસંદ કરવામાં આવે છે. જો X એ પસંદ કરેલ દડામાં મળતા લાલ રંગના દડાની સંખ્યા દર્શાવે, તો Xનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો તથા પસંદગી પામેલ દડામાં લાલ રંગના દડાની અપેક્ષિત સંખ્યા શોધો.

8. એક સિક્કો જ્યાં સુધી છાપ મળે ત્યાં સુધી અથવા તો 5 કાંટા મળે ત્યાં સુધી ઉછાળવામાં આવે છે. જો યાદચ્છિક ચલ X એ સિક્કાને કેટલી વખત ઉછાળવાની જરૂર પડશે તે દર્શાવે તો યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ મેળવો અને તેના મધ્યક તથા વિચરણની ગણતરી કરો.

9. એક દુકાનદાર પાસે એક પેટીમાં 6 ટિકિટો છે. તેમાંથી બે ટિકિટો 10 રૂપિયાના ઇનામવાળી છે અને બાકીની ટિકિટો 5 રૂપિયાના ઇનામવાળી છે. જો પેટીમાંથી એક ટિકિટ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો ઇનામનું અપેક્ષિત મૂલ્ય શોધો.

*

2.3 દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ (Binomial Probability Distribution)

અગાઉના પરિચ્છેદોમાં આપણે સતત તથા અસતત યાદચ્છિક ચલ અને અસતત યાદચ્છિક ચલના સંભાવના-વિતરણ વિશે જોઈ ગયાં. હવે આપણે અસતત યાદચ્છિક ચલના એક અગત્યના સંભાવના-વિતરણનો અભ્યાસ કરીશું.

કેટલાક યાદચ્છિક પ્રયોગનાં પરિણામોમાં બે જ વિકલ્પ હોય છે. આ પરિણામોને આપણે સફળતા અને નિષ્ફળતા કહીશું. આ પરિણામો પરસ્પર નિવારક હોય છે. આવા પ્રયોગને આપણે દ્વિવિધ વિકલ્પના પ્રયોગો કહીશું. આવી કેટલીક પરિસ્થિતિઓના દૃષ્ટાંત નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

પ્રયોગ		શક્ય પરિણામો	
		સફળતા	નિષ્ફળતા
(i)	ઉત્પાદિત એકમોનું વેચાણ વધારવા માટે આપેલ જાહેરાતની અસર જાણવી	વેચાણ વધ્યું	વેચાણ ન વધ્યું
(ii)	ટાઈપ રાઈટરે ટાઈપ કરેલ પત્રમાં ભૂલ શોધવી.	ભૂલ મળે	ભૂલ ન મળે
(iii)	ઊંચા લોહીના દબાણવાળા દર્દીને આપેલ દવાની તેના લોહીના દબાણ ઉપર થતી અસર જાણવી.	લોહીનું દબાણ ઘટ્યું	લોહીનું દબાણ ન ઘટ્યું
(iv)	કોઈ ઉત્પાદિત એકમ ખામીવાળો છે કે નહિ તે તપાસવું.	એકમ ખામીવાળો છે	એકમ ખામીવાળો નથી

આવા દ્વિવિધ વિકલ્પવાળા પ્રયોગ માટે આપણે સફળતાને S અને નિષ્ફળતાને F સંજ્ઞા વડે દર્શાવીએ તથા તે ઘટનાઓ માટેની સંભાવનાને અનુક્રમે p અને q વડે દર્શાવીએ તો

$p(S)=p$ તથા $p(F)=q,\ 0<p<1,\ 0<q<1,\ p+q=1$

આવા પ્રયોગનાં પરિણામો ફક્ત બે જ હોવાથી અને બંને પરસ્પર નિવારક હોવાથી $p+q=1$ થાય અને તેથી $q=1-p$ થશે.

આવા દ્વિવિધ વિકલ્પવાળા યાદચ્છિક પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન શક્ય બનતું હોય અને દરેક પુનરાવર્તન લગભગ સમાન પરિબળો હેઠળ થતું હોય તો દરેક પ્રયત્ને સફળતાની સંભાવના p અચળ રહેશે. આવા પ્રયત્નોને આપણે બર્નોલી પ્રયત્નો (Bernoulli Trials) કહીશું. જેની સ્પષ્ટ વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકાય :

બર્નોલી પ્રયત્નો : ધારો કે એક દ્વિવિધ વિકલ્પવાળા યાદચ્છિક પ્રયોગનાં બે શક્ય પરિણામો સફળતા (S) અને નિષ્ફળતા (F) છે. જો આ પ્રયોગનું સમાન પરિસ્થિતિ હેઠળ પુનરાવર્તન કરવામાં આવે અને દરેક પ્રયત્ને સફળતાની સંભાવના $p(0<p<1)$ અચળ હોય તો આવા પ્રયત્નોને બર્નોલી પ્રયત્નો કહેવામાં આવે છે.

બર્નોલી પ્રયત્નોના ગુણધર્મો

(1) દરેક બર્નોલી પ્રયત્ને મળતી સફળતાની સંભાવના અચળ હોય છે.

(2) બર્નોલી પ્રયત્નો પરસ્પર નિરપેક્ષ છે. એટલે કે કોઈ પણ પ્રયત્ને મળતી સફળતા કે નિષ્ફળતા તેની અગાઉના પ્રયત્ને મળેલ સફળતા કે નિષ્ફળતા પર આધારિત નથી.

(3) સફળતા અને નિષ્ફળતા બંને પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ છે એટલે $q=1-p$ થાય.

દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ :

ધારો કે n બર્નોલી પ્રયત્નોમાં મળતી સફળતા (S) અને નિષ્ફળતા (F)ની શ્રેણીમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાને X વડે દર્શાવીએ, તો Xને દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ (Binomial Random Variable) કહેવામાં આવે છે તથા X એ સાન્ત ગણ $\{0, 1, 2, ..., n\}$માંથી કોઈ પણ એક કિંમત ધારણ કરી શકે છે. દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચેના સૂત્ર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત થાય છે :

$$P(X = x) = p(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x},\ x = 0,\ 1, 2, ..., n, 0 < p < 1, q = 1 - p$$

આ સંભાવના-વિતરણને દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ (Binornial Probability Distribution) કહેવામાં આવે છે. આપણે આ વિતરણને ટૂંકમાં દ્વિપદી વિતરણ કહીશું.

અહીં ધન પૂર્ણાંક n તથા સફળતાની સંભાવના p જ્ઞાત હોય, તો સમગ્ર સંભાવના-વિતરણ એટલે કે Xની પ્રત્યેક શક્ય કિંમતની સંભાવનાને જાણી શકાય. તેથી n અને p ને દ્વિપદી વિતરણના પ્રાચલ કહેવામાં આવે છે. આપણે n અને p પ્રાચલવાળા દ્વિપદી વિતરણને સંજ્ઞામાં $b(n,\ p)$ વડે દર્શાવીશું.

નોંધ : જો આવા જ બર્નોલી પ્રયત્નો વાળા પ્રયોગને N વખત પુનરાવર્તિત કરીએ અને પ્રયોગમાં મળતી સફળતાની સંખ્યા x ની સંભાવના $p(x)$ હોય તો N પુનરાવર્તનોમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાની અપેક્ષિત આવૃત્તિ $= N \cdot p(x)$

2.3.1 દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો

(1) દ્વિપદી વિતરણ એ અસતત વિતરણ છે.

(2) તેના પ્રાચલ n અને p છે.

(3) આ વિતરણનો મધ્યક np છે જે n બર્નોલી પ્રયત્નોમાં મળતી સફળતાની સરેરાશ (અપેક્ષિત) સંખ્યા દર્શાવે છે.

(4) આ વિતરણનું વિચરણ npq અને પ્રમાણિત વિચલન $\sqrt{npq}$ છે.

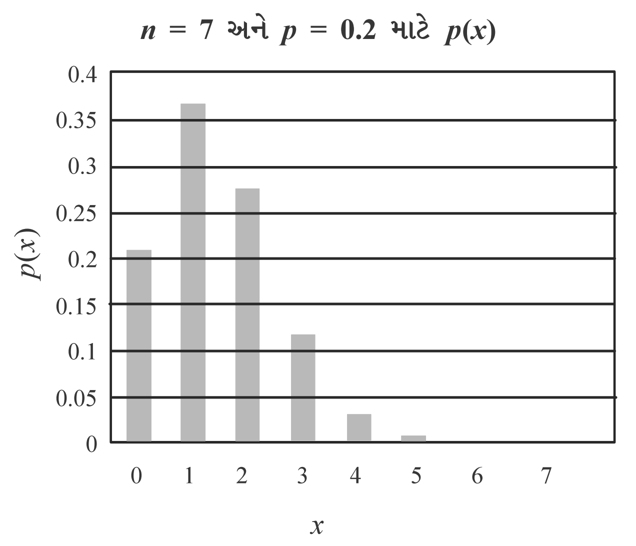
(5) દ્વિપદી વિતરણ માટે હંમેશાં મધ્યક એ વિચરણ કરતા મોટો હોય છે, તથા $\frac{\text{વિચરણ}}{\text{મધ્યક}} = q$ = નિષ્ફળતાની સંભાવના છે.

(6) nની કોઈ પણ કિંમત માટે જો $p < \frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણની વિષમતા ધન હોય છે.

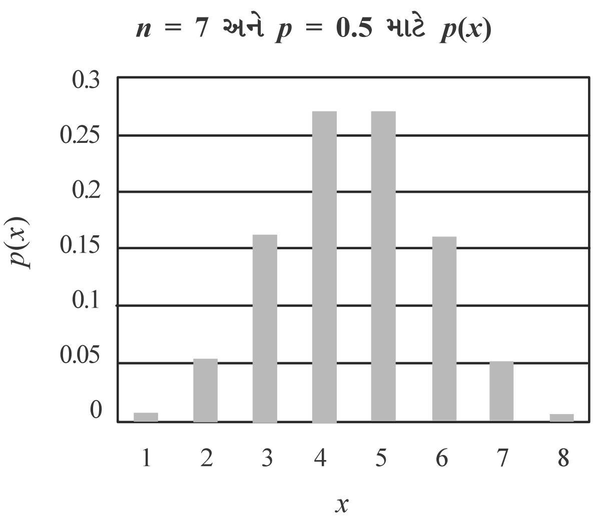
(7) nની કોઈ પણ કિંમત માટે જો $p = \frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણ સંમિત થાય છે, એટલે કે તેની વિષમતા શૂન્ય હોય છે.

(8) nની કોઈ પણ કિંમત માટે જો $p > \frac{1}{2}$ હોય, તો આ વિતરણની વિષમતા ઋણ હોય છે.

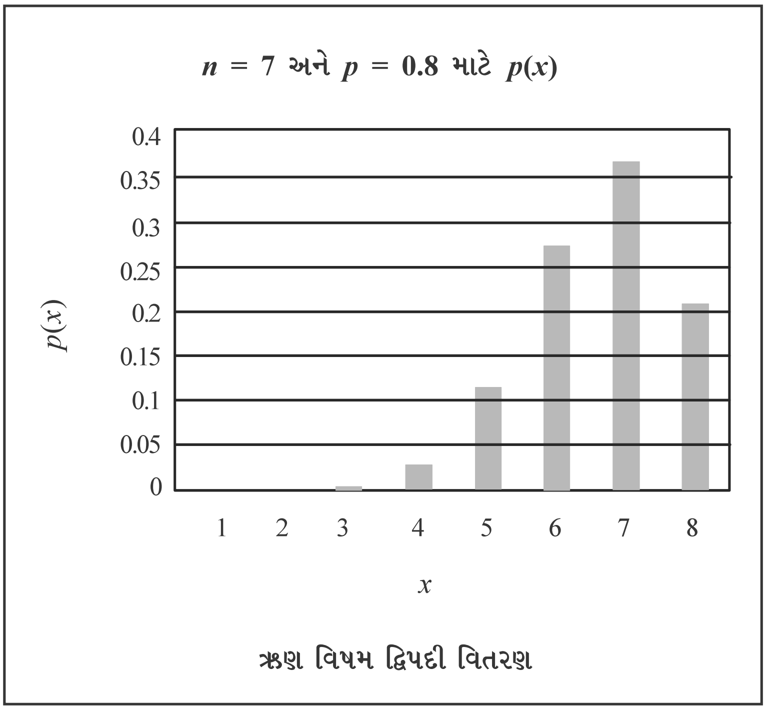
ગુણધર્મ (6), (7) અને (8) નીચેના આલેખો દ્વારા સ્પષ્ટ જોઈ શકાય છે.



ધન વિષમ દ્વિપદી વિતરણ



સંમિત દ્વિપદી વિતરણ



2.3.2 દ્વિપદી વિતરણનાં ઉદાહરણો (Illustrations of Binomial Distribution)

ઉદાહરણ 11 : એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલા એકમોમાં 3 % એકમો ખામીવાળા હોય છે. આ ઉત્પાદિત થયેલ એકમોમાંથી યાદચ્છિક રીતે 4 એકમો પસંદ કરવામાં આવે છે, તેમાંથી એક પણ એકમ ખામીવાળો ન મળે તેની સંભાવના કેટલી થશે ?

પસંદ કરેલ એકમ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને સફળતા ગણીએ તો સફળતાની સંભાવના $p = 0.03$ તથા અહીં $n = 4$ થશે. એક પણ એકમ ખામીવાળો ન મળે એટલે $X = 0$ થાય.

હવે

$$p(x) = {}^{n}c_{x} p^{x} q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n$$

આ સૂત્રમાં n, p, $q = 1 - p$ તથા xની કિંમત મૂકતા,

$$P(X = 0) = {}^{4}c_{0} (0.03)^{0} (0.97)^{4-0}$$

$$= (0.97)^{4}$$

$$= 0.8853$$

આમ, પસંદ કરેલ 4 એકમોમાં એક પણ એકમ ખામીવાળો ન હોય તેની સંભાવના 0.8853 થાય.

ઉદાહરણ 12 : એક શહેરમાં રહેતી વ્યક્તિ માંસાહારી હોય તેની સંભાવના 0.20 છે. આ વિસ્તારમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ 6 વ્યક્તિઓમાંથી વધુમાં વધુ બે વ્યક્તિઓ માંસાહારી હોય તેની સંભાવના શોધો.

વ્યક્તિ માંસાહારી હોય તે ઘટનાને સફળતા કહીએ, તો સફળતાની સંભાવના $p = 0.20$ તથા $n = 6$ આપેલ છે.

હવે $X =$ પસંદ કરેલ વ્યક્તિઓમાંથી મળતી માંસાહારી વ્યક્તિઓની સંખ્યા લઈએ, તો અહીં $X \le 2$ માટેની સંભાવના માટે દ્વિપદી વિતરણના સંભાવનાના સૂત્ર

$p(x) = {}^{n}C_x p^x q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n$

માં n, p તથા xનાં મૂલ્યો મૂકતાં,

$p(X \le 2) = p(X = 0$ અથવા $X = 1$ અથવા $X = 2)$

$= p(0) + p(1) + p(2)$

$= {}^{6}C_0 (0.20)^0 (0.80)^6 + {}^{6}C_1 (0.20)^1 (0.80)^{6-1} + {}^{6}C_2 (0.20)^2 (0.80)^{6.2}$

$= 0.2621 + 6(0.20)(0.3277) + 15(0.04)(0.4096)$

$= 0.2621 + 0.3932 + 0.2458$

$= 0.9011$

ઉદાહરણ 13 : **એક દ્વિપદી વિતરણ માટે મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 3.9 તથા 2.73 છે, તો આ વિતરણમાં કરેલ બર્નોલી પ્રયત્નોની સંખ્યા શોધો તથા $p(x)$ લખો.**

અહીં વિચરણ $= npq = 2.73$ તથા મધ્યક $= np = 3.9$ છે.

$\therefore q = \frac{\text{વિચરણ}}{\text{મધ્યક}} = \frac{2.73}{3.9} = 0.7$ તથા $p = 1 - q = 0.3$

હવે $n = \frac{np}{p} = \frac{\text{મધ્યક}}{p} = \frac{3.9}{0.3} = 13$

આ પ્રયોગમાં બર્નોલી પ્રયત્નોની સંખ્યા 13 છે. આ વિતરણમાં $n = 13,\ p = 0.3,\ q = 0.7$ હોવાથી તેનું $p(x)$ નીચે મુજબ થાય :

$p(x) = {}^{13}C_x (0.3)^x (0.7)^{13-x},\ x = 0, 1, 2, ..., 13.$

ઉદાહરણ 14 : **યુદ્ધ દરમિયાન દરિયાઈ સફરમાં સરેરાશ 9 માંથી એક જહાજ ડૂબી જાય છે, તે 6 જહાજના કાફલામાંથી 5 જહાજ દરિયાઈ સફર કરી સલામત રીતે પાછા આવે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.**

ધારો કે X = યુદ્ધ દરમ્યાન દરિયાઈ સફર કરનાર 6 જહાજમાંથી સલામત પાછા આવતા જહાજની સંખ્યા

n = કાફલામાં રહેલ કુલ જહાજની સંખ્યા = 6

p = કોઈ એક જહાજ દરિયાઈ સફર કરી સલામત રીતે પરત આવે તે ઘટનાની સંભાવના = $\frac{8}{9}$

$\therefore$ 6 જહાજના કાફલામાંથી 5 જહાજ દરિયાઈ સફર કરી પાછા સલામત રીતે આવે તે ઘટનાની સંભાવના સૂત્ર

$p(x) = {}^{n}C_x p^x q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n$

માં અનુરૂપ કિંમતો મૂકતાં,

$p(5) = {}^{6}C_5 \left(\frac{8}{9}\right)^5 \left(\frac{1}{9}\right)^1$

$= 6\left(\frac{32768}{59049}\right)\left(\frac{1}{9}\right)$

$= \frac{196608}{531441}$

$= 0.3700$

ઉદાહરણ 15 : ધારો કે અઠવાડિયાના દિવસો દરમિયાન બપોરે 2 થી 3 વાગ્યા સુધીમાં સરેરાશ 4 ટેલિફોન લાઈનમાંથી એક લાઈન વ્યસ્ત હોય છે. યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા 6 ટેલિફોન લાઈનમાંથી આ સમય દરમિયાન (i) 3 કરતાં વધુ ટેલિફોન લાઈન વ્યસ્ત ન આવે. (ii) ઓછામાં ઓછા 3 ટેલિફોન લાઈન વ્યસ્ત આવે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ધારો કે $p=$ પસંદ કરેલ ટેલિફોન લાઈન બપોરે 2 થી 3 દરમિયાનના સમય ગાળા દરમિયાન વ્યસ્ત આવે તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{1}{4}$

તથા $X=$ બપોરે 2 થી 3 વાગ્યા સુધીના સમયગાળા દરમિયાન 6 ટેલિફોન લાઈનમાંથી વ્યસ્ત આવતી ટેલિફોન લાઈનની સંખ્યા લઈએ.

અહીં $n=$ 6 આપેલ છે.

(i) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા 6 ટેલિફોન લાઈનમાંથી 3 કરતા વધુ ટેલિફોન લાઈન વ્યસ્ત ન આવે તે ઘટના એટલે કે 3 કે તેથી ઓછી ટેલિફોન લાઈન વ્યસ્ત આવે તે ઘટના.

એટલે કે $X \le 3$ થાય.

$\therefore$ આ ઘટનાની સંભાવના માટે દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણના સૂત્ર

$$p(x) = {}^{n}C_{x} p^{x} q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n$$

નો ઉપયોગ કરતા માંગેલ સંભાવના $= p(X \le 3)$

$= p\ (X = 0$ અથવા 1 અથવા 2 અથવા 3)

$= 1 - p\ (x = 4$ અથવા 5 અથવા 6)

$$= 1 - [p\ (4) + p(5) + p(6)]$$

$$= 1 - \left[{}^{6}C_{4} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{4} \left(\tfrac{3}{4}\right)^{2} + {}^{6}C_{5} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{5} \left(\tfrac{3}{4}\right)^{1} + {}^{6}C_{6} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{6} \left(\tfrac{3}{4}\right)^{0}\right]$$

$$= 1 - \left[15 \left(\tfrac{1}{256}\right)\left(\tfrac{9}{16}\right) + 6\left(\tfrac{1}{1024}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{4096}\right)\right]$$

$$= 1 - \left[\tfrac{135}{4096} + \tfrac{18}{4096} + \tfrac{1}{4096}\right]$$

$$= 1 - \tfrac{154}{4096} = \tfrac{3942}{4096} = 0.9624$$

(ii) ઓછામાં ઓછી 3 ટેલિફોન લાઈન વ્યસ્ત આવે તે ઘટનાની સંભાવના $= p(X \ge 3)$

$= p\ (X = 3$ અથવા 4 અથવા 5 અથવા 6)

$$= p(3) + p\ (4) + p(5) + p(6)$$

હવે ઉપરની ગણતરીમાંથી $p\ (4)$, $p(5)$ અને $p(6)$ની કિંમતો આપણને મળશે તેથી આપણે સૌ પ્રથમ $p(3)$ની ગણતરી કરીએ.

$p(3) = {}^6C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 20 \left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{27}{64}\right)$

$= \frac{540}{4096}$

હવે પ્રશ્ન (i) માંથી $p(4), p(5)$ તથા $p(6)$ની કિંમતો અને શોધેલ $p(3)$ની કિંમતો પરથી

$p(X \geq 3) = \frac{540}{4096} + \frac{135}{4096} + \frac{18}{4096} + \frac{1}{4096}$

$= \frac{694}{4096} = 0.1694$

ઉદાહરણ 16 : એક યાદચ્છિક ચલ Xના દ્વિપદી વિતરણના પ્રાચલ $n = 4$ અને $p = \frac{1}{3}$ છે, તો Xનું સંભાવના-વિતરણ કોષ્ટક સ્વરૂપે રજૂ કરો તે પરથી $P(X \leq 2)$નું મૂલ્ય મેળવો.

અહીં પ્રાચલ $n = 4$ તથા $p = \frac{1}{3}$ છે. $\therefore q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ થાય.

દ્વિપદી વિતરણના સૂત્ર

$p(x) = {}^nC_x\, p^x q^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, ..., n$ માં પ્રાચલની કિંમતો મૂકતાં $p(x) = {}^4C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$ મળે.

હવે આપણે xની જુદી-જુદી કિંમતો 0, 1, 2, 3 અને 4 મૂકી $p(x)$ની કિંમતોની ગણતરી કરીએ.

$p(0) = {}^4C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-0} = \frac{16}{81}$

$p(1) = {}^4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} = 4\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{32}{81}$

$p(2) = {}^4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-2} = 6\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{24}{81}$

$p(3) = {}^4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-3} = 4\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{81}$

$p(4) = {}^4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-4} = 1\left(\frac{1}{81}\right)1 = \frac{1}{81}$

જે કોષ્ટક સ્વરૂપે નીચે મુજબ લખાય :

$X = x$	0	1	2	3	4	કુલ
$p(x)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

હવે $P(X \le 2)$

$= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$= \frac{16}{81}+\frac{32}{81}+\frac{24}{81}$

$=\frac{72}{81}$

$=\frac{8}{9}$

ઉદાહરણ 17 : એક દ્વિપદી વિતરણ માટે $P(X=x)=p(x)$માં $n=8$ છે અને $2p(4)=5p(3)$ છે, તો આ વિતરણ માટેના બધા જ પ્રયત્ને સફળતા મળે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

અહીં $2p(4)=5p(3)$ છે તથા $n=8$ આપેલ છે.

$\therefore$ દ્વિપદી વિતરણના સંભાવનાના સૂત્રમાં $n=8$ની કિંમત મૂકતાં

$p(x)={}^8C_x p^x q^{8-x}$, $x = 0, 1, 2,...., 8$ મળે.

આ સૂત્ર પરથી $p(4)$ તથા $p(3)$ની કિંમતો આપેલ શરતમાં મૂકતાં

$2P(4)=5P(3)$

$2 \times {}^8C_4\, p^4\, q^{8-4} = 5 \times {}^8C_3 p^3 q^{8-3}$

$\therefore\ 2 \times (70)\, p^4\, q^4 = 5 \times (56)\, p^3 q^5$

$\therefore\ 140\, p^4\, q^4 = 280 p^3 q^5$

$\therefore\ p = 2q$

$\therefore\ p = 2(1-p)$

$\therefore\ p = 2-2p$

$\therefore 3p = 2$

$\therefore\ p = \frac{2}{3}$ થાય અને $q = 1-p = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ થાય.

હવે દરેક પ્રયત્ને સફળતા મળે એટલે કે અહીં કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા 8 હોવાથી 8 સફળતા મળે તે ઘટના.

આ ઘટનાની સંભાવના $p(8)$ થાય.

$\therefore\ p(8) = {}^8C_8 \left(\frac{2}{3}\right)^8 \left(\frac{1}{3}\right)^{8-8}$

$=1\times \left(\frac{2}{3}\right)^8 \times 1$

$=\frac{256}{6561}$

આમ, બધા જ પ્રયત્ને સફળતા મળે તે ઘટનાની સંભાવના $\frac{256}{6561}$ થાય.

ઉદાહરણ 18 : એક દ્વિપદી વિતરણનો મધ્યક 18 અને વિચરણ 4.5 છે. આ વિચરણની વિષમતા ધન છે કે ઋણ તે નક્કી કરો.

અહીં મધ્યક $= np = 18$ અને વિચરણ $= npq = 4.5$ છે.

$\therefore q = \frac{\text{વિચરણ}}{\text{મધ્યક}} = \frac{4.5}{18} = 0.25 = \frac{1}{4}$

$\therefore p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

અહીં pની કિંમત $\frac{1}{2}$ કરતા મોટી હોવાથી દ્વિપદી વિતરણની વિષમતા ઋણ થશે.

ઉદાહરણ 19 : એક સમતોલ પાસાને 7 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. દરેક પ્રયત્ને 5 કે તેથી મોટી સંખ્યા મળે તેને સફળતા ગણીએ અને 7 પ્રયત્નોમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાને X કહીએ, તો (i) Xનું સંભાવના-વિતરણ લખો. (ii) 4 સફળતા મળે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો. (iii) વધુમાં વધુ 6 સફળતા મળે તેની સંભાવના શોધો.

એક સમતોલ પાસાને ઉછાળવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શ અવકાશ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ થાય અને પ્રત્યેક અંક મળવાની સંભાવના $\frac{1}{6}$ થાય.

હવે 5 કે તેથી મોટી સંખ્યા મળે તેને સફળતા કહીએ તો સફળતાની સંભાવના

$p =$ પાસા ઉપર 5 કે 6 અંક મળે તે ઘટનાની સંભાવના

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

હવે કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા 7 છે. $\therefore n = 7$ થશે.

(i) તેથી Xનું સંભાવના-વિતરણ $p(x) = {}^nC_x p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, ..., n$ પરથી

$$p(x) = {}^7C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{7-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

(ii) 4 સફળતા મળે તે ઘટનાની સંભાવના

$$p(4) = {}^7C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{7-4}$$

$$= 35\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{8}{27}\right)$$

$$= \frac{280}{2187}$$

(iii) વધુમાં વધુ 6 સફળતા મળે તેની સંભાવના

$= P(X \le 6)$

$= 1 - P(X > 6)$

$= 1 - P(X = 7) \quad \because x = 0, 1, 2, ..., 7$ છે.

$= 1 - {}^7C_7 \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^{7-7}$

$= 1 - \frac{1}{2187} = \frac{2186}{2187}$

ઉદાહરણ 20 : એક સામાજિક કાર્યકર એવો દાવો કરે છે કે એક શહેરમાં નાની ઉંમરવાળાં બાળકોમાંથી 10 % બાળકોને દૃષ્ટિની ખામી છે. એક નિદર્શ તપાસ એજન્સી આ દાવાની ચકાસણી કરવા માટે આ શહેરમાંથી યાદૃચ્છિક રીતે નાની ઉંમરનાં 10 બાળકો પસંદ કરે છે. જો તેમાંથી વધુમાં વધુ એક બાળકને દૃષ્ટિની ખામી માલૂમ પડે તો સામાજિક કાર્યકરે કરેલ દાવો નકારી કાઢે છે, તો (i) નિદર્શ તપાસ એજન્સી સામાજિક કાર્યકરનો દાવો નકારી કાઢે તેની સંભાવના શોધો. (ii) યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલાં નાની ઉંમરનાં 10 બાળકોમાં દૃષ્ટિની ખામીવાળા બાળકોની અપેક્ષિત સંખ્યા શોધો.

ધારો કે p = નાની ઉંમરનાં બાળકોને દૃષ્ટિની ખામી હોય તે ઘટનાની સંભાવના

$= 0.10$ (સામાજિક કાર્યકરનો દાવો સ્વીકારતાં)

તથા X= પસંદ કરાયેલાં નાની ઉંમરના 10 બાળકોમાંથી મળતા દૃષ્ટિની ખામીવાળાં બાળકોની સંખ્યા.

અહીં $n = 10$ છે. દ્વિપદી વિતરણના સંભાવનાના સૂત્ર

$p(x) = {}^nC_x \; p^x \, q^{n-x}, \; x = 0, 1, 2, ..., n$

માં $n = 10$ તથા $p = 0.10$ મૂકતાં

$p(x) = {}^{10}C_x (0.10)^x \, (0.90)^{10-x}, \; x = 0, 1, 2, ..., 10$

(i) હવે એક કે તેથી ઓછાં બાળકોને દૃષ્ટિની ખામી હોય તે ઘટનાની સંભાવના

$= p(0) + p(1)$

$= {}^{10}C_0 \, (0.10)^0 \, (0.90)^{10-0} + {}^{10}C_1 \, (0.10)^1 \, (0.90)^{10-1}$

$= 0.3487 + 10 \; (0.10)\,(0.3874)$

$= 0.3487 + 0.3874$

$= 0.7361$

હવે નિદર્શ તપાસ એજન્સી જો એક કે તેથી ઓછાં બાળકોને દૃષ્ટિની ખામી માલૂમ પડે તો સામાજિક કાર્યકરે કરેલો દાવો નકારી કાઢે છે.

$\therefore$ નિદર્શ તપાસ એજન્સી, સામાજિક કાર્યકરે કરેલ દાવો નકારી કાઢે તે ઘટનાની સંભાવના $= 0.7361$ થાય.

(ii) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ નાની ઉંમરનાં 10 બાળકોમાં દૃષ્ટિની ખામીવાળાં બાળકોની અપેક્ષિત સંખ્યા

$= E(X) = np$

$= 10 \times$ પસંદ કરેલ બાળકને દૃષ્ટિની ખામી હોવાની સંભાવના

$= 10 \times 0.10$

$= 1$

ઉદાહરણ 21 : પાંચ સમતોલ સિક્કાને એકસાથે ઉછાળવાનો પ્રયોગ કરવામાં આવે છે. પ્રયોગ દરમિયાન સિક્કાની ઉપરની તરફ છાપ (H) આવે તે ઘટનાને સફળતા ગણીએ, તો સફળતાની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ મેળવો. જો આ પ્રયોગનું 3200 વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે તો સફળતાની સંખ્યાનું અપેક્ષિત આવૃત્તિ વિતરણ મેળવો. આ વિતરણ માટે સફળતાની સંખ્યાની અપેક્ષિત કિંમત તથા તેનું પ્રમાણિત વિચલન પણ મેળવો.

અહીં સિક્કા સમતોલ હોવાથી છાપ મળવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ થશે.

તેથી $p =$ સફળતાની સંભાવના

$=$ છાપ મળે તે ઘટનાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ થાય.

$\therefore q = 1 - p = \frac{1}{2}$

$n =$ સિક્કાઓની સંખ્યા $= 5$, $x =$ પાંચ સિક્કાઓ ઉછાળતા મળતી સફળતાની સંખ્યા લઈએ.

હવે દ્વિપદી વિતરણના સૂત્ર

$p(x) = {}^nC_x \, p^x q^{n-x}, \; x = 0, 1, 2, ..., n$

માં n, p તથા q ની કિંમતો મૂકતાં

$p(x) = {}^5C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}, \quad x = 0, 1, 2, ..., 5$ મળે

$= {}^5C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5-x}$

$= {}^5C_x \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$= \frac{{}^5C_x}{32}, \quad x = 0, 1, 2, ..., 5$

હવે આપણે ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી દરેક x માટે તેની સંભાવના તથા 3200 વખત કરેલ પ્રયત્નોમાં x સફળતા મળે તેની આવૃત્તિ $= 3200 \times p(x)$ થાય. $x = 0, 1, 2, ...,5$

આ ગણતરી આપણે નીચેના કોષ્ટકમાં રજૂ કરીએ :

x	$p(x)$	અપેક્ષિત આવૃત્તિ $= \mathbf{N} \times p(x)$
0	$\frac{^5C_0}{32} = \frac{1}{32}$	$3200 \times \frac{1}{32} = 100$
1	$\frac{^5C_1}{32} = \frac{5}{32}$	$3200 \times \frac{5}{32} = 500$
2	$\frac{^5C_2}{32} = \frac{10}{32}$	$3200 \times \frac{10}{32} = 1000$
3	$\frac{^5C_3}{32} = \frac{10}{32}$	$3200 \times \frac{10}{32} = 1000$
4	$\frac{^5C_4}{32} = \frac{5}{32}$	$3200 \times \frac{5}{32} = 500$
5	$\frac{^5C_5}{32} = \frac{1}{32}$	$3200 \times \frac{1}{32} = 100$

(ii) સફળતાની સંખ્યાની અપેક્ષિત કિંમત

$= np$

$= 5 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 2.5$

(iii) સફળતાની સંખ્યાનું પ્રમાણિત વિચલન

$= \sqrt{npq}$

$= \sqrt{5 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{1.25}$

$= 1.118$

ઉદાહરણ 22 : એક જાહેરાત કરતી કંપની એવો દાવો કરે છે કે 5 ગૃહિણીઓમાંથી 4 ગૃહિણીઓ માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકતી નથી. આ દાવાની ચકાસણી કરવા માટે 5000 ગૃહિણીઓને યાદચ્છિક રીતે 5 ગૃહિણીઓનો એક એવા સમૂહોમાં વિભાજિત કરવામાં આવે છે. જો આ દાવો સાચો હોય તો આવા બનતા સમૂહોમાંથી કેટલા સમૂહમાં (i) વધુમાં વધુ એક ગૃહિણી (ii) ફક્ત બે જ ગૃહિણીઓ માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકશે ?

અહીં જાહેરાત કરતી કંપનીના દાવા મુજબ ગૃહિણી માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે નહિ તેવી 5માંથી 4 ઘટના બને છે.

$\therefore$ તેની સંભાવના $\frac{4}{5}$ થાય.

એટલે કે માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત ગૃહિણી પારખી શકે તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{1}{5}$ થાય.

તેથી $p =$ પસંદ કરેલ ગૃહિણી માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે તે ઘટનાની સંભાવના $=\frac{1}{5}$ થાય.

તેથી દાવાના પરીક્ષણ માટે પસંદ કરેલ 5000 ગૃહિણીઓને યાદચ્છિક રીતે 5 ગૃહિણીઓનો એક એવા સમૂહોમાં વિભાજિત કરવામાં આવે છે, જેથી આવા 1000 સમૂહો બનશે.

હવે $X=$ કોઈ એક સમૂહમાં માખણની બે જુદી-જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે તેવા ગૃહિણીઓની સંખ્યા લઈએ તો $x = 0, 1, ..., 5$ થાય.

આમ આપણી પાસે $n = 5,\ p = \frac{1}{5},\ q = \frac{4}{5}$ છે.

હવે દ્વિપદી વિતરણના સૂત્ર

$$P(x) = {}^nC_x\ p^x\ q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n$$

માં ઉપરની કિંમતે મૂકતાં $p\,(x)$એ નીચે મુજબ બને.

$$P(x) = {}^5C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{5-x},\quad x = 0, 1, 2, ..., 5$$

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને xની જુદી-જુદી કિંમતો માટે તેની સંભાવના ગણીએ તથા આ સંભાવનાને 1000 વડે ગુણવાથી 1000 સમૂહોમાંથી 0, 1, 2, 3, 4 કે 5 ગૃહિણીઓ બે જુદા-જુદા માખણની બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે તેવા સમૂહોની સંખ્યા મળે.

(i) 1000 સમૂહોમાં વધુમાં વધુ એક ગૃહિણી માખણની બે જુદી જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે તેવા સમૂહોની સંખ્યા

$$= 1000 \times \left[p(0) + p(1) \right]$$

$$= 1000 \times \left[{}^5C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-0} + {}^5C_1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-1} \right]$$

$$= 1000 \times \left[\frac{1024}{3125} + 5 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{256}{625}\right) \right]$$

$$= 1000 \times \left[\frac{1024}{3125} + \frac{256}{625} \right]$$

$= 1000 \times [0.32768 + 0.4096]$

$= 1000 \times [0.73728]$

$= 737.28$

≈ 737 સમૂહ

(ii) 1000 સમૂહોમાં ફક્ત બે જ ગૃહિણીઓ માખણની બે જુદી જુદી બ્રાન્ડ વચ્ચેનો તફાવત પારખી શકે તેવા સમૂહોની સંખ્યા

$= 1000 \times p(2)$

$$= 1000 \times {}^5C_2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^{5-2}$$

$$= 1000 \times 10 \times \left(\frac{1}{25}\right) \times \left(\frac{64}{125}\right)$$

$$= 1000 \times \frac{640}{3125}$$

$= 1000 \times 0.2048$

$= 204.8$

≈ 205 સમૂહો

સ્વાધ્યાય 2.2

1. એક સંમિત દ્વિપદી વિતરણ માટે $n = 8$ હોય, તો $P(X \le 1)$ મેળવો.

2. એક દ્વિપદી વિતરણનો મધ્યક 5 છે તથા તેનું વિચરણ એ સફળતાની સંભાવના જેટલું છે. આ વિતરણના પ્રાચલ શોધો અને તે પરથી આ વિતરણ માટે એક પણ નિષ્ફળતા ન મળે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

3. એક વ્યક્તિએ 4 ગાડીઓ ભાડે આપવા માટે રાખેલ છે. દિવસ દરમિયાન કોઈ પણ ગાડી ભાડે જાય તેની સંભાવના 0.6 છે, તો કોઈ એક દિવસ દરમિયાન એકથી વધુ પરંતુ 4થી ઓછી ગાડી ભાડે જાય તેની સંભાવના શોધો.

4. એક તાલુકામાં 200 ખેતરો આવેલ છે. આ તાલુકાનાં 200 ખેતરોમાં બનાવેલ પાણી માટેના બોરમાંથી 20 ખેતરોમાં ખારું પાણી મળેલ છે. આ તાલુકામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલાં 5 ખેતરોમાંથી 3 ખેતરોમાં ખારું પાણી ન મળે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

5. એક દાખલો 6 વિદ્યાર્થીઓને ઉકેલવા માટે આપવામાં આવે છે. કોઈ પણ વિદ્યાર્થી દાખલાનો સાચો ઉકેલ લાવે તેની સંભાવના 0.6 છે. વિદ્યાર્થીઓ સ્વતંત્ર રીતે દાખલાનો ઉકેલ લાવવા પ્રયત્ન કરે છે, તો 6માંથી ફક્ત 2 વિદ્યાર્થીઓ દ્વારા દાખલાનો સાચો ઉકેલ મળે તેની સંભાવના શોધો.

*

સારાંશ

- **યાદચ્છિક ચલ :** એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ Uના દરેક ઘટકને વાસ્તવિક સંખ્યા સાથે સાંકળતા વિધેયને યાદચ્છિક ચલ કહેવામાં આવે છે.

- **અસતત યાદચ્છિક ચલ :** જે યાદચ્છિક ચલ X વાસ્તવિક સંખ્યાગણ Rની સાન્ત સંખ્યામાં અથવા ગણ્ય અનંત કિંમતો ધારણ કરી શકે તેમ હોય, તેવા ચલ X ને અસતત યાદચ્છિક ચલ કહેવાય.

- **સતત યાદચ્છિક ચલ :** જે યાદચ્છિક ચલ X વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ R માં અથવા R ના કોઈ પણ અંતરાલમાં કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે તેવા ચલને સતત યાદચ્છિક ચલ કહેવાય.

- **અસતત સંભાવના-વિતરણ :** ધારો કે $X : U \rightarrow R$ એ એક અસતત યાદચ્છિક ચલ છે, જે Rના ઉપગણ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ માંથી જ કોઈ એક કિંમત ધારણ કરી શકે છે. વળી, Xએ કિંમત x_i ધારણ કરે તેની સંભાવના $p(x_i)$ છે. જો $p(x_i) > 0, i = 1, 2, ..., n$ અને $\Sigma\, p(x_i) = 1$ હોય, તો વાસ્તવિક કિંમતોના ગણ $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ અને $\{p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)\}$ ને યાદચ્છિક ચલ Xનું અસતત સંભાવના-વિતરણ કહે છે, જે કોષ્ટકમાં નીચે પ્રમાણે લખવામાં આવે છે :

$X = x$	x_1	x_2	....	x_i	...	x_n	કુલ
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	....	$p(x_i)$	...	$p(x_n)$	1

અહીં $0 < p(x_i) < 1, i = 1, 2, ..., n$

- **બર્નોલી પ્રયત્નો :** ધારો કે એક દ્વિવિધ વિકલ્પવાળા યાદચ્છિક પ્રયોગનાં બે શક્ય પરિણામો સફળતા (S) અને નિષ્ફળતા (F) છે. જો આ પ્રયોગનું સમાન પરિસ્થિતિ હેઠળ પુનરાવર્તન કરવામાં આવે અને દરેક પ્રયત્ને સફળતાની સંભાવના $p(0 < p < 1)$ અચળ હોય, તો આવા પ્રયત્નોને બર્નોલી પ્રયત્નો કહેવામાં આવે છે.

- **દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ :** ધારો કે n બર્નોલી પ્રયત્નોમાં મળતી સફળતા (S) અને નિષ્ફળતા (F)ની શ્રેણીમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાને X વડે દર્શાવીએ તો Xને દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ કહેવામાં આવે છે.

- **દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ :** દ્વિપદી યાદચ્છિક ચલ Xના સંભાવના-વિતરણને દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ કહે છે.

સૂત્રોની યાદી :

(1) અસતત સંભાવના-વિતરણનો મધ્યક $= \mu$

$= E(X)$

$= \Sigma x\, p(x)$

(2) અસતત સંભાવના-વિતરણનું વિચરણ $= \sigma^2$

$= V(X)$

$= E(X^2) - (E(X))^2$

જ્યાં $E(X^2) = \Sigma x^2\, p(x)$

(3) દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણ

$P(X = x) = p(x) = {}^nC_x\, p^x q^{n-x},\ x = 0,\ 1,\ 2,\ ....,\ n,\ 0 < p < 1,\ q = 1 - p$

(4) દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણનો મધ્યક $= np$

(5) દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણનો વિચરણ $= npq$

(6) દ્વિપદી સંભાવના-વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન $= \sqrt{npq}$

(7) જો કોઈ બર્નોલી પ્રયત્નો વાળા પ્રયોગને N વખત પુનરાવર્તિત કરીએ અને પ્રયોગમાં મળતી સફળતાની સંખ્યા x ની સંભાવના $p(x)$ હોય તો N પુનરાવર્તનોમાં મળતી સફળતાની સંખ્યાની અપેક્ષિત આવૃત્તિ $= N \cdot p(x)$

સ્વાધ્યાય 2

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નીચેનામાંથી કયો ચલ એ અસતત ચલનું ઉદાહરણ બનશે ?

(a) વિદ્યાર્થીની ઊંચાઈ (b) વિદ્યાર્થીનું વજન

(c) વિદ્યાર્થીનું બ્લડપ્રેશર (d) વિદ્યાર્થીનું જન્મ વર્ષ

2. નીચેનામાંથી કયો ચલ એ સતત ચલનું ઉદાહરણ છે ?

(a) કોઈ એક સ્થળે બનતા અકસ્માતની સંખ્યા

(b) વર્ષ દરમિયાન વરસાદ પડ્યો હોય તેવા દિવસોની સંખ્યા

(c) દિવસ દરમિયાનનું મહત્તમ તાપમાન

(d) કુટુંબમાં બાળકોની સંખ્યા

3. જો યાદચ્છિક ચલ X એ -1, 0 અને 1 કિંમતો ધારણા કરે તેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{5}$, K તથા $\frac{1}{3}$ છે. જ્યાં $0 < K < 1$ અને X એ આ કિંમતો સિવાય અન્ય કોઈ જ કિંમતો ધારણ કરતો નથી. તો $E(X)$ની કિંમત શું થાય ?

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{3}{5}$ (c) $\frac{2}{15}$ (d) $\frac{3}{15}$

4. એક યાદચ્છિક ચલ ફક્ત -2, 0 અને 2 જ કિંમતો ધારણ કરે છે જેની સંભાવના અનુક્રમે $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}$ અને K છે. $0 < K < 1$ તો Kની કિંમત શું થાય ?

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{3}{5}$

5. એક અસતત સંભાવના-વિતરણ માટે તેના મધ્યકની કિંમત 3 છે જ્યારે તેનું વિચરણ 7 છે તો આ વિતરણ માટે $E\left(X^2\right)$ શું થાય ?

(a) 10 (b) 4 (c) 40 (d) 16

6. એક અસતત ચલ X ના સંભાવના-વિતરણ માટે $E(X)=5$ તથા $E\left(X^2\right)=35$ છે, તો આ વિતરણનું વિચરણ શું થાય ?

(a) 40 (b) 30 (c) 20 (d) 10

7. $n = 10$ પ્રાચલવાળા ધન વિષમ દ્વિપદી વિતરણ માટે નીચે આપેલ કિંમતો પૈકી કઈ કિંમત મધ્યકની હોઈ શકે ?

(a) 5 (b) 3 (c) 9 (d) 7

8. $n = 4$ તથા $p = \frac{1}{2}$ પ્રાચલવાળા દ્વિપદી વિતરણ માટે $p(x)$નું મૂલ્ય x ની કઈ કિંમત માટે મહત્તમ બનશે ?

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4

9. એક દ્વિપદી વિતરણનો મધ્યક 5 તથા વિચરણ $\frac{10}{7}$ છે. તો આ વિતરણ કેવું બનશે ?

(a) ધન વિષમ (b) ઋણ વિષમ

(c) સંમિત (d) વિતરણ વિશે કશું જ કહી શકાય નહિ

10. n અને p પ્રાચલવાળા દ્વિપદી વિતરણ માટે એક પણ સફળતા ન મળે તે ઘટનાની સંભાવના માટેનું સૂત્ર નીચેના પૈકી કયું છે ?

(a) ${}^nC_0 p^n q^0$ (b) ${}^nC_0 p^0 q^n$ (c) ${}^nC_0 p q^n$ (d) ${}^nC_0 p^n q$

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. અસતત યાદૃચ્છિક ચલની વ્યાખ્યા આપો.

2. સતત યાદૃચ્છિક ચલની વ્યાખ્યા આપો.

3. અસતત સંભાવના-વિતરણની વ્યાખ્યા આપો.

4. અસતત ચલનો મધ્યક શોધવા માટેનું સૂત્ર જણાવો.

5. અસતત ચલનું વિચરણ શોધવા માટેનું સૂત્ર જણાવો.

6. એક સંમિત દ્વિપદી વિતરણનો મધ્યક 7 છે. તેના પ્રાચલ n ની કિંમત જણાવો.

7. એક દ્વિપદી વિતરણના પ્રાચલ અનુક્રમે 10 તથા $\frac{2}{5}$ છે, તો તેના વિચરણની ગણતરી કરો.

8. બર્નોલી પ્રયત્નોમાં સફળતા અને નિષ્ફળતાની સંભાવના વચ્ચેનો સંબંધ જણાવો.

9. દ્વિપદી વિતરણના મધ્યક અને વિચરણ વચ્ચેનો સંબંધ જણાવો.

10. એક દ્વિપદી વિતરણમાં નિષ્ફળતાની સંભાવના 0.6 છે તથા તેમાં કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા 5 છે, તો આ વિતરણ માટે સફળતાની સંભાવના શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

X	2	3	4	5
$p(x)$	0.2	0.3	$4C$	C

તો અચળ Cની કિંમત નક્કી કરો.

2. અસતત સંભાવના-વિતરણ $p(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{6}; & x = 2, 3 \\ \frac{1}{2}; & x = 4 \end{cases}$

માટે વિતરણના મધ્યકની ગણતરી કરો.

3. એક યાદૃચ્છિક ચલનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$p(x) = \frac{x+3}{10}, \quad x = -2, 1, 2$

તો તે પરથી $E(X^2)$ની ગણતરી કરો.

4. એક સંમિત દ્વિપદી વિતરણ માટે જો $n = 4$ હોય, તો $P(4)$ મેળવો.

5. બર્નોલી પ્રયત્નોની વ્યાખ્યા આપો.

6. એક દ્વિપદી વિતરણ માટે જો સફળતાની સંભાવના એ નિષ્ફળતાની સંભાવના કરતા બમણી હોય અને $n = 4$ હોય, તો આ વિતરણનો વિચરણ શું થાય ?

7. $n = 8$ તથા નિષ્ફળતાની સંભાવના $\frac{2}{3}$ હોય તેવા દ્વિપદી વિતરણનો પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

8. એક દ્વિપદી વિતરણના મધ્યક 4 અને વિચરણ 2 છે, તો આ વિતરણના પ્રાચલ શોધો.

9. એક દ્વિપદી વિતરણ માટે $n = 10$ અને $q - p = 0.6$ છે, તો આ વિતરણનો મધ્યક મેળવો.

10. એક દ્વિપદી વિતરણ માટે પ્રમાણિત વિચલન 0.8 છે, તથા નિષ્ફળતાની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે, તો આ વિતરણનો મધ્યક શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. એક યાદચ્છિક ચલ X નું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$$p(x) = \begin{cases} K(x-1); & x = 2, 3 \\ K; & x = 4 \\ K(6-x)\ ; & x = 5 \end{cases}$$

તો અચળ Kની કિંમત શોધો તથા ચલ X એ યુગ્મ કિંમત ધારણ કરે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

2. એક યાદચ્છિક ચલ Xનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

$$p(x) = C\left(x^2 + x\right),\ x = -2, 1, 2$$

તો Cની કિંમત મેળવો તથા બતાવો કે $P(2) = 3P(-2)$ છે.

3. એક યાદચ્છિક ચલ Xનું વિતરણ $P(x) = K \cdot {}^5P_x,\ x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ છે, તો અચળ K શોધો તથા આ વિતરણનો મધ્યક મેળવો.

4. અસતત સંભાવના-વિતરણ એટલે શું ? તેના ગુણધર્મો જણાવો.

5. દ્વિપદી વિતરણના ગુણધર્મો જણાવો.

6. નિશાન તાકવાની એક રમતમાં રમેશ નિશાન તાકવામાં નિષ્ફળ જાય તેની સંભાવના $\frac{2}{5}$ છે. જો તેને નિશાન તાકવા માટે 3 પ્રયત્નો આપવામાં આવે તો તેમાંથી 2 પ્રયત્નોમાં તે નિશાન તાકવામાં સફળ થાય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો. આ વિતરણનો મધ્યક જણાવો.

7. એક વ્યક્તિને ધન પૂર્ણાંક 1 થી 7 માંથી કોઈ પણ એક સંખ્યા પસંદ કરવાનું કહેવામાં આવે છે. જો તેણે પસંદ કરેલ સંખ્યા એકી સંખ્યા હોય તો તે ઇનામ મેળવવાને પાત્ર બને છે. જો આ વ્યક્તિને 5 પ્રયત્નો કરવાનું કહેવામાં આવે, તો તે ફક્ત એક પ્રયત્નમાં ઇનામ મેળવવાને પાત્ર બને તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

8. એક દ્વિપદી વિતરણના મધ્યક અને વિચરણ અનુક્રમે 2 અને $\frac{6}{5}$ છે, તો આ દ્વિપદી વિતરણ માટે $p(1)$ અને $p(2)$ની ગણતરી કરો.

9. એક સફરજનના બૉક્સમાં 10 % સફરજન બગડેલાં છે. બૉક્સમાંથી યાદચ્છિક રીતે પુરવણી સહિત પસંદ કરેલા 6 સફરજનમાંથી બરાબર અડધા સફરજન બગડેલાં મળે તેની સંભાવના શોધો તથા બગડેલા સફરજનની સંખ્યાનું વિચરણ મેળવો.

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. કોઈ એક સ્ટોર્સમાં લૅપટૉપની માસિક માંગનું સંભાવના-વિતરણ નીચે મુજબ છે.

લૅપટૉપની માંગ	1	2	3	4	5	6
સંભાવના	0.10	0.15	0.20	0.25	0.18	0.12

લૅપટૉપની અપેક્ષિત માસિક માંગ નક્કી કરો તથા માંગનું વિચરણ મેળવો.

2. બે પાસાઓને એક વખત ઉછાળવામાં આવે છે. તેમાંથી અંક '6' ઉપરની તરફ આવતા હોય તેવા પાસાની સંખ્યા માટેનું અસતત સંભાવના-વિતરણ મેળવો.

3. 50 વર્ષની ઉંમરના કોઈ પણ વ્યક્તિ એક વર્ષ દરમિયાન મૃત્યુ પામે તેની સંભાવના 0.01 હોય, તો આવી 5 વ્યક્તિઓના એક સમૂહમાંથી

(i) કોઈ પણ વ્યક્તિ એક વર્ષમાં મૃત્યુ ન પામે

(ii) ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ એક વર્ષમાં મૃત્યુ પામે તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

4. ધોરણ 12ના વિજ્ઞાનપ્રવાહમાં અભ્યાસ કરતો વિદ્યાર્થી ઇજનેરી શાખામાં પ્રવેશ મેળવે તેની સંભાવના 0.3 છે. આવા અભ્યાસ કરેલા વિદ્યાર્થીઓમાંથી 5 વિદ્યાર્થીઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. તો તેમાંથી ઇજનેરી શાખામાં પ્રવેશ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા, ઇજનેરી શાખામાં પ્રવેશ ન મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કરતા વધુ હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

5. એક બ્રિજ ઉપર વિમાનમાંથી ફેંકવામાં આવેલ બૉમ્બ બ્રીજ ઉપર જ પડે તેની સંભાવના $\frac{1}{5}$ છે. બ્રિજનો નાશ કરવા માટે બે બૉમ્બ પૂરતા છે. જો બ્રિજ ઉપર 6 બૉમ્બ ફેંકવામાં આવે, તો બ્રિજનો નાશ થવાની સંભાવના શોધો.

6. એક ચોક્કસ પરીક્ષામાં સામાન્ય રીતે 40 % વિદ્યાર્થીઓ નાપાસ થાય છે. 6 વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહમાંથી ઓછામાં ઓછા 4 વિદ્યાર્થીઓ આ પરીક્ષામાં પાસ થાય તેની સંભાવના શોધો.

7. એક બૉક્સમાં 3 લાલ અને 4 સફેદ દડાઓ છે. તેમાંથી ચાર દડા પુરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે. આ પસંદ કરેલ દડામાં (i) 2 દડા લાલ અને 2 દડા સફેદ મળે તથા (ii) ચારેય દડા સફેદ મળે તે ઘટનાની સંભાવના દ્વિપદી વિતરણનો ઉપયોગ કરીને મેળવો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક પેટીમાં એક ડઝન કેરીઓ છે. તેમાં 3 કેરીઓ બગડેલી છે. આ પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે પુરવણીરહિત 3 કેરીઓ પસંદ કરવામાં આવે છે. જો X એ પસંદ કરેલ કેરીઓમાં બગડેલી કેરીઓની સંખ્યા દર્શાવે તો Xનું સંભાવના-વિતરણ મેળવો અને તે પરથી પસંદ કરેલ કેરીઓમાં બગડેલી કેરીઓની અપેક્ષિત કિંમત તથા વિચરણ મેળવો.

2. ધોરણ 10માં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની સમષ્ટિમાં 50 % વિદ્યાર્થીઓ ચોકલેટ ખાવાની ટેવ ધરાવે છે તેવું જાણવા મળેલ છે. આ માહિતીની ચકાસણી કરવા માટે 1024 આગણકોની નિમણૂક કરવામાં આવે છે. દરેક સંશોધન આગણકો, આ વિદ્યાર્થીઓની સમષ્ટિમાંથી યાદચ્છિક રીતે 10 વિદ્યાર્થીઓ પસંદ કરી તેમની ચોકલેટ ખાવાની ટેવ વિશે તપાસ કરે છે, તો 30 ટકાથી ઓછા વિદ્યાર્થીઓ ચોકલેટ ખાવાની ટેવ ધરાવે છે એવી જાણ કરનાર આગણકોની અપેક્ષિત સંખ્યા શોધો.

James Bernoulli
(1654 –1705)

James (Jacob) Bernoulli was born in Basel, Switzerland. He was one of the many prominent mathematicians in the Bernoulli family. Following his father's wish, he studied theology (divinity) and entered the ministry. But contrary to the desires of his parents, he also studied mathematics and astronomy. He travelled throughout Europe from 1676 to 1682; learning about the latest discoveries in mathematics and the sciences under leading figures of the time. He was an early proponent of Leibnizian calculus and had sided with Leibniz during the Leibniz-Newton calculus controversy. He is known for his numerous contributions to calculus, and along with his brother Johann, was one of the founders of the calculus of variations. However, his most important contribution was in the field of probability, where he derived the first version of the law of large numbers. He was appointed as professor of mathematics at the University of Basel in 1687, remained in this position for the rest of his life.

"Normal Distribution is father of all probability distributions. For larger sample size almost all theoritical distributions follow normal distribution".

– Unknown

3

પ્રામાણ્ય-વિતરણ
(Normal Distribution)

વિષયવસ્તુ :

3.1 પ્રામાણ્ય વિતરણ : પ્રસ્તાવના, સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

3.2 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ અને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણ

3.3 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રના કોષ્ટક પરથી સંભાવના (ક્ષેત્રફળ) શોધવા માટેની પદ્ધતિ

3.4 પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો

3.5 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો

3.6 ઉદાહરણો

3.1 પ્રામાણ્ય વિતરણ : પ્રસ્તાવના, સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

આપણે અસતત યાદચ્છિક ચલ માટેના સંભાવના વિતરણનો અભ્યાસ અગાઉના પ્રકરણમાં કર્યો. હવે આપણે સતત યાદચ્છિક ચલ માટેના સંભાવના વિતરણનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે જાણીએ છીએ કે જે યાદચ્છિક ચલ X વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ R માં અથવા તેના કોઈ પણ અંતરાલમાં કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તેવા ચલને સતત યાદચ્છિક ચલ કહેવાય. જો સતત યાદચ્છિક ચલ X એ એક નિશ્ચિત અંતરાલ a થી b ની વચ્ચેની કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તેને સંકેતમાં $a<x<b$ વડે દર્શાવીશું. સતત યાદચ્છિક ચલની કિંમત કોઈ એક નિશ્ચિત અંતરાલની વચ્ચે હોવાની સંભાવના મેળવવાના વિધેયને તે ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય (Probability Density Function) કહે છે અને તે નીચેની બે શરતોનું સમાધાન કરે છે.

(1) યાદચ્છિક ચલની કિંમત નિશ્ચિત અંતરાલમાં હોય તેની સંભાવના અનૃણ હોય છે.

(2) યાદચ્છિક ચલ નિશ્ચિત અંતરાલની વચ્ચેની કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરે તેની કુલ સંભાવના 1 હોય છે.

આમ યાદચ્છિક ચલ X ની કિંમત નિશ્ચિત અંતરાલ a થી b ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધવા માટે સંભાવના ઘટત્વ વિધેયનો ઉપયોગ કરી શકાય અને તેને સંકેતમાં $P(a<x<b)$ વડે દર્શાવાય. અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે સતત યાદચ્છિક ચલ X ની એક નિશ્ચિત કિંમત માટે સંભાવના ઘટત્વ વિધેય દ્વારા મેળવેલ સંભાવના હંમેશાં શૂન્ય (0) થાય છે એટલે કે $P(x=a)=0$ થાય. આમ, તમામ સતત સંભાવના ઘટત્વ વિધેય દ્વારા મેળવાતી સંભાવનાઓ $P(a<x<b)$ અને $P(a \le x \le b)$ સમાન થાય એટલે કે $P(a<x<b)=P(a \le x \le b)$ થાય.

સતત યાદચ્છિક ચલનાં સંભાવના વિતરણોમાં પ્રામાણ્ય વિતરણ અતિ મહત્ત્વનું અને આંકડાશાસ્ત્રનાં ઉચ્ચત્તર અભ્યાસમાં સૌથી વધુ ઉપયોગી હોય તેવું વિતરણ છે. તેની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

જો યાદચ્છિક ચલ X એ μ (મ્યૂ) મધ્યક તેમજ σ (સિગ્મા) પ્રમાણિત વિચલનવાળો ચલ હોય અને તેનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \; ; -\infty<x<\infty$$

$$-\infty<\mu<\infty$$

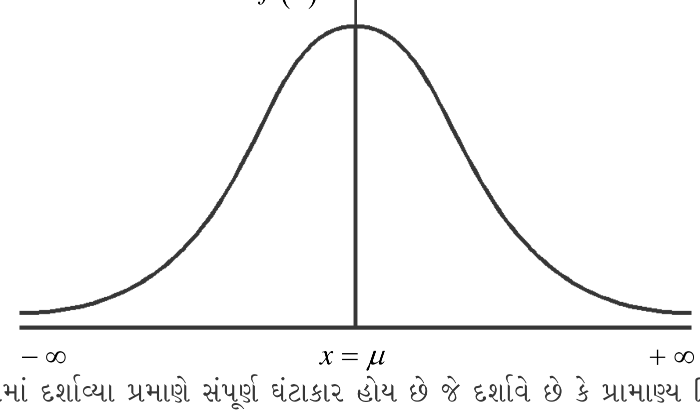
$$0<\sigma<\infty$$

જ્યાં $\pi=3.1416$ અને $e=2.7183$ અચળાંકો છે

હોય તો યાદચ્છિક ચલ X ને પ્રામાણ્ય ચલ અને $f(x)$ ને પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય વડે દર્શાવાય છે.

આ પ્રામાણ્ય ચલ X ના વિતરણને પ્રામાણ્ય વિતરણ કહે છે અને તેને સંકેતમાં $N(\mu,\sigma^2)$ કહે છે.

પ્રામાણ્ય ચલ X ની જુદી જુદી કિંમતોને અનુરૂપ સંભાવના ઘટત્વ વિધેય $f(x)$ ની કિંમતો શોધી જે વક્ર દોરવામાં આવે છે તેને પ્રામાણ્ય વક્ર કહેવામાં આવે છે જેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :



પ્રામાણ્ય વક્ર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંપૂર્ણ ઘંટાકાર હોય છે જે દર્શાવે છે કે પ્રામાણ્ય વિતરણ સંમિત વિતરણ છે.

3.2 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ અને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણ

(Standard Normal Variable and Standard Normal Distribution)

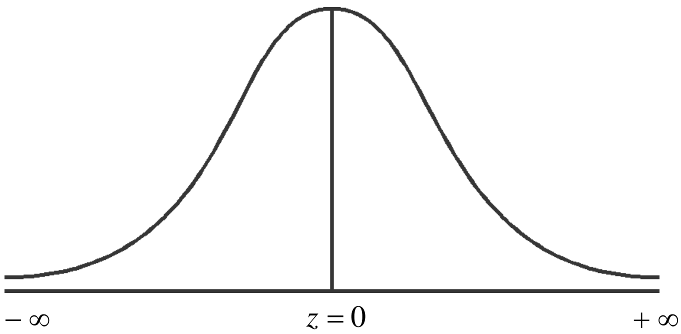
જો પ્રામાણ્ય યાદચ્છિક ચલ X નો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ હોય, તો યાદચ્છિક ચલ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ કહેવામાં આવે છે અને તેનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \; ; -\infty < z < \infty$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, યાદચ્છિક પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z નું સંભાવના ઘટત્વ વિતરણ એ મધ્યક શૂન્ય (0) અને પ્રમાણિત વિચલન 1 વાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ છે.

નોંધ : પ્રકરણનાં અભ્યાસ દરમિયાન હવેથી આપણે યાદચ્છિક પ્રામાણ્ય ચલ X ને ફક્ત પ્રામાણ્ય ચલ X તેમજ યાદચ્છિક પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ને બદલે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z કહીશું.

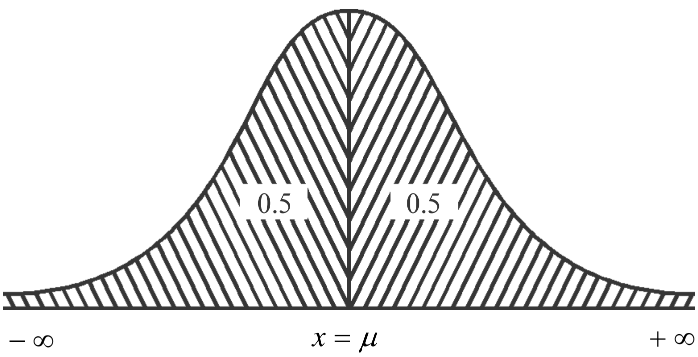
પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની જુદી જુદી કિંમતોને અનુરૂપ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ઘટત્વ વિધેય $f(z)$ ની કિંમતોને આલેખ પર દર્શાવતા નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો સંપૂર્ણ ઘંટાકાર વક્ર મળે છે :



આ વક્રને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્ર કહેવામાં આવે છે અને તે $Z = 0$ ની બંને બાજુ સંમિત હોય છે.

3.3 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રના કોષ્ટક પરથી સંભાવના (ક્ષેત્રફળ) શોધવા માટેની પદ્ધતિ

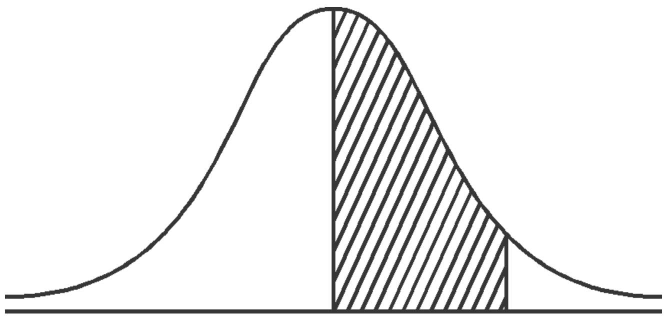
આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રામાણ્ય વક્ર એ પ્રામાણ્ય ચલનાં સંભાવના ઘટત્વ વિધેયનો વક્ર છે અને તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :



આ વક્ર અને X-અક્ષ વચ્ચે આચ્છાદિત પ્રદેશનું કુલ ક્ષેત્રફળ (સંભાવના) 1 થાય છે. પ્રામાણ્ય વક્ર એ પ્રામાણ્ય ચલ X નાં મધ્યક μ ની બંને બાજુ સંમિત હોય છે તેથી $X = \mu$ માટેની શિરોલંબ રેખા પ્રામાણ્ય વક્રના ક્ષેત્રફળ (સંભાવના)ના

બે સમાન ભાગ કરે છે. $X=\mu$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ (સંભાવના) 0.5 થાય તેને સંકેતમાં $P(X \ge \mu)=0.5$ વડે દર્શાવીશું. જ્યારે $X=\mu$ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ (સંભાવના) પણ 0.5 થાય તેને સંકેતમાં $P(X \le \mu)=0.5$ વડે દર્શાવીશું.

પ્રામાણ્ય વક્રમાં પ્રામાણ્ય ચલની X ની કિંમત મધ્યક (μ) અને તેની કોઈ કિંમત a ($a>\mu$) ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના એ પ્રામાણ્ય વક્રમાં x-અક્ષ અને $X=\mu$ તેમજ $X=a$ માટેની શિરોલંબ રેખાઓ વચ્ચેના આચ્છાદિત પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ જેટલી હોય છે તેને આકૃતિમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :



આને સંકેતમાં $P(\mu \le X \le a)$ વડે દર્શાવાય.

પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે સૌપ્રથમ પ્રામાણ્ય ચલ X ને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z માં રૂપાંતર કરવામાં આવે છે. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની જુદી જુદી ધન કિંમતો માટે પ્રામાણ્ય વક્રના 0 થી Z સુધીનાં ક્ષેત્રફળનાં કોષ્ટક તૈયાર કરવામાં આવેલ છે અને આ કોષ્ટક પરથી ક્ષેત્રફળ મેળવી શકાય છે.

નોંધ : પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલની જુદી જુદી કિંમતો માટેનું કોષ્ટક પુસ્તકના છેલ્લા પાના પર આપેલું છે.

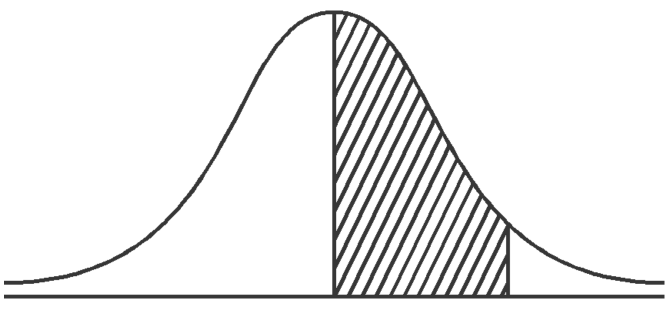
ધારો કે પ્રામાણ્ય ચલ Xની કિંમત મધ્યક μ અને અચળાંક a ($a>\mu$)ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના શોધવાની હોય તો તેને સંકેતમાં આપણે $P(\mu \le X \le a)$ વડે દર્શાવીશું. હવે જો પ્રામાણ્ય ચલ Xનું પ્રમાણિત વિચલન σ હોય, તો

જ્યારે $X=\mu$ હોય ત્યારે $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = \frac{0}{\sigma} = 0$ થાય અને

જ્યારે $X=a$ હોય ત્યારે $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{a-\mu}{\sigma} = z_1$ (કહીએ)

આમ, $P(\mu \le X \le a) = P(0 \le Z \le z_1)$

= પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી $Z = 0$ થી $Z = z_1$ માટે મળતું ક્ષેત્રફળ



ઉદાહરણ 1 : એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 10 અને પ્રમાણિત વિચલન 2 છે, તો (1) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 10 અને 12 ની વચ્ચે હોય, (2) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 8 અને 10 ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધો.

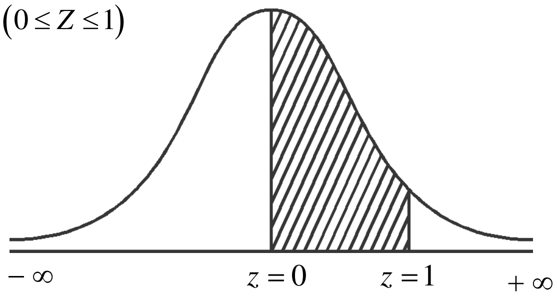
અહીં મધ્યક $\mu = 10$ અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 2$ છે.

(1) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 10 અને 12 ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધવાની છે એટલે કે $P(10 \le X \le 12)$ શોધવું છે.

$$\therefore P(10 \le X \le 12) = P\left(\frac{10-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{12-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{10-10}{2} \le Z \le \frac{12-10}{2}\right)$$

$$= P(0 \le Z \le 1)$$



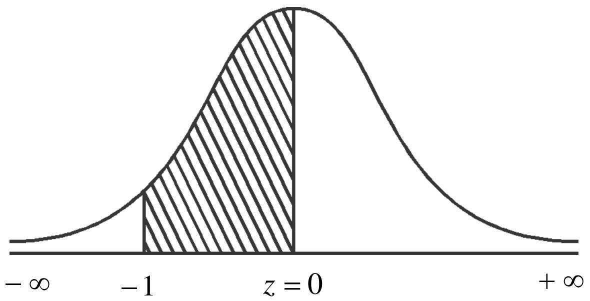
$= 0.3413$ (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

(2) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 8 અને 10ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધવાની છે એટલે કે $P(8 \le X \le 10)$ શોધવું છે.

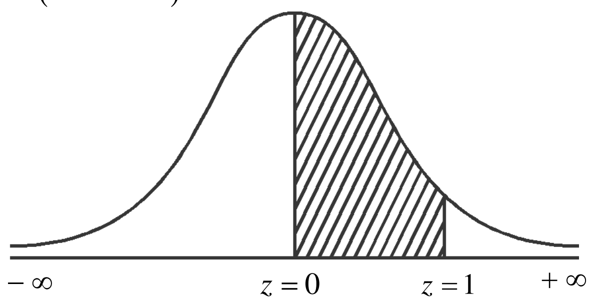
$$\therefore P(8 \le X \le 10) = P\left(\frac{8-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{10-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{8-10}{2} \le Z \le \frac{10-10}{2}\right)$$

$$= P(-1 \le Z \le 0)$$



=



$= P(0 \le Z \le 1)$ ($\because$ સંમિતતા)

$= 0.3413$ (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

ઉદાહરણ 2 : એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 20 અને વિચરણ 16 છે, તો નીચેની સંભાવના શોધો. (1) પ્રામાણ્ય ચલ Xની કિંમત 26 થી ઓછી હોય. (2) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 14 થી વધુ હોય.

અહીં મધ્યક $\mu = 20$ અને વિચરણ $\sigma^2 = 16$ છે.

$\therefore$ પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 4$ થાય.

(1) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 26 થી ઓછી હોવાની સંભાવના

$$= P(X \le 26)$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{26-\mu}{4}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{26-20}{4}\right)$$

$$= P(Z \le 1.5)$$