सरल रेखा

Ex 11.1

प्रश्न 1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष के समान्तर है तथा

(i) मूल बिन्दु से ऊपर की ओर 5 इकाई की दूरी पर है।
(ii) मूल बिन्दु से नीचे की ओर 3 इकाई दूरी पर है।

हल- (i) रेखा x-अक्ष के समान्तर है तथा मूल बिन्दु से ऊपर की ओर 5 इकाई दूरी पर है अतः अभीष्ट समीकरण $y = 5$

(ii) रेखा x-अक्ष के समान्तर है तथा मूल बिन्दु से नीचे की ओर 3 इकाई दूरी पर है अतः अभीष्ट समीकरण $y = -3$

प्रश्न 2. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष के समान्तरे हैं और इससे
(i) $a + b$
(ii) $a^2 - b^2$
(iii) $b \cos \theta$ दूरी पर स्थित है।

हल- x-अक्ष के समान्तर और मूल बिन्दु से c दूरी पर स्थित रेखा का समीकरण
$y = c$

तब,
(i) जब $c = a + b$, तब रेखा का समीकरण $y = a + b$
(ii) जब $c = a^2 - b^2$, तब रेखा का समीकरण $y = a^2 - b^2$
(iii) जब $c = b \cos \theta$, तब रेखा का समीकरण $y = c \cos \theta$

प्रश्न 3. y-अक्ष के समान्तर उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से क्रमशः।

(i) 5
(ii) -3
(iii) $\frac{2}{5}$ इकाई दूरी पर हैं।

हल- y-अक्ष के समान्तर और मूल बिन्दु से या y-अक्ष से c दूरी पर रेखा का समीकरण
$x = c$

(i) जब $c = 5$, तब रेखा का समीकरण $x = 5$

(ii) जब c = -3, तब रेखा का समीकरण x = -3
(ii) जब c = $\frac{2}{5}$, तब रेखा का समीकरण x = $\frac{2}{5}$

प्रश्न 4. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष के समान्तर है तथा उनसे
(i) √7
(ii) -√3+2
(iii) p + q की दूरी पर स्थित है।

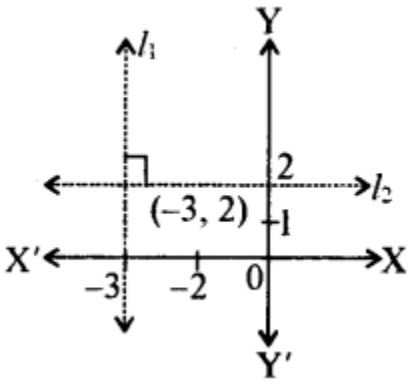
हल- y-अक्ष के समान्तर और मूल बिन्दु यो y-अक्ष से c दूरी पर रेखा का समीकरण
x = c

(i) जब c = √7 तब रेखा का समीकरण x = √7
(ii) जब c = -√3+2, तब रेखा का समीकरण x = -√3+2
(iii) जब c = p + q, तब रेखा का समीकरण x = p + q

प्रश्न 5. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (-3, 2) से होकर जाती है तथा क्रमशः x-अक्ष के लम्बवत् एवं भू-अक्ष के समान्तर है।

हल- बिन्दु (-3, 2) से जाने वाली एवं x-अक्ष के लम्बवत् अर्थात् y-अक्ष के समान्तर रेखा (l_1) को समीकरण
x = -3

या x + 3 = 0



(-3, 2) से जाने वाली एवं x-अक्ष के समान्तर रेखा (l_2) का समीकरण
y = 2

प्रश्न 6. बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली अक्षों के समान्तर रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। इन रेखाओं से 8 इकाई की दूरी पर और इनके समान्तर रेखाओं के समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

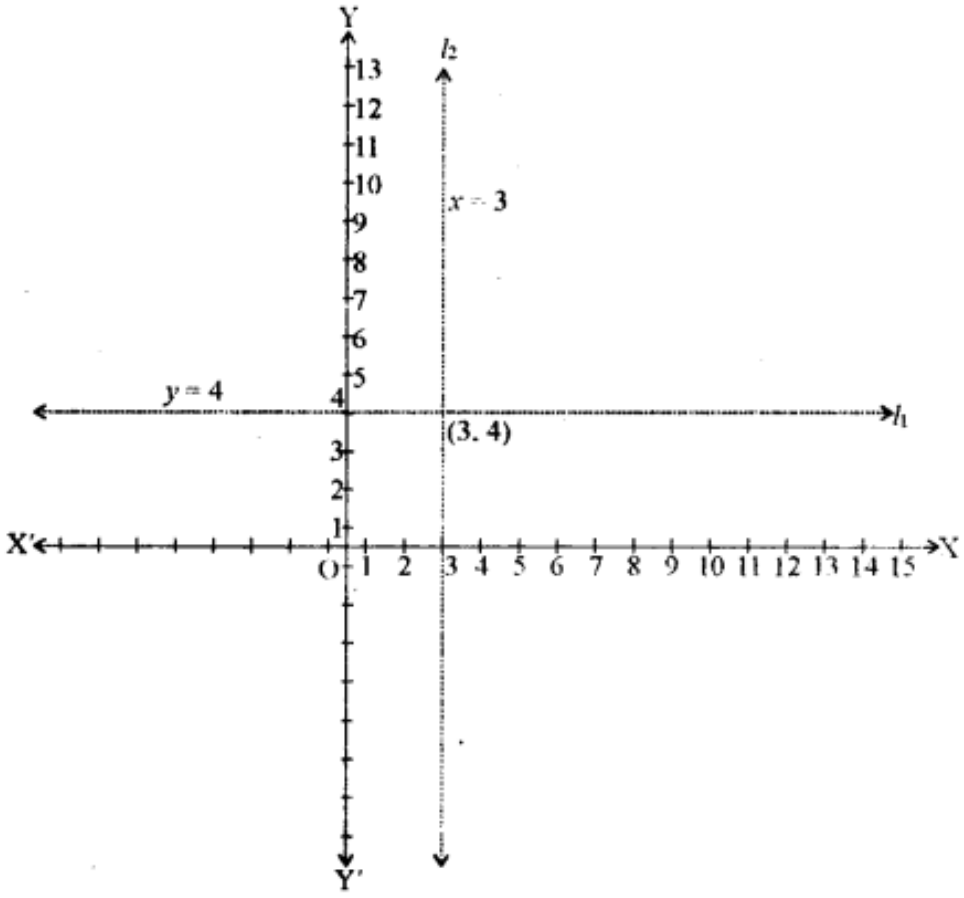
हल- बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली तथा x-अक्ष के समान्तर रेखा (l1), x-अक्ष से 4 इकाई दूरी पर है

अतः इसका समीकरण y = 4 ....(1)

बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली तथा y-अक्ष के समान्तर रेखा (l2), y-अक्ष से 3 इकाई दूरी पर है, अतः इसका समीकरण x = 3 ....(2)

अब रेखा (1) से 8 इकाई की दूरी पर एवं इसके समान्तर रेखाओं के समीकरण

y = 4 ± 8



या y = 4 + 8 तथा y = 4 – 8 = – 4
या y = 12 तथा y + 4 = 0

इसी प्रकार रेखा (2) से 8 इकाई दूरी पर एवं इसके समान्तर रेखाओं के समीकरण
x = 3 ± 8

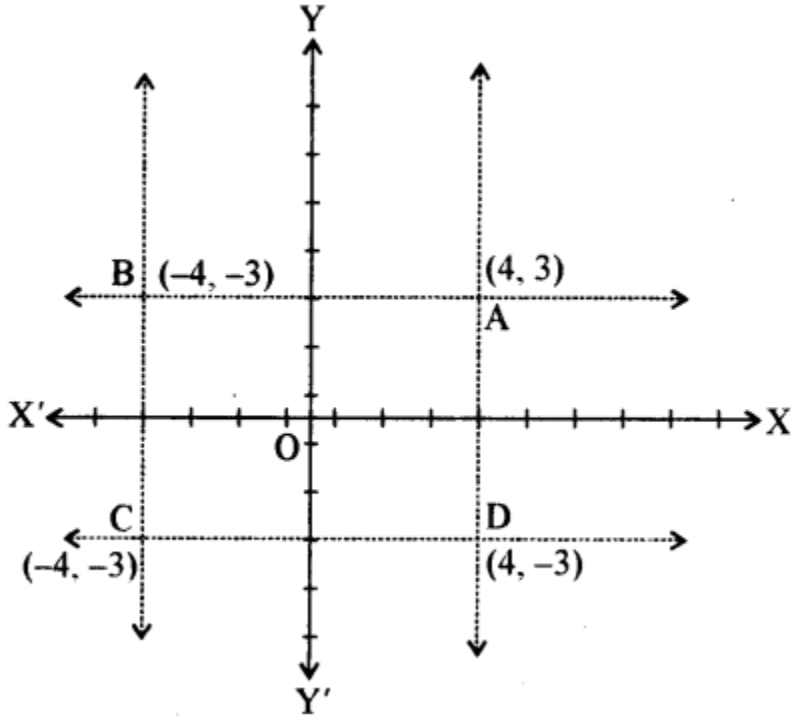
या x = 3 + 8 तथा x = 3 – 8
या x = 11 तथा x = – 5
या x = 11 तथा x + 5 = 0

प्रश्न 7. x = ±4, और y = ±3 के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए और उनसे निर्मित आयत का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

हल- x = ±4 तथा y = ±3 रेखाएँ क्रमशः y-अक्ष एवं x-अक्ष के समान्तर रेखाएँ हैं। इनके प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक (4, 3), (4, -3), (-4, 3) और (-4, -3) हैं।

जिनसे एक आयत का निर्माण होता है जिसकी लम्बाई = 2 x 4 = 8 इकाई एवं चौड़ाई = 2 x 3 = 6 इकाई है।

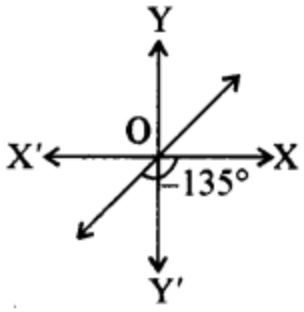
तब अभीष्ट क्षेत्रफल = 8 x 6 = 48 वर्ग इकाई



प्रश्न 8. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से होकर जाती है तथा

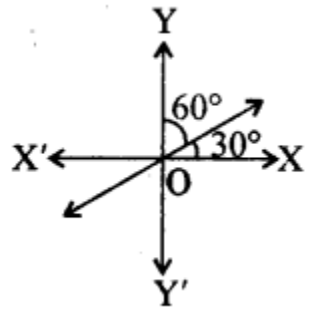
(i) x-अक्ष से -135° का कोण बनाती है।
(ii) प्रथम चतुर्थांश में OY से 60° का कोण बनाती है।
(ii) y-अक्ष की धनदिशा से 5 इकाई के बराबर अन्त:खण्ड काटती है और कोण XOY के समद्विभाजक के समान्तर है।

हल- (i) मूल बिन्दु से होकर जाने वाली तथा x-अक्ष से -135° कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण



y = mx [∵ c = 0]
y = tan (-135°)x
y = – tan(135°)x
y = -(-1)x
y = x
x – y = 0

(ii) प्रथम चतुर्थांश में OY से 60° का कोण बनाने वाली रेखा OX से 30° का कोण बनाती है ।



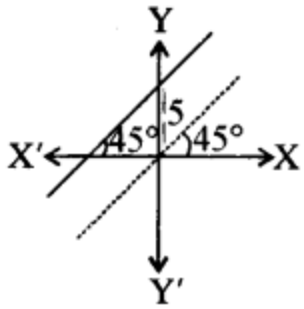
तब रेखा की प्रवणता (m) = tan

30° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$
तब मूल बिन्दु से जाने वाली एवं प्रवणता $\frac{1}{\sqrt{3}}$ वाली रेखा का समीकरण

y = $\frac{1}{\sqrt{3}}x$ (y = mx)
या √3y = x
या x – √3y = 0

(iii) y-अक्ष की धनदिशा में 5 इकाई के बराबर अन्त:खण्ड काटने वाली रेखा के लिए c = 5 कोण XOY की समद्विभाजक रेखा द्वारा x-अक्ष के साथ बनाया गया कोण = 45°

तब कोण XOY के समान्तर रेखा की प्रवणता = tan 45° = 1 अभीष्ट समीकरण



y = mx + c = (1)x + 5
या x – y + 5 = 0

प्रश्न 9. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष तथा y-अक्ष पर निम्नलिखित अन्त:खण्ड काटती है-
(i) 5, 3
(ii) -2, 3

हल- (i) अन्त:खण्ड रूप में रेखा का समीकरण
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

यहाँ a = 5, b = 3 है, तब अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

या $$\frac{3x + 5y}{15} = 1$$

या 3x + 5y = 15

(ii) जब a = -2, b = 3

तब $$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{3} - \frac{x}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2y - 3x}{6} = 1$$

⇒ 2y – 3x = 6
⇒ 3x – 2y + 6 = 0

प्रश्न 10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2, 3) से गुजरती है तथा अक्षों पर बराबर अन्त:खण्ड काटती है।

हल-

अन्त: खण्ड रूप में सरल रेखा का समीकरण
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

जब a = b अर्थात् अक्षों पर काटे गये अन्त:खण्ड बराबर हों तो
$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$

या x + y = a ...(1)

अब यदि रेखा (2, 3) से गुजरती हो तो यह बिन्दु रेखा के समीकरण को सन्तुष्ट करेगा। अतः
2 + 3 = a

या a = 5 ....(2)

समीकरण (1) व (2) से सरल रेखा का अभीष्ट समीकरण
x + y = 5

प्रश्न 11. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2) से होकर जाती है तथा रेखा द्वारा x-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड y-अक्ष पर काटे गये अन्त:खण्ड को दुगुना है।

हल- अन्त:खण्ड रूप में सरल रेखा का समीकरण

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ....(1)

प्रश्नानुसार, x-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड = 2 x y-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड
⇒ a = 2b ....(2)

समीकरण (1) व (2) से
$\frac{x}{2b} + \frac{y}{b} = 1$

या $\frac{x+2y}{2b} = 1$

या x + 2y = 2b ....(3)
सरल रेखा बिन्दु (1, 2) से होकर जाती है अतः यह बिन्दु सरल रेखा के समीकरण (3) को सन्तुष्ट करेगा।

(1) + 2(2) = 2b
या 2b = 5

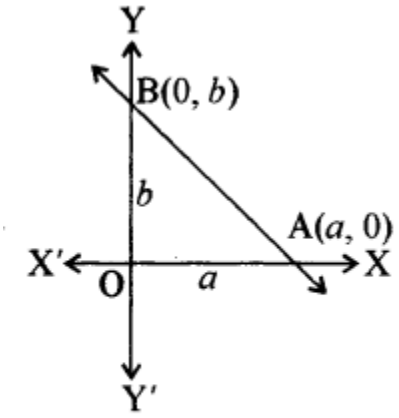
या $b = \frac{5}{2}$ ....(4)

समीकरण (3) व (4) से हमें सरल रेखा का अभीष्ट समीकरण प्राप्त होता है
x + 2y = 5

प्रश्न 12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (-3, -5) से होकर जाती है तथा दोनों अक्षों के मध्य, रेखा का कटा हुआ अन्त:खण्ड इस बिन्दु पर समद्विभाजित करता है।

हल- सरल रेखा का अन्त:खण्ड रूप में समीकरण

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ....(1)
तब x-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड a एवं y-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड b है। चित्रानुसार अक्षों के मध्य कटा हुआ अन्त:खण्ड AB है। इस AB का मध्य बिन्दु यदि (-3, -5) है तब



$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right) = (-3, -5)$$

या $\frac{a}{2} = -3, \frac{b}{2} = -5$
या a = – 6, b = – 10

समी. (1) में a व b के मान रखने पर

$$\frac{x}{(-6)} + \frac{y}{(-10)} = 1$$

$$\text{या} \qquad \frac{x}{6} + \frac{y}{10} = -1$$

$$\text{या} \qquad \frac{5x + 3y}{20} = -1$$

या 5x + 3y = -30

या $5x + 3y + 30 = 0$
अतः सरल रेखा का अभीष्ट समीकरण $5x + 3y + 30 = 0$ होगा।

प्रश्न 13. ऐसी दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (4,-3) से होकर जाती है तथा अक्षों से काटे हुए अन्त:खण्डों का योग 5 इकाई है।

हल- अन्त:खण्ड रूप में सरल रेखा का समीकरण

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ....(1)

यदि सरल रेखा (1) बिन्दु (4,-3) से होकर जाती है तब यह बिन्दु समीकरण (1) को सन्तुष्ट करेगा।

$\frac{4}{a} + \frac{(-3)}{b} = 1$

या $4b - 3a = ab$ ....(2)
पुनः प्रश्नानुसार अक्षों पर काटे हुए अन्त:खण्डों का योग 5 इकाई है तब

$a + b = 5$ ....(3)
समीकरण (3) से $b = 5 - a$, समीकरण (2) में रखने पर
$\Rightarrow 4(5 - a) - 3a = a(5 - a)$
$\Rightarrow 20 - 4a - 3a = 5a - a^2$
$\Rightarrow 20 - 7a = 5a - a^2$

$\Rightarrow a^2 - 7a - 5a + 20 = 0$
$\Rightarrow a^2 - 12a + 20 = 0$
$\Rightarrow a^2 - 10a - 2a + 20 = 0$
$\Rightarrow a(a - 10) + 2(a - 10) = 0$

$\Rightarrow (a - 10)(a - 2) = 0$
$\Rightarrow a = 10, 2$
जब $a = 10$, तब $b = 5 - 10 = -5$
जब $a = 2$, तब $b = 5 - 2 - 3$

अतः सरल रेखाओं के अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{(-5)} = 1 \text{ या } x - 2y - 10 = 0$$

और $$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \text{ या } 3x + 2y - 6 = 0$$

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि उस सरल रेखा का समीकरण जिसके अक्षों पर अन्त:खण्डों के व्युत्क्रम a और b हैं, ax + by = 1 है।

हल- दिया है कि सरल रेखा द्वारा अक्षों पर काटे गए अन्त:खण्डों के व्युत्क्रम a व b हैं, अर्थात् यदि सरल रेखा द्वारा अक्षों पर काटे गए अन्त:खण्ड A व B हैं तब

A = $\frac{1}{a}$ एवं B = $\frac{1}{b}$

तब अन्त:खण्ड रूप में रेखा की समीकरण

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}=1$$

या $$\frac{x}{\left(\frac{1}{a}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{1}{b}\right)}=1$$

या ax + by = 1 इतिसिद्धम्।

प्रश्न 15. एक सरल रेखा अक्षों से क्रमशः 5 और 3 इकाइयों का अन्त:खण्ड काटती है । इस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जब कि अन्त:खण्ड :

(i) अक्षों की धन दिशा में हो।
(ii) अक्षों की ऋण दिशा में हो।
(iii) पहला अन्त:खण्ड धन दिशा में और दूसरा ऋण दिशा में हो ।

हल- अन्त:खण्ड रूप में सरल रेखा का समीकरण

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ....(1)

(i) अक्षों की धन दिशा में क्रमशः 5 व 3 इकाइयों के अन्त:खण्ड हों तब
a = 5 व b = 3

अतः अभीष्ट समीकरण
$\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$

या 3x + 5y = 15
या 3x + 5y – 15 = 0

(ii) अक्षों की ऋण दिशा में क्रमशः 5 व 3 इकाइयों के अन्त:खण्ड हैं। तब
a = – 5 व b = – 3
अतः अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x}{(-5)}+\frac{b}{(-3)}=1$$

$$\text{या} \quad -\frac{x}{5}-\frac{b}{3}=1$$

$$\text{या} \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=-1$$

$$\text{या} \quad \frac{3x+5y}{15}=-1$$

या 3x + 3y = – 15
या 3x + 5y + 15 = 0

(iii) पहला अन्त:खण्ड धन दिशा में 5 इकाई व दूसरा अन्त:खण्ड ऋण दिशा में 3 इकाई है तब
a = 5 व b = -3

अतः अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{(-3)}=1$$

$$\text{या} \quad \frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$$

या 3x – 5y = 15
या 3x – 5y – 15 = 0

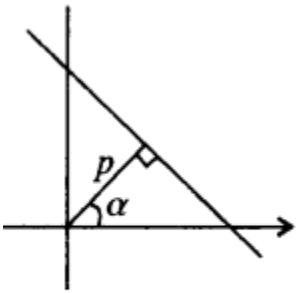
प्रश्न 16. एक सरल रेखा पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब y-अक्ष से 30° का कोण बनाता है तथा उसकी लम्बाई 2 इकाई है। इस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल- अभिलम्ब रूप (Normal Form) में सरल रेखा का समीकरण
x cos α + y sin α = p

यहाँ α = मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब द्वारा x-अक्ष से बनाया गया कोण
p = मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

दिया है p = 2

$\alpha = 90° - 30° = 60°$
अतः अभीष्ट समीकरण



या $x\left(\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2$

या $x + y\sqrt{3} = 4$
या $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$

प्रश्न 17. रेखा $x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin 2\alpha$ के उस भाग की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो अक्षों के मध्य में काटता है। इस भाग के मध्य बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल- दिया गया रेखा का समीकरण

$x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin 2\alpha$

या $$\frac{x \sin \alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{y \cos \alpha}{\sin 2\alpha} = 1$$

या $$\frac{x \sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos 2} + \frac{y \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = 1$$

या $$\frac{x}{2 \cos \alpha} + \frac{y}{2 \sin \alpha} = 1$$

अतः x-अक्ष पर रेखा द्वारा काटा गया अन्त:खण्ड $= 2 \cos \alpha$ y-अक्ष पर रेखा द्वारा काटा गया अन्त:खण्ड $= 2 \sin \alpha$

अतः रेखा द्वारा अक्षों के मध्य काटे गये अन्त:खण्ड AB के सिरों A व B के निर्देशांक क्रमशः $(2 \cos \alpha, 0)$ एवं $(0, 2 \sin \alpha)$ हैं। अतः AB की लम्बाई

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ (दूरी सूत्र)}$$

$$= \sqrt{(0 - 2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha - 0)^2}$$

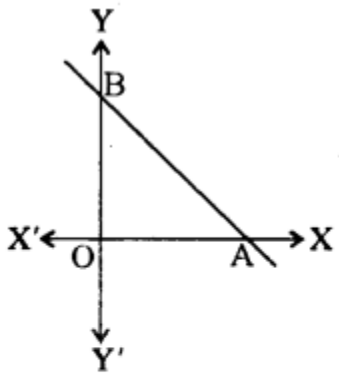
$$= \sqrt{4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}$$

$$= \sqrt{4(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}$$

$$= \sqrt{4(1)}$$

$$= 2$$

इस मध्य भाग AB के मध्य बिन्दु के निर्देशांक



$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2\cos\alpha + 0}{2}, \frac{0 + 2\sin\alpha}{2}\right)$$

$$= (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

प्रश्न 18. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके लिए p = 3 तथा cos α = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ जहाँ p मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई तथा α इस लम्ब द्वारा x-अक्ष से बनाया गया कोण है।

हल-

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

तब $$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\alpha = \pm\frac{1}{2}$$

रेखा का अभीष्ट समीकरण

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ (अभिलम्ब रूप)

$$\Rightarrow \quad x\frac{\sqrt{3}}{2} + y\frac{1}{2} = 3 \text{ तथा } x\frac{\sqrt{3}}{2} + y\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

⇒ √3x + y = 6 तथा √3 – y = 6

Ex 11.2

प्रश्न 1. निम्न समीकरणों को झुकाव रूप तथा अन्त:खण्ड रूप में परिवर्तित कर इनके मानक रूप में प्रयुक्त अचर पदों के मान ज्ञात कीजिए।
(i) 7x – 13y = 15
(ii) 5x + 6y + 8 = 0

हल- (i) दिया गया रेखा का समीकरण
7x – 13y = 14

⇒ – 13y = – 7x + 15

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-7x}{-13} + \frac{15}{(013)}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{7}{13}x + \left(\frac{-15}{13}\right)$$

यह रेखा का झुकाव रूप y = mx + c है। जहाँ

$$m = \frac{7}{13} \text{ एवं } c = \frac{-15}{13}$$

पुन: $7x - 13y = 15$

$$\Rightarrow \quad \frac{7x}{15} - \frac{13y}{15} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\left(\frac{15}{7}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{-15}{13}\right)} = 1$$

यह रेखा का अन्त:खण्ड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ है, जहाँ
a = $\frac{15}{7}$ व b = $\frac{-15}{13}$

(ii) दिया गया रेखा का समीकरण
5x + 6y + 8 = 0
5x + 6 = – 8
6y = – 5x – 8

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{-5}{6}\right)x + \left(\frac{-8}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{-5}{6}\right)x + \left(\frac{-4}{3}\right)$$

यह रेखा का झुकाव रूप y = mx + c है, जहाँ

$$m = \frac{-5}{6} \text{ व } c = \frac{-4}{3}$$

पुन: $5x + 6y + 8 = 0$

$$\Rightarrow \quad 5x + 6y = -8$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5x}{(-8)} + \frac{6y}{(-8)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\left(\frac{-8}{5}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{-8}{6}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\left(\frac{-8}{5}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{-4}{3}\right)} = 1$$

यह रेखा का अन्त:खण्ड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ है, जहाँ
a = $\frac{-8}{5}$ व b = $\frac{-4}{3}$

प्रश्न 2. रेखा x cos α + y sin α = p की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल- दी गई रेखा है

x cos α + y sin α = p.

या $$y = -\frac{x\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{p}{\sin\alpha}$$

y = (-cot α)x + p cosec α

इस समीकरण की तुलना रेखा के झुकाव रूप y = mx + c से करने पर
m = -cot α

जो कि अभीष्ट प्रवणता है।

प्रश्न 3. निम्न रेखाओं के x-अक्ष की धन दिशा से बनने वाले कोण की। स्पर्शज्या ज्ञात कीजिए।
(i) √3x – y + 2 = 0
(ii) x + √3y – 2√3 = 0

हल-

(i) रेखा का समीकरण
√3x – y + 2 = 0
⇒ y = √3x + 2

इस समीकरण की तुलना रेखा के झुकाव रूप y = mx + c से करने पर,
m = √3
⇒ tan θ = √3 = tan 60°

अतः रेखा द्वारा -अक्ष की धन दिशा से बनने वाले कोण की स्पर्शज्या
= tan 60°

(ii) रेखा का समीकरण
x + √3y – 2√3 = 0
⇒ √3y = – x + 2√3

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \qquad y = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)x + 2$$

इस समीकरण की तुलना रेखा के झुकावे रूप y = mx + c से करने पर,

$m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

⇒ tan θ = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ = – tan 30°
⇒ tan θ = tan (180°- 30°)
⇒ tan θ = tan 150°

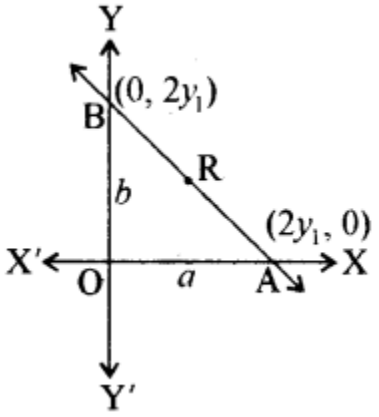
अतः रेखा द्वारा x-अक्ष की धन दिशा से बनने वाले कोण की स्पर्शज्या
= tan 150°

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1$ द्वारा अक्षों पर काटे गये भाग के मध्य बिन्दु के निर्देशांक (x_1, y_1) होंगे।

हल- दिया गया रेखा का समीकरण है-

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1$$

इस समीकरण की तुलना रेखा के अन्त:खण्ड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से करने पर



a = $2x_1$, b = $2y_1$

तब अक्षों के मध्य काटे गए भाग के सिरों के निर्देशांक
A($2x_1$, 0) वे B(0, $2y_1$)

इस भाग AB के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{2x_1+0}{2}, \frac{0+2y_1}{2}\right) = (x_1, y_1)$$

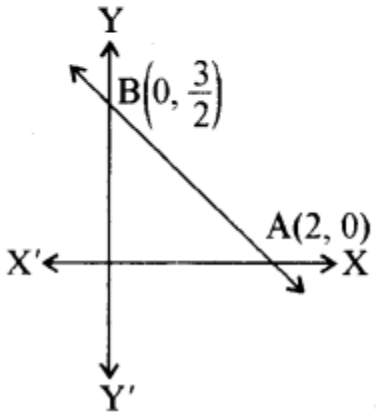
प्रश्न 5. सरल रेखा 3x + 4y = 6 से अक्षों के मध्य कटे हुए अन्त:खण्ड की लम्बाई और उसका मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल- सरल रेखा को समीकरण
3x + 4 = 6

$$\Rightarrow \quad \frac{3x}{6}+\frac{4y}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2}+\frac{2y}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{\left(\frac{3}{2}\right)} = 1 \quad ....(1)$$



इस समीकरण की तुलना रेखा के अन्त:खण्ड रूप $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से करने पर,
a = 2, b = $\frac{3}{2}$

तब दी गई रेखा का अक्षों के मध्य कटे भाग के सिरों के निर्देशांक = (2. 0) व (0.$\frac{3}{2}$)

अतः इस अन्त:खण्ड की अभीष्ट लम्बाई

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(0-2)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2}$$

$$= \sqrt{4 + \frac{9}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{16+9}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{5}{2}$$ इकाई उत्तर

अत: इस अन्त:खण्ड का अभीष्ट मध्य बिन्दु

$$= \left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+3/2}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{4}\right)$$

प्रश्न 6. a और b के नाम बताओ जबकि समीकरण 5x – 4y = 20 और ax – by + 1 = 0 एक ही सरल रेखा को प्रदर्शित करें।

हल- दी गई रेखाएँ हैं-

5x – 4y = 20 ....(1)

एवं ax – by + 1 = 0 ....(2)

समीकरण (1) से

$$\frac{5x}{20} - \frac{4y}{20} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{4} - \frac{y}{5} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + 1 = 0 \qquad \text{....(3)}$$

समी. (2) व (3) की तुलना करने पर

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$-b = \frac{1}{5} \text{ या } b = -\frac{1}{5}$$

अतः दी गई दोनों रेखाएँ एक ही रेखा को निरूपित करें तब a व b के अभीष्ट मान क्रमशः $\frac{-1}{4}$ व $-\frac{1}{4}$ हैं

प्रश्न 7. निम्न समीकरणों को x cos α + y sin α = p के रूप में। परिवर्तित कीजिए।
(i) x + y + √2 = 0
(ii) √3x – y + 2 = 0

हल- (i) x + y + √2 = 0
⇒ x + y = -√2
⇒ – x – y = √2
समीकरण के दोनों पक्षों में $\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} =$ $\sqrt{2}$ से भाग करने पर

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 1 \qquad \ldots.(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ से करने पर

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ तथा } p = 1$$

चूँकि cos α तथा sin α दोनों ऋणात्मक हैं अतः α तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।
अतः cos α = – cos 45° = cos(180° + 45°) = cos 225°

∴ α = 225°

अतः दिए गए समीकरण का अभीष्ट अभिलम्ब रूप
x cos 225° + y sin 225° = 1

(ii) √3x – y + 2 = 0
√3x – y = – 2
-√3x + y = 2 ....(1)

समीकरण (1) में $\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=2$ से भाग देने पर

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=\frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=1 \qquad \ldots.(2)$$

समीकरण (2) की तुलना $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ (अभिलम्ब रूप) से करने पर

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha=\frac{1}{2}$$

यहाँ cos α, ऋणात्मक एवं sin α धनात्मक है अतः α द्वितीय चतुर्थांश में होगा। अतः
cos α = – cos 30°

= cos(180° – 30°) = cos 150°
∴ α = 150°

अतः दिए गए समीकरण का अभीष्ट अभिलम्ब रूप
x cos 150° + y sin 150° = 1

प्रश्न 8. सरल रेखा 3x – 4y – 11 = 0 को लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए तथा इस रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्बे की लम्बाई और x-अक्ष से उसकी प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल- दी गई रेखा का समीकरण है
3x – 4y – 11 = 0
3x – 4y = 11 ....(1)

समीकरण (1) में

$\sqrt{(3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=$
5 का भाग दोनों पक्षों में करने पर,

$$\frac{3x}{5}-\frac{4}{5}y=\frac{11}{5} \qquad \ldots.(2)$$

इस समीकरण की तुलना रेखा के अभिलम्ब रूप x cos α + y sin α = p से करने पर
p = रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई

$= \frac{11}{5}$

$\cos \alpha = \frac{3}{5}$ एवं $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$

तब $\tan \alpha$ = रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की प्रवणता

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-4/5}{3/5} = -\frac{4}{3}$$

प्रश्न 9. सरल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ तथा 2x – 3y = 5 एक ही रेखा निरूपित करते हैं, तो a व b का मान ज्ञात कीजिए।

हल- दी गई रेखा है

$2x - 3y = 5$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{5} - \frac{3y}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{(5/2)} + \frac{y}{(-5/3)} = 1 \qquad \ldots.(1)$$

समीकरण (1) की तुलना $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से करने पर

$$a = \frac{5}{2}$$

$$b = -\frac{5}{3}$$

प्रश्न 10. सरल रेखा y = mx + c एवं x cos α + y sin α = p एक ही रेखा को निरूपित करे तो रेखा का x-अक्ष से झुकाव कोण तथा y-अक्ष से काटे गये अन्त:खण्ड की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल-

दी गई रेखा है

$y = mx + c$ ....(1)

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ....(2)

ये दोनों समीकरण एक ही रेखा के हैं। समीकरण (2) से

$y \sin \alpha = -x \cos \alpha + p$

या $$y = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}x + \frac{p}{\sin\alpha}$$

या $$y = (-\cot\alpha)x + \frac{p}{\sin\alpha} \quad ....(3)$$

समी. (1) व (3) की तुलना करने पर,
रेखा को x-अक्ष से झुकाव = m = – cot α

⇒ m = tan(90 + α)
अतः अभीष्ट झुकाव कोण = 90 + α

y-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड c = $\frac{p}{\sin\alpha}$

प्रश्न 11. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2, 3) से होकर जाती है और x-अक्ष से 45° का कोण बनाती है।

हल- रेखा द्वारा x-अक्ष से बनाया गया कोण = 45°
अतः रेखा का झुकाव = m = tan 45° = 1

चूँकि रेखा (2, 3) से होकर जाती है अतः बिन्दु झुकाव रूप में रेखा का समीकरण ।
⇒ $y - y_1 = m(x - x_1)$
⇒ $y - 3 = 1(x - 2)$

⇒ $y - 3 = x - 2$
⇒ $y = x - 2 + 3$
⇒ $x - y + 1 = 0$

प्रश्न 12. निम्न दो बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए

(i) (3, 4) और (5, 6)
(ii) (0, -a) और (b, 0)
(iii) (a, b) और (a + b, a – b)
(iv) (at_1, alt_1) और (at_2, alt_2)
(v) (a sec α, b tan α) और (a sec β, b tan β)

हल- दो बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(i) बिन्दु (3, 4) और (5, 6) तब अभीष्ट रेखा

$$y - 4 = \frac{6-4}{5-3}(x - 3)$$

$\Rightarrow y - 4 = x - 3$

$\Rightarrow y - x = 4 - 3$

$\Rightarrow y - x = 1$

(ii) बिन्दु (0, – a) और (b, 0) से गुजरने वाली रेखा

$$y - (-a) = \frac{0-(-a)}{b-0}(x - 0)$$

$$\Rightarrow \quad y + a = \frac{a}{b}(x - 0)$$

$\Rightarrow by + ab = ax$

$\Rightarrow ax - by = ab$

(iii) (a, b) और (a + b, a – b) से गुजरने वाली रेखा

$$y - b = \frac{a-b-b}{a+b-a}(x - a)$$

$$\Rightarrow \quad y - b = \frac{a-2b}{b}(x - a)$$

$by - b^2 = (a - 2b)x - a^2 + 2ab$

$(a - 2b)x - by + b^2 + 2ab - a^2 = 0$

(iv) (at_1, alt_1) और (at_2, alt_2) से गुजरने वाली रेखा

$$y - \frac{a}{t_1} = \frac{a/t_2 - a/t_1}{at_2 - at_1}(x - at_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{yt_1 - a}{t_1} = \frac{t_1 a - t_2 a}{t_1 t_2 (at_2 - at_1)}(x - at_1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{yt_1 - a}{t_1} = \frac{a(t_1 - t_2)}{-at_1 t_2 (t_1 - t_2)}(x - at_1)$$

$$\Rightarrow \quad yt_1 - a = -\frac{1}{t_2}(x - at_1)$$

$$\Rightarrow \quad yt_1 t_2 - at_2 = -x + at_1$$

$$\Rightarrow \quad yt_1 t_2 + x = a(t_1 + t_2)$$

(v) (a sec α, b tan α) और (a sec β, b tan β) से गुजरने वाली रेखा

$$y - b\tan\alpha = \frac{b\tan\beta - b\tan\alpha}{a\sec\beta - a\sec\alpha}(x - a\sec\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad y - b\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{a\left(\frac{1}{\cos\beta} - \frac{1}{\cos\alpha}\right)}\left(x - \frac{a}{\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - b\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a}\frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{(\cos\alpha - \cos\beta)}$$

$$\left(x - \frac{a}{\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - b\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{b}{a}\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}}\sin\left(\frac{\beta-2}{2}\right)$$

$$\left(x - \frac{a}{\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - b\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a}\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\left(x - \frac{a}{\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - b\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2b\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{a\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\left(x - \frac{a}{\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - b\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{a\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(x - \frac{a}{\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow ya\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{ab\sin\alpha\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\alpha}$$

$$= bx\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \frac{ab\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad bx\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - ay\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{ab\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\alpha} - \frac{ab\sin\alpha\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad bx\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - ay\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{ab}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\alpha\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad bx\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - ay\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{ab}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) - \sin\alpha\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad bx\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - ay\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{ab}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin\alpha\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad bx\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - ay\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{ab}{\cos\alpha}\left[\cos\alpha\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sin\alpha\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right.$$

$$-\sin\alpha\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Big]$$

$$\Rightarrow \quad bx\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - ay\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{ab}{\cos\alpha}\left[\cos\alpha\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad bx\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - ay\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= ab\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Ex 11.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित सरल रेखाओं के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए।

(i) $y = (2 - \sqrt{3})x + 5$ तथा $y = (2 + \sqrt{3})x - 7$
(ii) $2y - 3x + 5 = 0$ तथा $4x + 5y + 8 = 0$
(iii) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ तथा $\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 1$

हल- (i) रेखा $y = (2 - \sqrt{3})x + 5$ की प्रवणता
$m_1 = (2 - \sqrt{3})$
($y = mx + c$ से तुलना करने पर)

तथा रेखा $y = (2 + \sqrt{3})x - 7$ की प्रवणता
$m_2 = (2 + \sqrt{3})$
यदि दोनों रेखाओं के मध्य कोण θ है, तब

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}}{1+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{-2\sqrt{3}}{1+2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\right|$$

$$= \left|\frac{-2\sqrt{3}}{1+4-3}\right|$$

$$= \left|\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$= \left|-\sqrt{3}\right|$$

$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60°$
$\Rightarrow \theta = 60°$

रेखाओं के मध्य दूसरा कोण = 180° – 60° = 120°

(ii) रेखा $2y - 3x + 5 = 0$
$2y = 3x - 5$

या $$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \quad \ldots.(1)$$

रेखा (1) की प्रवणता $m_1 = \frac{3}{2}$

पुन: रेखा $4x + 5y + 8 = 0$
या $5y = -4x - 8$

या $$y = -\frac{4}{5}x - \frac{8}{5} \quad \ldots.(2)$$

रेखा (2) की प्रवणता $m_2 = -\frac{4}{5}$

यदि दोनों रेखाओं के मध्य एक कोण θ है तब

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{5}}{1 + \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)}\right|$$

$$= \left|\frac{15+8}{10-12}\right|$$

$$= \left|-\frac{23}{2}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left[\left|-\frac{23}{2}\right|\right]$$

(iii) दी गई रेखाएँ हैं

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

bx + ay = ab ३

ay = – bx + ab

$y = -\frac{b}{a}x + b$ ....(1)

रेखा (1) की प्रवणता (m1) = $-\frac{b}{a}$

अन्य रेखा, $\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 1$

$\Rightarrow \quad ax - by = ab$

$\Rightarrow \quad by = ax - ab$

$\Rightarrow \quad y = \frac{a}{b}x - a \qquad ....(2)$

रेखा (2) की प्रवणता $m_2 = \frac{a}{b}$

यहाँ $m_1 m_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = -1$

अतः दोनों रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं अर्थात् दोनों रेखाओं के मध्य कोण θ = 90°

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित सरल रेखाएँ समान्तर हैं।
(i) 2y = mx + c तथा 4y = 2mx
(ii) x cos α + y sin α = p तथा x + y tan α = 5 tan α

हल- (i) दी गई रेखाएँ

$$\Rightarrow \quad y = \frac{m}{2}x + \frac{c}{2} \qquad \ldots(1)$$

रेखा (1) की प्रवणता $m_1 = \frac{m}{2}$

अन्य रेखा, $4y = 2mx \qquad \ldots(2)$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2}{4}mx = \frac{m}{2}x$$

अत: रेखा (2) की प्रवणता $m_2 = \frac{m}{2}$

यहाँ $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$

अत: दोनों रेखाएँ समान्तर हैं।

(ii) दी गई रेखाएँ हैं-

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$

$y \sin \alpha = - x \cos \alpha + p.$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}x + \frac{p}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad y = -(\cot \alpha)x + p \operatorname{cosec} \alpha \qquad \ldots(1)$$

अत: रेखा (1) की प्रवणता

$m_1 = -\cot \alpha$

[$y = mx + c$ से तुलना करने पर]

अन्य रेखा

$$x + y \tan \alpha = 5 \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \quad y \tan \alpha = -x + 5 \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{\tan\alpha}x + \frac{5\tan\alpha}{\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad y = (-\cot \alpha)x + 5 \qquad \ldots(2)$$

रेखा (2) की प्रवणता

$m_2 = - \cot \alpha$

यहाँ $m_1 = m_2 = - \cot \alpha.$

अतः दोनों रेखाएँ समान्तर हैं।

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ जिनके समीकरण $4x + 5y + 7 = 0$ तथा $5x - 4y - 11 = 0$ है परस्पर लम्बवत् हैं।

हल- दी गई रेखाएँ हैं
$4x + 5y + 7 = 0$
$5y = -4x - 7$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{4}{5}x - \frac{7}{5} \qquad \ldots.(1)$$

रेखा (1) की तुलना $y = mx + c$ से करने पर,

प्रवणता $(m_1) = -\frac{4}{5}$ ....(2)

पुनः $5x - 4y - 11 = 0$

$$\Rightarrow \quad 4y = 5x - 11$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{5}{4}x - \frac{11}{4} \qquad \ldots.(3)$$

रेखा (3) की प्रवणता $(m_2) = \frac{5}{4}$ ....(4)

यहाँ $m_1 m_2 = \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = -1$

अतः दी गई रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं।

प्रश्न 4. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(i) बिन्दु (4, 5) से गुजरती है तथा $2x - 3y - 5 = 0$ रेखा के समान्तर है।
(ii) बिन्दु (1, 2) से गुजरती है तथा रेखा $4x + 3y + 8 = 0$ के लम्बवत् है।

(iii) रेखा $2x + 5y = 7$ के समान्तर है तथा बिन्दुओं (2, 7) तथा (-4, 1) को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु से होकर जाती है।
(iv) बिन्दुओं (-3, 7) तथा (5, -4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 4 : 7 के अनुपात में विभाजित करती है तथा इस पर लम्ब है।

हल- (i) दी गई रेखा है
$2x - 3y - 5 = 0$
$3y = 2x - 5$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \qquad \ldots.(1)$$

रेखा (1) की प्रवणता = $\frac{2}{3}$

($y = mx + c$ से तुलना करने पर)।
दिया है कि अभीष्ट रेखा दी गई रेखा के समान्तर है अतः अभीष्ट रेखा की प्रवणता (m) = $\frac{2}{3}$

तथा अभीष्ट रेखा (4.5) से गुजरती है तब रेखा का समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = \frac{2}{3}(x - 4)$

$3y - 15 = 2x - 8$

$2x - 3y + 7 = 0$

(ii) दी गई रेखा है

$4x + 3y + 8 = 0$

$3y = -4x - 8$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \qquad \ldots.(1)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = -\frac{4}{3}$

तब रेखा (1) के लम्बवत् रेखा की प्रवणता

$$(m) = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{(-4/3)}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{3}{4} \qquad \ldots.(2)$$

अत: बिन्दु (1, 2) से जाने वाली तथा प्रवणता $\frac{3}{4}$ वाली रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1)$$

$4y - 8 = 3x - 3$

$3x - 4y + 5 = 0$

(iii) बिन्दु (2, 7) व (-4, 1) का मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{7+1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-2}{2}, \frac{8}{2}\right)$$

= (-1, 4)

दी गई रेखा $2x + 5y = 7$

रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण

$2x + 5y = \lambda$

रेखा (2) यदि बिन्दु (-1, 4) से गुजरती है तब
$2(-1) + 5(4) = \lambda$
$\lambda = -2 + 20 = 18$ ....(3)

अतः बिन्दु (2, 7) व (-4, 1) के मध्य बिन्दु (-1, 4) से जाने वाली तथा रेखा $2x + 5y = \lambda$ के समान्तर रेखा का अभीष्ट समीकरण
$2x + 5y = 18$

(iv) बिन्दु (-3, 7) व (5, -4) को 4 : 7 में अन्त:विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$= \left(\frac{(4)(5) + (7)(-3)}{4+7}, \frac{(4)(-4) + (7)(7)}{4+7} \right)$$

$$= \left(-\frac{1}{11}, 3 \right)$$

बिन्दु (–3, 7) व (5, –4) को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$= \frac{-4-7}{5+3} = -\frac{11}{8}$$

बिन्दु (–3, 7) व (5, – 4) को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् रेखा की प्रवणता

$$= -\frac{1}{\left(-\frac{11}{8}\right)} = \frac{8}{11}$$

अत: अभीष्ट रेखा जो $\left(-\frac{1}{11}, 3 \right)$ से गुजरती है तथा

जिसकी प्रवणता $\frac{8}{11}$ है, का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad y - 3 = \frac{8}{11}\left(x + \frac{1}{11} \right)$$

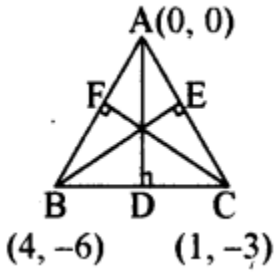
$$\Rightarrow \quad 11y - 33 = 8x + \frac{8}{11}$$

⇒ 121y – 363 = 88x + 8
⇒ 88 – 121y + 371 = 0

प्रश्न 5. एक त्रिभुज के शीर्ष (0, 0), (4, -6) और (1, -3) हैं, इन बिन्दुओं से त्रिभुज की सम्मुख भुजाओं पर डाले गये लम्बों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल-

माना त्रिभुज के शीर्ष A(0, 0), B(4, -6) व C(1, -3) हैं।
माना AD ⊥ BC, BE ⊥ CA, CF ⊥ AB
हमें AD, BE व CF के समीकरण ज्ञात करने हैं।



BC की प्रवणता

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-4}{-3-(-6)} = \frac{-3}{3} = -1$$

अत: BC के लम्बवत् रेखा AD की प्रवणता = $-\frac{1}{(-1)}$ = 1
अत: BC के लम्बवत् रेखा AD का समीकरण
$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = 1(x - 0)$
$y = x$
$y - x = 0$

इसी प्रकार, AB की प्रवणता

$$= \frac{-6-0}{4-0} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

तब AB के लम्बवत् रेखा CF का समीकरण

$$y - (-3) = -\frac{1}{(-3/2)}(x - 1)$$

$$\Rightarrow \quad y + 3 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow \quad 3y + 9 = 2x - 2$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 3y - 11 = 0$$ **उत्तर**

रेखा AC की प्रवणता $= \frac{-3-0}{1-0} = -3$

तब AC के लम्बवत् BE का समीकरण

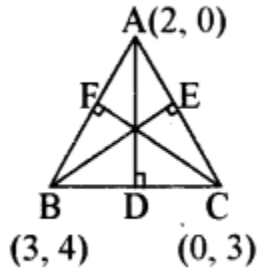
$$y - (-6) = -\frac{1}{(-3)}(x - 4)$$

$$\Rightarrow \quad y + 6 = \frac{1}{3}(x - 4)$$

$\Rightarrow 3y + 18 = x - 4$
$\Rightarrow x - 3y = 22$

प्रश्न 6. उस त्रिभुज का लम्ब केन्द्र ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (2, 0), (3, 4) और (0, 3) हैं।

हल-



माना त्रिभुज के शीर्ष A(2, 0), B(3, 4) व C(0, 3) हैं।
माना AD ⊥ BC, BE ⊥ CA, CF ⊥AB

तब, AD, BE तथा CF एक ही बिन्दु O से संगामी होते हैं जिसे लम्बकेन्द्र कहते हैं ।
लम्बकेन्द्र O के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए हम दो लम्बों AB व BE को ज्ञात करते हैं।

BC की प्रवणता $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-4}{0-3} = \frac{1}{3}$

तब AD की प्रवणता $= -\frac{1}{(1/3)} = -3 \quad (\because AD \perp BC)$

अतः BC के लम्बवत् रेखा AD का समीकरण
$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$
$\Rightarrow y - 0 = -3(x - 2)$
$\Rightarrow y = -3x + 6$
$\Rightarrow 3x + y = 6$ ....(1)

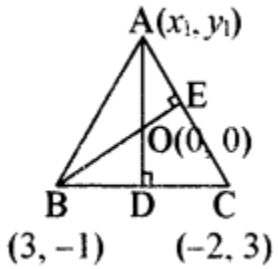
इसी प्रकार, AC की प्रवणता = $\frac{3-0}{0-2}$
$= \frac{3}{2}$

अतः AC के लम्बवत् रेखा BE का समीकरण
$\Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{-3/2}(x - 3)$
$\Rightarrow y - 4 = \frac{2}{3}(x - 3)$
$\Rightarrow 3y - 12 = 2x - 6$
$\Rightarrow 2x - 3y = -12 + 6$
$\Rightarrow 2x - 3y = -6$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर अभीष्ट लम्ब केन्द्र
$= \left(\frac{12}{11}, -\frac{30}{11}\right)$

प्रश्न 7. किसी त्रिभुज के दो शीर्ष (3, -1) तथा (-2, 3) हैं । त्रिभुज का लम्ब केन्द्र मूल बिन्दु पर है। तीसरे शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल-



माना त्रिभुज के शीर्ष $A(x_1, y_1)$, B(3, -1) तथा C(-2, 3) हैं तथा AD ⊥ BC, BE ⊥ AC

त्रिभुज ABC का लम्ब केन्द्र O(0, 0) है, जो AD व BE का प्रतिच्छेद बिन्दु
अत: AO ⊥ BC तथा BO ⊥ AC

तब (AO की प्रवणता) (BC की प्रवणता) = -1

$$(m_1 m_2 = -1 \text{ से})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_1 - 0}{x_1 - 0}\right)\left(\frac{3-(-1)}{-2-3}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_1}{x_1}\right)\left(\frac{4}{-5}\right) = -1$$

$$\Rightarrow 4y_1 = 5x_1$$

$$\Rightarrow 5x_1 - 4y_1 = 0 \quad \ldots.(1)$$

पुन: (BO की प्रवणता) (AC की प्रवणता) = –1

$$\Rightarrow \left(\frac{-1-0}{3-0}\right)\left(\frac{y_1 - 3}{x_1 + 2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\left(\frac{y_1 - 3}{x_1 + 2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow y_1 - 3 = 3(x_1 + 2)$$

$$\Rightarrow y_1 - 3 = 3x_1 + 6$$

$$\Rightarrow 3x_1 - y_1 + 9 = 0 \quad \ldots.(2)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर

$$x_1 = -\frac{36}{7}, y_1 = -\frac{45}{7}$$

अत: त्रिभुज के तीसरे शीर्ष के अभीष्ट निर्देशांक

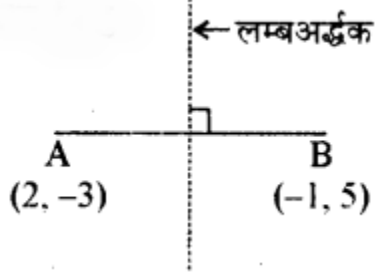
$$= \left(-\frac{36}{7}, -\frac{45}{7}\right)$$

प्रश्न 8. बिन्दुओं (2, -3) तथा (-1, 5) को मिलाने वाले रेखाखण्ड के लम्बे अर्द्धक का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल- बिन्दु (2, -3) व (-1, 5) का मध्य बिन्दु

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2-1}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$$



= $(\frac{1}{2}, 1)$

बिन्दुओं (2, -3) व (-1, 5) को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-3)}{-1-2} = \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3}$$

बिन्दुओं (2, -3) व (-1, 5) को मिलाने वाली रेखा का लम्ब अर्द्धक इनके मध्य बिन्दु $(\frac{1}{2}, 1)$ से गुजरता है तथा इसके लम्बवत् होता है। अतः अभीष्ट लम्ब अर्द्धक का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ से}$$

$$\Rightarrow \quad y - 1 = -\frac{1}{(-8/3)}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

[∵ प्रवणता $-\frac{8}{3}$ वाली रेखा के लम्बवत्

रेखा की प्रवणता $= -\frac{1}{(-8/3)}$]

$$\Rightarrow \quad y - 1 = \frac{3}{8}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 8y - 8 = 3x - \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 8y - 8 = \frac{6x-3}{2}$$

⇒ 16y – 16 = 6x – 3

⇒ 6x – 16y + 13 = 0

प्रश्न 9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सरल रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ पर, उस बिन्दु से जहाँ वह x-अक्ष से मिलती है, लम्ब है।

हल- दी गई रेखा है

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} - 1 = \frac{y}{b}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{b}{a}x - b \qquad \ldots(1)$$

इस रेखा की प्रवणता = $\frac{b}{a}$[y = mx + c से तुलना करने पर]

दी गई रेखा x-अक्ष पर जहाँ मिलती है वहाँ y = 0 होगा तब

$\frac{x}{a} - \frac{0}{b} = 1$

$\Rightarrow x = a$

अतः रेखा x-अक्ष को (a, 0) बिन्दुओं पर मिलती है।

अब प्रश्नानुसार अभीष्ट रेखा (a, 0) से जाती है तथा दी गई रेखा (1) के लम्बवत् है तब अभीष्ट रेखा का समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\Rightarrow \quad y - 0 = -\frac{1}{(b/a)}(x - a)$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{a}{b}(x - a)$$

$by = -ax + a^2$

$ax + by = a^2$

प्रश्न 10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा 2x + 3y + 11 = 0 के समान्तर है तथा अक्षों पर काटे गए अन्तखण्डों का योग 15 है।

हल- रेखा 2x + 3 + 11 = 0 के समान्तर रेखा का समीकरण

$2x + 3y + \lambda = 0$ ....(1)

$\Rightarrow 2x + 3 = -\lambda$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{(-\lambda)} + \frac{3y}{(-\lambda)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(-\lambda/2)} + \frac{y}{(-\lambda/3)} = 1 \qquad \text{....(2)}$$

यह रेखा का अन्त:खण्ड रूप है जहाँ अक्षों पर काटे गए

अन्त:खण्ड $-\frac{\lambda}{2}$ व $-\frac{\lambda}{3}$ हैं जिनका योग 15 दिया गया है।

अत:

$$-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{3} = 15$$

$$\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{3} = -15$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3\lambda + 2\lambda}{6} = -15$$

$$\Rightarrow \quad 5\lambda = -90$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{90}{5} = -18 \qquad \ldots(3)$$

λ = -18 समीकरण (1) में रखने पर अभीष्ट समीकरण
2x + 3y – 18 = 0

प्रश्न 11. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2, -3) से गुजरती हैं तथा सरल रेखा 3x – 2y = 4 से 45° का कोण बनाती हैं।

हल- ∵ एक दिये हुए बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली तथा दी गई रेखा y = mx + c के साथ दिया गया कोण α बनने वाली रेखाओं के समीकरण

$$y - y_1 = \frac{m + \tan\alpha}{1 - m\tan\alpha}(x - x_1) \qquad \ldots(1)$$

तथा

$$y - y_1 = \frac{m - \tan\alpha}{1 + m\tan\alpha}(x - x_1) \qquad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार यहाँ $(x_1, y_1) = (2, -3)$, α = 45°, ∴ tan α = tan 45 – 1 तथा m, रेखा 3x – 2 = 4 की प्रवणती है।

$$\therefore \quad m = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}} = \frac{-3}{(-2)} = \frac{3}{2}$$

इनके मान समीकरण (1) व (2) में रखने पर अभीष्ट रेखाओं के समीकरण

$$y - (-3) = \frac{\frac{3}{2} + 1}{1 - \frac{3}{2}(1)} - (x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y + 3 = \frac{5}{(-1)}(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y + 3 = -5x + 10$$

$$\Rightarrow \quad 5x + y - 7 = 0 \text{ उत्तर}$$

तथा $$y-(-3)=\frac{\frac{3}{2}-1}{1+\frac{3}{2}(1)}(x-2)$$

$$\Rightarrow \quad y+3=\frac{1}{5}(x-2)$$

5y + 15 = x – 2
5y – x + 17 = 0

प्रश्न 12. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (4, 5) से गुजरती हैं तथा रेखाओं 3x = 4y + 7 और 5y = 12x + 6 से समान कोण बनाती हैं।

हल- माना अभीष्ट रेखा का समीकरण है–
$y - y_1 = m(x - x_1)$
यहाँ $(x_1, y_1) = (4, 3)$ रखने पर

$y - 5 = m(x - 4)$ ....(1)
यहाँ m रेखाओं की प्रवणता है।
अब दी गई रेखाएँ हैं-

3x = 4y + 7 ....(2)
5y = 12x + 6 ....(3)

रेखा (2) की प्रवणता $m_1 = \frac{3}{4}$ ....(4)
[$y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$ अर्थात् y = mx + c में बदलने पर)
रेखा (3) की प्रवणता $m_2 = \frac{12}{5}$ ....(5)

प्रश्नानुसार अभीष्ट रेखा, दी गई रेखाओं (2) व (3) से समान कोण बनाती है। माना कि यह कोण θ है। तब

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| \text{ सूत्र से}$$

$$\tan\theta = \left|\frac{m-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}m}\right| = \left|\frac{m-\frac{12}{5}}{1+\frac{12}{5}m}\right|$$

$$\Rightarrow \qquad \tan\theta = \left|\frac{4m-3}{4+3m}\right| = \left|\frac{5m-12}{5+12m}\right|$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{4m-3}{4+3m}\right) = \pm\left(\frac{5m-12}{5+12m}\right) \qquad \ldots.(6)$$

+ve चिह्न लेने पर

$$\frac{(4m-3)}{4+3m} = \frac{5m-12}{5+12m}$$

$\Rightarrow (4m-3)(5+12m) = (5m-12)(4+3m)$

$\Rightarrow 20m + 48m^2 - 15 - 36m = 20m + 15m^2 - 48 - 36m$

$\Rightarrow \quad 48m^2 - 15m^2 = 15 - 48$

$\Rightarrow \quad 33m^2 = -33$

$\Rightarrow \quad m^2 = -1$ जो सम्भव नहीं है।

–ve चिह्न लेने पर

$$\left(\frac{4m-3}{4+3m}\right) = -\left(\frac{5m-12}{5+12m}\right)$$

$\Rightarrow \quad 63m^2 - 32m - 63 = 0$

$\Rightarrow \quad 63m^2 - 81m + 49m - 63 = 0$

$\Rightarrow \quad 9m(7m-9) + 7(7m-9) = 0$

$\Rightarrow \quad (7m-9)(9m+7) = 0$

$$\Rightarrow \qquad m = \frac{9}{7},\ m = -\frac{7}{9} \qquad \ldots.(7)$$

m के दोनों मान समीकरण (1) में रखने पर रेखाओं के अभीष्ट समीकरण

$$y - 5 = \frac{9}{7}(x-4)$$

$\Rightarrow \quad 9x - 7y = 1$ उत्तर

$$y - 5 = -\frac{7}{9}(x-4)$$

$\Rightarrow \quad 7x + 9y = 73$

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि उस रेखा का समीकरण निम्नलिखित होगा जो मूल बिन्दु से होकर गुजरती है तथा रेखा y = mx + c से θ कोण बनाती है।

$$\frac{y}{x} = \frac{m + \tan\theta}{1 - m\tan\theta}$$

हल-

माना कि मूलं बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण है
$y = m_1x$ .....(1)
तथा दी गई रेखा $y = mx + c$ .....(2)
माना कि इन दोनों रेखाओं के बीच कोण θ है।

$$\therefore \tan\theta = \pm \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$$

या $(1 + m_1m)\tan\theta = \pm (m_1 - m)$
धनात्मक चिह्न लेने पर
$(1 + m_1m)\tan\theta = m_1 - m$

या $\tan\theta + m_1m\tan\theta = m_1 - m$
या $m + \tan\theta = m_1 - m_1m\tan\theta$
या $m + \tan\theta = m_1(1 - m\tan\theta)$

या $$m_1 = \frac{m + \tan\theta}{1 - m\tan\theta} \quad .....(3)$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर
$(1 + m_1m)\tan\theta = -(m_1 - m)$

$\tan\theta + m_1m\tan\theta = -m_1 + m$
$\tan\theta - m = -m_1 - m_1m\tan\theta$
$\tan\theta - m = -m_1(1 + m\tan\theta)$
$m - \tan\theta = m_1(1 + m\tan\theta)$

$\therefore$ $$m_1 = \frac{m - \tan\theta}{1 + m\tan\theta} \quad .....(4)$$

अत: समीकरण (3) तथा (4) से स्पष्ट है कि

$$m_1 = \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m\tan\theta}$$

अतः सरल रेखा का अभीष्ट समीकरण प्राप्त करने के लिए m_1 का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$y = \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m\tan\theta} \cdot x$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x} = \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m\tan\theta} \quad \textbf{(इति सिद्धम्)}$$

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु ($a\cos^3\theta, a\sin^3\theta$) से गुजरने वाली तथा सरल रेखा $x\sec\theta + y\,\text{cosec}\,\theta = a$ पर लम्ब सरल रेखा का समीकरण $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ है।

हल- प्रश्नानुसार दी गई सरल रेखा
$x\sec\theta + y\,\text{cosec}\,\theta = a$ पर लम्ब रेखा का कोई समीकरण

$x\,\text{cosec}\,\theta - y\sec\theta = k$ होगा (जहाँ k स्वेच्छ है) ....(1)
अब यदि रेखा (1) बिन्दु ($a\cos^3\theta, a\sin^3\theta$) से गुजरती है तो $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ समीकरण (1) को सन्तुष्ट करेगी।

अतः $a\cos^3\theta \times \text{cosec}^3\theta - a\sin^3\theta\sec\theta = k$

$$\Rightarrow \quad k = a\left(\frac{\cos^3\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= a\left(\frac{\cos^4\theta - \sin^4\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= a\left[\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\right]$$

$$= a\left(\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

k के मान समीकरण (1) में रखने पर रेखा को अभीष्ट समीकरण होगा

$$x\,\text{cosec}\,\theta - y\sec\theta = a\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\sin\theta} - \frac{y}{\cos\theta} = \frac{a\cos 2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

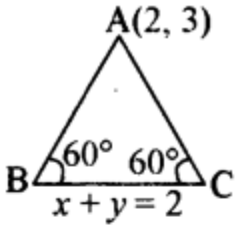
$$\Rightarrow \quad \frac{x\cos\theta - y\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{a\cos 2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta}$$

यही सिद्ध करना था

प्रश्न 15. एक समबाहु त्रिभुज के एक शीर्ष के निर्देशांक (2, 3) हैं तथा सम्मुख भुजा का समीकरण x + y = 2 है। शेष भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल- एक दिए हुए बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली तथा दी गई रेखा $y = mx + c$ के साथ दिया गया कोण α बनाने वाली रेखाओं के समीकरण



$$y - y_1 = \frac{m + \tan\alpha}{1 - m\tan\alpha}(x - x_1) \qquad .....(1)$$

तथा $$y - y_1 = \frac{m - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}(x - x_1) \qquad .....(2)$$

यहाँ $(x_1, y_1) = (2, 3)$

$\therefore$ $\alpha = 60°$

(चूँकि समबाहु त्रिभुज में प्रत्येक कोण 60° होता है।)

$\therefore$ $\tan\alpha = \tan 60° = \sqrt{3}$

m, रेखा $x + y = 2$ प्रवणता है, अत: $m = -1$

($y = mx + c$ से)

इनके मान समीकरण (1) व (2) में रखने पर, अभीष्ट रेखाओं के समीकरण

$$y - 3 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{1 - (-1)\sqrt{3}}(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y - 3 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y - 3 = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)}(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y - 3 = \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{3 - 1}(x - 2)$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y - 3 = (2 - \sqrt{3})(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y - 3 = (2\sqrt{3})x - 4 + 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (2-\sqrt{3})x - 1 = 1 - 2\sqrt{3}$$

पुनः $$y - 3 = \frac{-1-\sqrt{3}}{1+(-1)\sqrt{3}}(x - 2)$$

हल करने पर, $(2 + \sqrt{3})x - y = 1 + 2\sqrt{3}$

प्रश्न 16. उन दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, -2) से गुजरती हैं तथा रेखा $x + \sqrt{3}y = 1$ से 60° का कोण बनाती है।

हल- दी गई रेखा $x + \sqrt{3}y = 1$ की प्रवणता $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$(x_1, y_1) = (3, -2)$

$\alpha = 60° \Rightarrow \tan 60° = \sqrt{3}$
तब एक दिए हुए बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली तथा दी गई रेखा $y = mx + c$ के साथ कोण α बनाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{m + \tan\alpha}{1 - m\tan\alpha}(x - x_1) \qquad \ldots.(1)$$

तथा $$y - y_1 = \frac{m - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}(x - x_1) \qquad \ldots.(2)$$

अतः अभीष्ट रेखाएँ

$$y - (-2) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}}(x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad y + 2 = \frac{-1+3}{2\sqrt{3}}(x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = x - 3$$

$$\Rightarrow \boxed{x - \sqrt{3}y - 3 - 2\sqrt{3} = 0}$$

पुनः $$y - (-2) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3})}(x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad y + 2 = \frac{-1-3}{0\left(\sqrt{3}\right)}(x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -4(x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x - 3 = 0}$$

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. उस सरल रेखा का समीकरण जो y-अक्ष के समान्तर तथा y-अक्ष के बायीं ओर 5 इकाई की दूरी पर है

(A) y = 5
(B) x = 5
(C) x = − 5
(D) y = − 5

हल : (C)

प्रश्न 2. उस रेखा का समीकरण जो बिन्दु (3, – 4) से होकर गुजरती है। तथा x-अक्ष के समान्तर है

(A) x = 3
(B) y = − 4
(C) x + 3 = 0
(D) y − 4 = 0

हल : (B)

प्रश्न 3. y-अक्ष की प्रवणता है

(A) 1
(B) 0
(C) ∞
(D) π/2

हल : (C)

प्रश्न 4. समीकरण

$$x \times \frac{1}{2} + y \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5$$

द्वारा निरूपित सरल रेखा निम्न रूप में है-

(A) सममित रूप
(B) झुकाव रूप
(C) अन्त:खण्ड रूप
(D) लम्ब रूप

हल : (D)

प्रश्न 5. सरल रेखा 3x – 4y = 7 के समान्तर और मूल बिन्दु से गुजरने वाले रेखा का समीकरण है-

(A) 3x – 4y = 1
(B) 3x – 4y = 0
(C) 4x – 3y = 1
(D) 3y – 4x = 0

हल : (B)

प्रश्न 6. मूल बिन्दु से सरल रेखा x + √3y = 1 पर डाले गए लम्ब की लम्बाई p है तो p का मान है

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

हल : (B)

प्रश्न 7. यदि रेखाएँ y = mx + 5 तथा 3x + 5y = 8 परस्पर लम्ब हैं, तो m का मान है-

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{5}{3}$ (C) $-\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

हल : (A)

प्रश्न 8. सरल रेखा 3x – 4y + 7 = 0 पर लम्ब और बिन्दु (1, -2) में से गुजरने वाली रेखा का समीकरण होगा

(A) 4x + 3y – 2 = 0
(B) 4x + 3y + 2 = 0
(C) 4x – 3y + 2 = 0
(D) 4x – 3y – 2 = 0

हल : (B)

प्रश्न 9. रेखाओं y = – 2 तथा y = x + 2 के मध्य का अधिक कोण है-

(A) 145°
(B) 150°
(C) 135°
(D) 120°

हल : (C)

प्रश्न 10. रेखा 3x – 4y – 4 = 0 द्वारा x-अक्ष तथा y-अक्ष पर काटे गये अन्त:खण्डों की लम्बाई है-

(A) $\frac{4}{3}$ और -1 (B) $\frac{4}{3}$ और 1

(C) $\frac{3}{4}$ और -1 (D) $\frac{3}{4}$ और 1

हल : (A)

प्रश्न 11. बिन्दु (1, 0) तथा (-2,√3) को मिलने वाली रेखा x-अक्ष के साथ θ कोण बनाती है, जो tan θ का मान है

(A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{-\sqrt{3}}$

हल : (D)

प्रश्न 12. रेखा के समीकरण 2x + √3y – 4 = 0 के झुकाव रूप में बदलने पर झुकाव रूप में प्रयुक्त अचर राशि के मान हैं

(A) $m = 2, c = 4$ (B) $m = \frac{2}{\sqrt{3}}, c = -\frac{4}{\sqrt{3}}$

(C) $m = \frac{\sqrt{3}}{2}, c = 2$ (D) $m = \frac{-2}{\sqrt{3}}, c = \frac{4}{\sqrt{3}}$

हल : (D)

प्रश्न 13. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2, 3) से गुजरती है तथा x-अक्ष से 45° का कोण बनाती है।

हल- रेखा द्वारा x-अक्ष से बनाया गया कोण = 45°

अतः रेखा का झुकाव = m = tan 45° = 1

चूँकि रेखा (2, 3) से होकर जाती है अतः बिन्दु झुकाव रूप में रेखा का समीकरण ।
⇒ $y - y_1 = m(x - x_1)$
⇒ $y - 3 = 1(x - 2)$

⇒ $y - 3 = x - 2$
⇒ $y = x - 2 + 3$
⇒ $x - y + 1 = 0$

प्रश्न 14. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (-3, 2) से गुजरती है तथा अक्षों से बराबर तथा विपरीत चिह्नों वाले अन्त:खण्ड काटती है।

हल- माना सरल रेखा का समीकरण (अन्त:खण्ड रूप) है-
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ....(1)

प्रश्नानुसार यह रेखा अक्षों से बराबर तथा विपरीत चिह्न वाले अन्त:खण्ड काटती है तब
$a = -b$ ....(2)

समीकरण (1) वे (2) से।
$\frac{x}{a} + \frac{y}{(-a)} = 1$
⇒ $x - y = a$ ....(3)

पुनः रेखा (-3, 2) से गुजरती है अतः समीकरण (3) से
$-3 - 2 = a$
⇒ $a = -5$

यह मान समीकरण (3) में रखने पर, सरल रेखा का अभीष्ट समीकरण
$x - y = -5$
या $x - y + 5 = 0$

प्रश्न 15. यदि मूल बिन्दु से सरल रेखा $4x + 3y + a = 0$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई 2 हो तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल- दी गई रेखा है
$4x + 3y + a = 0$
⇒ $4x + 3y = -a$

⇒ $-4x - 3y = a$ ....(1)
समीकरण (1) को अभिलम्ब रूप में बदलने के लिए

$$\sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

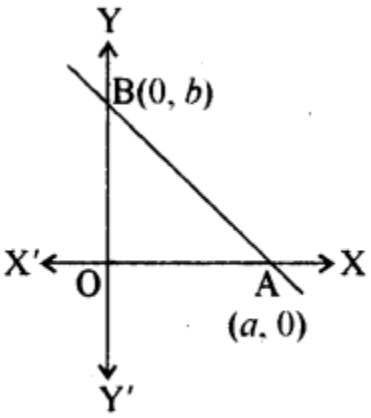
से दोनों पक्षों में भाग देने पर

$$-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y = \frac{a}{5}$$

तब मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई = $\frac{a}{5}$
परन्तु दिया है, $\frac{a}{5}$ = 2
⇒ a = 10

प्रश्न 16. यदि किसी रेखा का अक्षों के मध्य का अन्त:खण्ड बिन्दु (5, 2) पर समद्विभाजित होता है, तो रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।
हल- अन्त:खण्ड रूप में रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



यह रेखा अक्षों को A तथा B पर मिलती है तब A के निर्देशांक (a, 0) तथा B के निर्देशांक (0, b) होगा।
प्रश्नानुसार अक्षों के मध्य को

अन्त:खण्ड अर्थात् AB, बिन्दु (5, 2) पर समद्विभाजित होता है । अतः

$$(5, 2) = \left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (5, 2) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2} = 5 \text{ व } \frac{b}{2} = 2$$

⇒ a = 10, b = 4
अतः रेखा का अभीष्ट समीकरण

$\frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1$
⇒ 2x + 5 = 20

प्रश्न 17. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (0, 1) से होकर जाती है तथा रेखा द्वारा x-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड y-अक्ष पर काटे गये अन्त:खण्ड का तिगुना हो ।

हल- अन्त:खण्ड रूप में रेखा का समीकरण
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ....(1)

प्रश्नानुसार,
x-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड = 3 x y-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड

⇒ a = 3b ....(2)

समी. (1) व (2) से

$$\frac{x}{3b} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x + 3y}{3b} = 1$$

x + 3y = 3b ....(3)

पुनः अभीष्ट रेखा (0, 1) से जाती है तब यह बिन्दु रेखा के समीकरण (3) को सन्तुष्ट करेगा तब
0 + 3(1) = 3b
⇒ 3b = 3

⇒ b = 1 ....(4)
समीकरण (3) व (4) से रेखा का अभीष्ट समीकरण
x + 3y = 3(1)
या x + 3y = 3

प्रश्न 18. सरल रेखाएँ y = 2mx + c एवं 2x – y + 5 = 0 परस्पर समान्तर एवं लम्बवत् हों तो m के मान ज्ञात कीजिए।

हल- दी गई रेखाएँ हैं
y = 2mx + c ....(1)

दूसरी रेखा 2x – y + 5 = 0

y = 2x + 5 ….(2)
रेखा (1) व (2) यदि समान्तर है तब 2m = 2
m = 1

रेखा (1) व (2), यदि लम्बवत् है तब
(2m)(2) = – 1
4m = – 1 [m1m2 = -1]
m = $-\frac{1}{4}$

प्रश्न 19. मूल बिन्दु से सरल रेखा 4x + 3y + a = 0 पर डाले गये लम्ब की लम्बाई 2 हो तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल- दी गई रेखा है
4x + 3y + a = 0
⇒ 4x + 3y = – a

⇒ – 4x – 3y = a ….(1)
समीकरण (1) को अभिलम्ब रूप में बदलने के लिए

$$\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$$

से दोनों पक्षों में भाग देने पर

$$-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y=\frac{a}{5}$$

तब मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई = $\frac{a}{5}$
परन्तु दिया है, $\frac{a}{5}$ = 2
⇒ a = 10

प्रश्न 20. मूल बिन्दु से रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई p हो तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

हल- दी गई रेखा है-

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

bx + ay = ab ….(1)
रेखा (1) को अभिलम्बे रूप में बदलने के लिए $\sqrt{b^2+a^2}$ से दोनों पक्षों में भाग देते हैं ।

$$\frac{bx}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{....(2)}$$

समीकरण (2) रेखा का अभिलम्ब रूप x cos α + y sin α = p है तब मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$= p = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \qquad p^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a^2}{a^2b^2}+\frac{b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} = \frac{1}{p^2}$$ **इतिसिद्धम्**