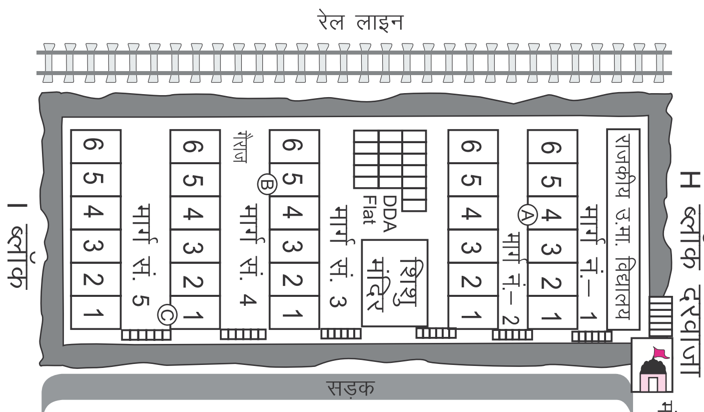
अध्याय 12
रैखिक आलेख

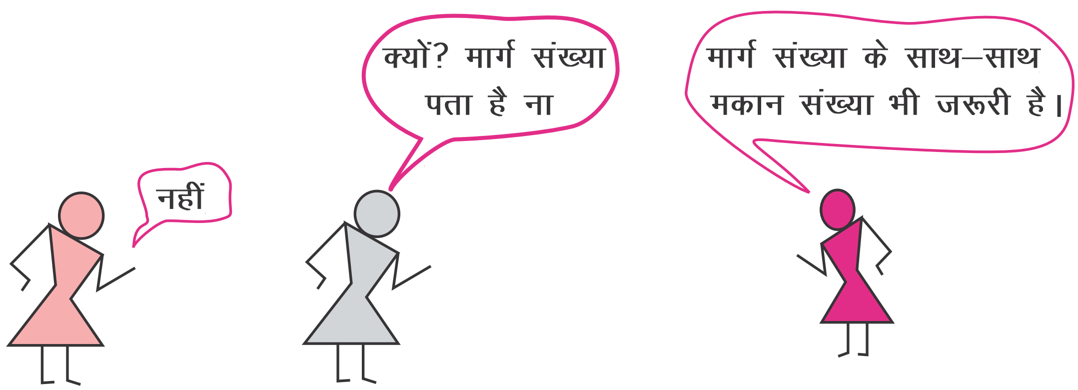
12.1 आप पिछली कक्षाओं में संख्या रेखा के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। संख्या रेखा पर एक बिन्दु अथवा अन्य बिन्दु की स्थिति का निर्धारण तथा उस बिन्दु की स्थिति की व्याख्या की जाती है परन्तु हमारे दैनिक जीवन में ऐसी कई स्थितियाँ आती है, जब हमें किसी बिन्दु की स्थिति निश्चित करने के लिए एक से अधिक रेखाओं के संदर्भ में उसकी स्थिति की व्याख्या करनी पड़ती है।

गतिविधि 1 निम्न स्थितियों पर विचार कीजिए।



चित्र 12.1

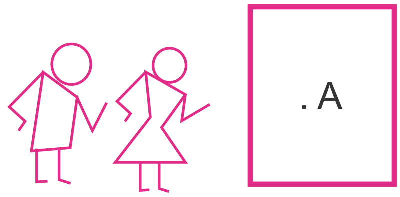
चित्र 12.1 में एक कॉलोनी का नक्शा दिया गया है जिसमें प्रत्येक मार्ग पर 6-6 मकान बने हैं। आपके रिश्तेदार इस कॉलोनी में रहते हैं। आपको बताया गया कि वे मार्ग संख्या 2 पर रहते हैं। क्या आप उनके घर का पता सरलता से बता सकते हैं ?



चित्र में A उस मकान को दर्शाता है जो मार्ग संख्या 1 पर है और उसकी संख्या 4 है। इसी प्रकार B उस मकान को दर्शाता है जो मार्ग संख्या 3 पर है उसकी संख्या 5 है। अतः किसी स्थान की सही स्थिति पता लगाने के लिए दो स्वतन्त्र सूचनाओं की आवश्यकता होती है।

गतिविधि 2

रीता और श्याम साथ में खड़े हैं। रीता ने एक कागज लिया और उस पर एक बिन्दु A अंकित किया और श्याम से पूछा कि बिन्दु A की स्थिति बताओ।



चित्र 12.2

श्याम – यह कागज के ऊपर की ओर बाईं तरफ स्थित है।

रीटा – इससे तो बिन्दु A की स्थिति स्पष्ट नहीं होती है। इसके लिए यह भी बताना होगा कि बाईं ओर से कितनी दूर व नीचे से कितना ऊपर स्थित है।

श्याम – (स्केल से नापते हुए) अच्छा बाईं ओर से 2 सेमी व नीचे से 8 सेमी ऊपर स्थित है।

रीटा – हाँ अब बिन्दु की स्थिति सही पता लग पाएगी।

अध्यापक – इसके लिए हम दो नियत रेखाओं अर्थात् कागज की बाईं कोर और कागज की सबसे नीचे वाली रेखा से बिन्दु की स्थिति नियत करते हैं।

गतिविधि 3

दिए गए चित्र में एक खेल के मैदान में व्यायाम प्रदर्शन के लिए चयनित 30 विद्यार्थियों की अपने नियत स्थान पर खड़े होने की स्थिति दिखाई गई है। इन विद्यार्थियों की स्थिति का ठीक–ठीक निर्धारण निम्नलिखित तीन सूचनाओं की सहायता से किया जा सकता है–

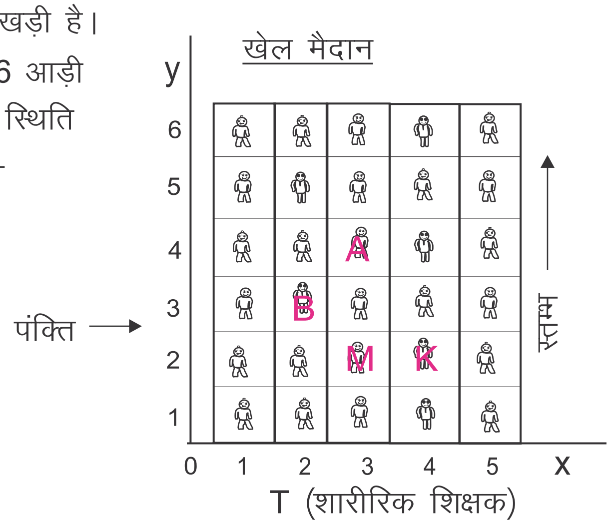
(i) शारीरिक शिक्षक की स्थिति T

(ii) वह उर्ध्वाधर स्तम्भ जिसमें वह खड़ा/खड़ी है।

(iii) वह क्षैतिज पंक्ति जिसमें वह खड़ा/खड़ी है।

शारीरिक शिक्षक के सामने 5 खड़े स्तम्भ एवं 6 आड़ी पंक्तियाँ हैं और उसे विद्यार्थी A, B, M, K की स्थिति बतानी है तो वो इन्हें इस प्रकार व्यक्त करेगा–

A → 3, 4
B → 2, 3
M → 3, 2
K → 4, 2



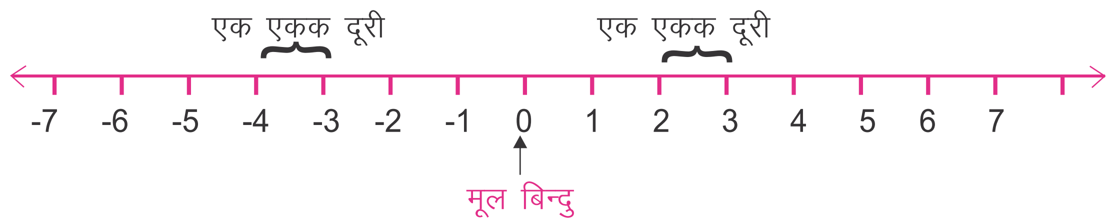
आकृति 12.3

यहाँ यह ध्यान देना आवश्यक है कि पहली संख्या स्तम्भ को व दूसरी संख्या पंक्ति को प्रदर्शित करती है। विद्यार्थी A की स्थिति को ध्यान से देखें वह तीसरे स्तम्भ और चौथी पंक्ति में खड़ा है इसी तरह B, M व K की स्थिति को भी ध्यान से देखें।

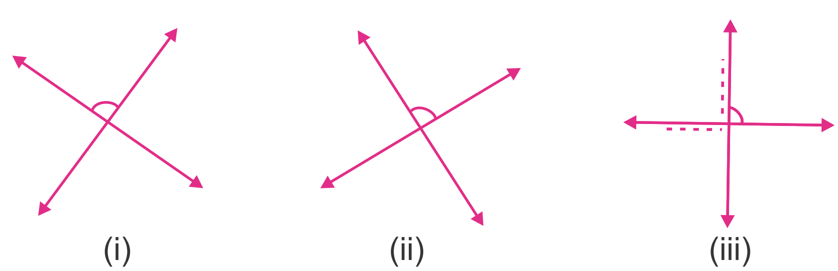
उपर्युक्त उदाहरण से आपने यह देखा कि एक तल पर रखी हुई किसी वस्तु की स्थिति को दो लम्ब रेखाओं की सहायता से निरूपित किया जा सकता है। यदि वस्तु एक बिन्दु के रूप में है तो हमें सबसे नीचे वाली रेखा से और कागज की बाईं कोर से बिन्दु की दूरी ज्ञात होना आवश्यक होता है। व्यायाम प्रदर्शन के लिए खड़े होने की योजना के सम्बन्ध में हमें स्तम्भ और पंक्तियों की संख्या को जानना आवश्यक होता है।

12.2 कार्तीय पद्धति

संख्या रेखा पर एक नियत बिन्दु से दूरियों को एक दिशा में धनात्मक और दूसरी दिशा में ऋणात्मक अंकित किया जाता है। उस बिन्दु को जहाँ से दूरियाँ अंकित की जाती है मूल बिन्दु कहा जाता है। एक रेखा पर समान दूरियों पर बिन्दुओं को अंकित करने के लिए हम संख्या रेखा का प्रयोग संख्याओं को निरूपित करने के लिए करते हैं। यदि एक एकक दूरी संख्या '1' को निरूपित करती है तो '3' एकक दूरी, संख्या '3' को निरूपित करेगी जहाँ '0' मूल बिन्दु है।
देखें चित्र–



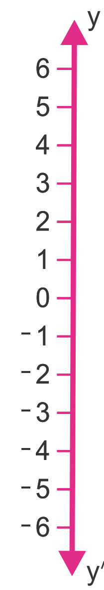
दकार्ते ने एक तल पर एक दूसरे पर लम्ब दो रेखाओं को खींचने और इन रेखाओं के सापेक्ष तल पर बिन्दुओं का स्थान निर्धारण करने का विचार प्रस्तुत किया। लम्ब रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती हैं जैसा कि आकृति 12.2 (i), (ii), (iii) में दिखाया गया है। लेकिन जब हम इस अध्याय में एक तल में स्थित एक बिन्दु का स्थान निर्धारण करने के लिए दो रेखाएँ लेंगे, तो एक रेखा क्षैतिज होगी और दूसरी रेखा उर्ध्वाधर, जैसा कि आकृति (iii) में दिखाया गया है–



आकृति 12.2

वास्तव में हम इन रेखाओं को इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं! दो संख्या रेखाएँ लीजिए और उन्हें X′X और Y′Y का नाम दीजिए। X′X को क्षैतिज रखिए। देखिए आकृति (i) और इस पर

ठीक उसी प्रकार संख्याएँ लिखिए जैसा कि संख्या रेखा पर लिखी जाती है। ये ही सभी क्रियाएँ आप Y′Y के साथ कीजिए (आकृति (ii)) अंतर केवल यही है कि Y′Y क्षैतिज नहीं है अपितु उर्ध्वाधर है।



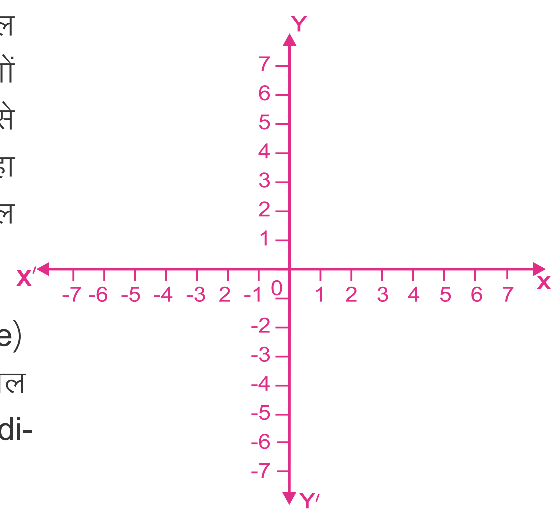
(ii)

(i)

दोनों रेखाओं का संयोजन इस प्रकार कीजिए कि ये दोनों रेखाएँ एक दूसरे को मूलबिन्दू पर काटती हों (आकृति–iii) क्षैतिज रेखा X'X को X अक्ष तथा उर्ध्वाधर रेखा Y′Y को Y अक्ष कहा जाता है। वह बिन्दु जहाँ X' X और Y' Y एक दूसरे को काटती है उसे मूल बिन्दु (Origin) कहा जाता है और इसे O से प्रकट किया जाता है। क्योंकि धनात्मक संख्याएँ OX और OY की दिशाओं में स्थित है इसलिए OX और OY को क्रमशः X अक्ष और Y अक्ष की धनात्मक दिशाएँ कहा जाता है। इसी प्रकार OX' और OY' को X–अक्ष और Y–अक्ष की ऋणात्मक दिशाएँ कहा जाता है।

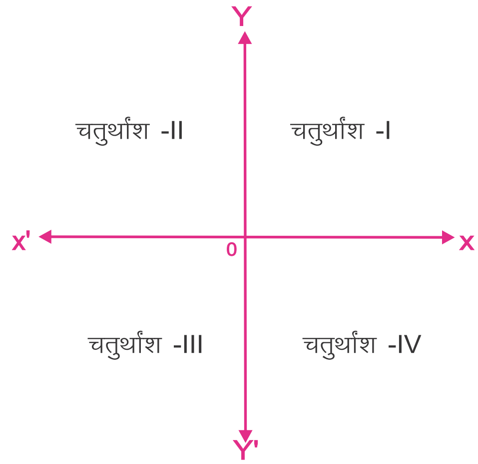
आकृति (iii) में हम देखते हैं कि ये दोनों अक्ष तल को चार भागों में विभाजित करते हैं। इन चार भागों को चतुर्थांश (Quadrants) कहा जाता है। OX से वामावर्त दिशा में इन्हें I, II, III, IV चतुर्थांश कहा जाता है (देखिए आकृति (iv)) इस प्रकार, इस तल में दोनों अक्ष और चारों चतुर्थांश सम्मिलित हैं।

इस तल को कार्तीय तल (Cartesian Plane) या निर्देशांक तल (Coordinate Plane) या xy तल (xy Plane) तथा अक्षों को निर्देशांक अक्ष (Coordinate axis) कहा जाता है।



(iii)

x– अक्ष, y–अक्ष तथा मूल बिन्दू o को संयुक्त रूप से निर्देश फ्रेम कहते हैं।

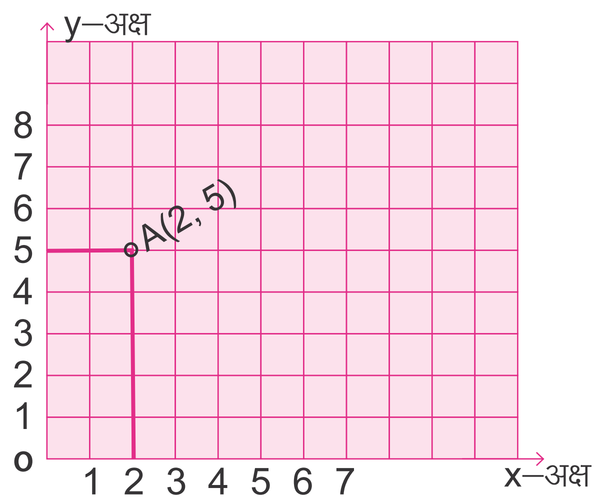


(iv)

12.3 निर्देशांक

कल्पना कीजिए आप किसी स्टेडियम में क्रिकेट मैच देखने जाते हैं और अपनी आरक्षित सीट पर पहुँचना चाहते हैं। इसके लिए आपको दो संख्याएँ चाहिए। पहली पंक्ति संख्या तथा दूसरी स्तम्भ संख्या। बिन्दु A (2,5) के स्थान का निर्धारण बाएँ किनारे से 2 इकाई और निचले किनारे से 5 इकाई है। वर्गांकित कागज पर संख्या 2, बिन्दु का x–निर्देशांक तथा 5, y –निर्देशांक कहलाता है। इस प्रकार हम कहते हैं कि (2, 5) बिन्दु के निर्देशांक हैं। किसी बिन्दु की y–अक्ष से लम्बवत दूरी को उस बिन्दु का भुज कहते हैं। इसी प्रकार किसी बिन्दु की x–अक्ष से लम्बवत् दूरी को उस बिन्दु की कोटि कहते हैं इस प्रकार बिन्दु A की भुज 2 और कोटि 5 है।

निर्देशांक लिखते समय छोटे कोष्ठक ( ) से दर्शाते हैं फिर पहले भुज तथा अल्प विराम (,) लगाकर कोटि लिखते हैं। इस प्रकार बिन्दु के निर्देशांक (x, y) हैं।

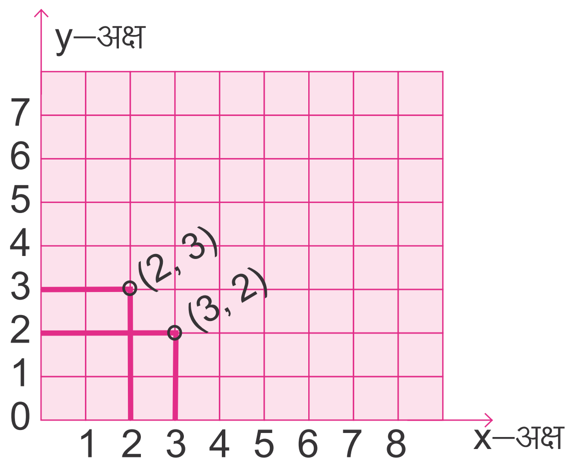


आलेख 12.1

मूल बिन्दू के लिए भुज 0 (शून्य) तथा कोटि 0 (शून्य) होता है तथा मूल बिन्दु के निर्देशांक (0, 0) लिखते हैं। निर्देशांक (x, y) तथा (y, x) समान नहीं है तथा वह कार्तीय तल पर अलग अलग बिन्दुओं को निरूपित करते हैं।

यह भी कीजिए–

एक आलेख में बिन्दु (2, 3) अंकित कीजिए। क्या यह वही बिंदु है जो (3, 2) को दर्शाता है?



आलेख 12.2

समीर– दोनों बिन्दु के स्थान अलग – अलग हैं।

करो और सीखो

(1) आलेख 12.3 देखकर निम्न बिन्दुओं की स्थिति के लिए उपयुक्त वर्णाक्षर चुनिए।

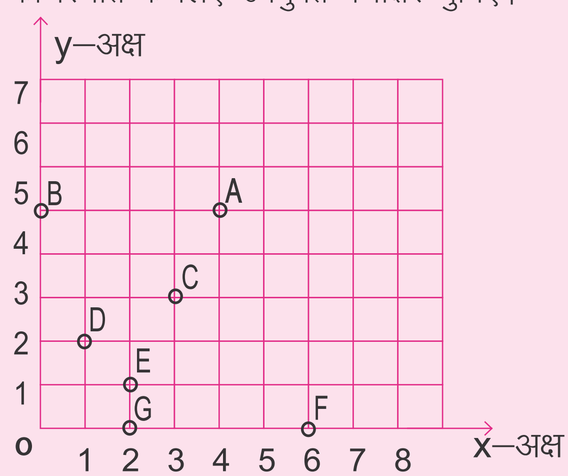
(i) (2, 1)

(ii) (0, 5)

(iii) (2, 0)

(iv) बिन्दु A के निर्देशांक

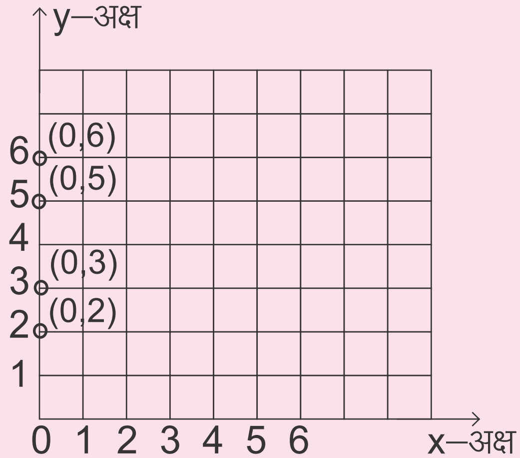
(v) बिन्दु F के निर्देशांक



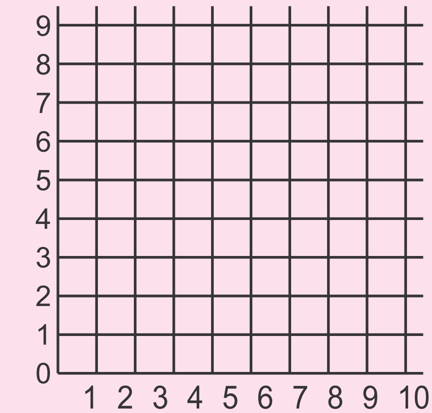
आलेख 12.3

(2)

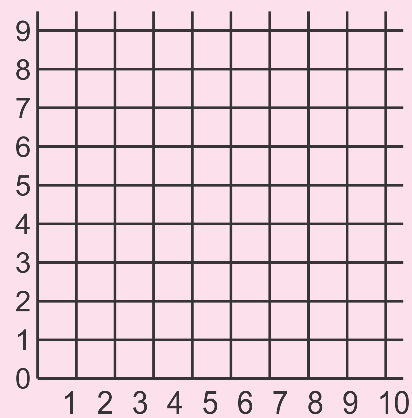
निम्न निर्देशांकों को वर्गांकित कागज पर अंकित कीजिए और देखिए क्या ये सभी सरल रेखा में हैं। अगर हैं तो रेखा को नाम दीजिए। **(आलेख 12.4 (i)(ii)(iii)(iv))**



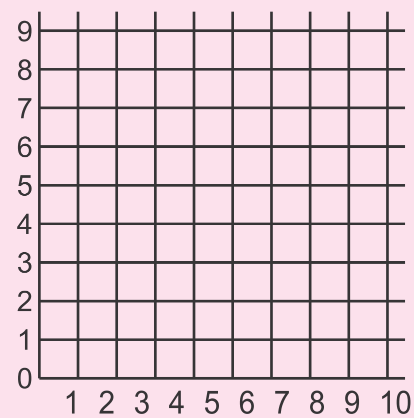
(i) (0,2); Q(0,5); R(0,6); S(0,3)



(ii) A(1,1); B(1,2); C(1,3); D(1,4)



(iii) K(1,3); L(2,3); M(3,3); N(4,3)

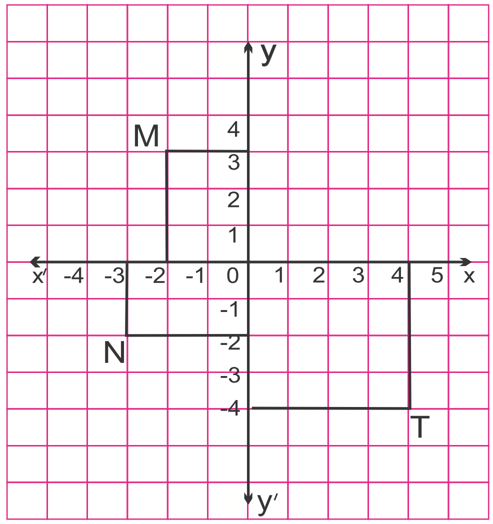


(iv) W(2,6);X(3,5); Y(5,3); Z(6,2)

आलेख 12.4

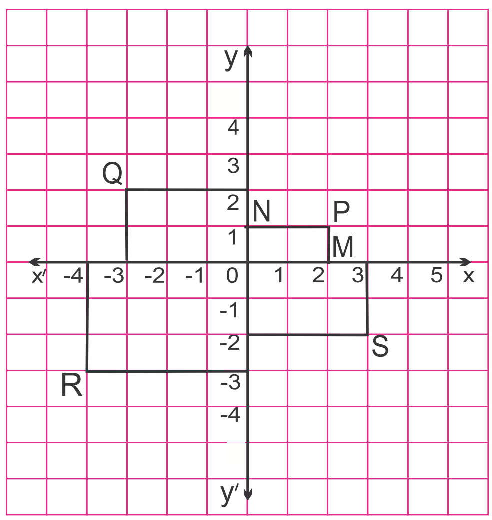
प्रश्नावली 12.1

1. नीचे दिए आलेख 12.5 को देखकर रिक्त स्थानों में लिखिए।
   (i) बिन्दु M की x–अक्ष से दूरी......................... इकाई है।
   (ii) बिन्दु M की y–अक्ष से दूरी .... इकाई है।
   (iii) बिन्दु N की y–अक्ष से दूरी ....इकाई है।
   (iv) बिन्दु T.................चतुर्थांश में अंकित है।
   (v) बिन्दु T की x–अक्ष से दूरी ....इकाई है।



आलेख 12.5

2. निम्नांकित आलेख 12.6 में अंकित बिन्दुओं को देखकर रिक्त स्थानों को भरिए।



आलेख 12.6

(i) बिन्दु P का भुज .... और कोटि .... है अतः P के निर्देशांक (................,................) है।

(ii) बिन्दु Q का भुज .... और कोटि .... है अतः Q के निर्देशांक (...........,...........) है।

(iii) बिन्दु R का x निर्देशांक ...... और y निर्देशांक .... है, अतः R के निर्देशांक (.........,.........) है।

(iv) बिन्दु S का x निर्देशांक .... और y निर्देशांक .... है अतः S के निर्देशांक (........,.........) है।

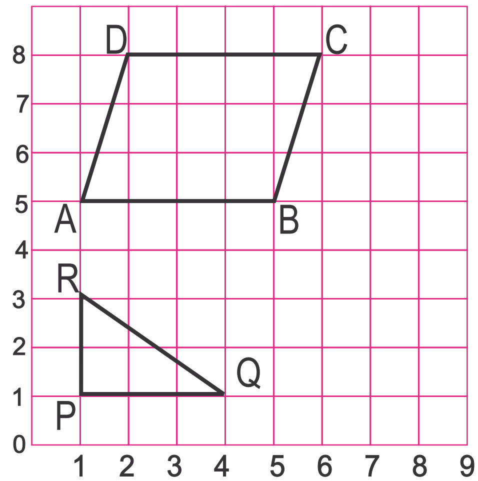
3. निम्न बिंदुओं को वर्गांकित कागज पर अंकित कीजिए और जाँचिए कि क्या वे सभी एक सरल रेखा पर स्थित हैं?

(i) A (1,1); B(1,2); C(1,3); D(1,4)

(ii) K (1,3); L(5,3); M(5,5); N(1,5)

(iii) P (2,6); Q(5,5); Y(5,3); Z(6,3)

4. ग्राफ पेपर पर निम्नलिखित **आलेख** 12.7 बनाकर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर लिखिए।



आलेख 12.7

(i) समान्तर चतुर्भुज ABCD के शीर्षों के निर्देशांक लिखिए तथा भुजा AB तथा DC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(ii) त्रिभुज PQR के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए तथा आधार PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए

5. प्रत्येक कथन के सामने सत्य या असत्य लिखिए –

(i) ग्राफ पेपर पर बिन्दु की स्थिति को संख्या युग्म द्वारा दर्शाया जाता है।

(ii) रैखिक आलेख समय के अंतरालों के साथ आँकड़ों में परिवर्तन दर्शाता है।

(iii) कोई बिंदु जिसका x–निर्देशांक शून्य है तथा y–निर्देशांक शून्येत्तर है y–अक्ष पर स्थित होता है।

(iv) कोई बिन्दु जिसका y–निर्देशांक शून्य है तथा x- निर्देशांक 5 है, y अक्ष पर स्थित होगा।

(v) मूल बिन्दु के निर्देशांक (1, 1) होते हैं।

कुछ अनुप्रयोग

दैनिक जीवन में आपने देखा होगा कि किसी भी सुविधा का जितना अधिक उपयोग आप करते हैं उतना ही अधिक उसके लिए मूल्य देना होता है। अगर आप बिजली अधिक खर्च करते हैं तब आपको बिल भी अधिक देना होगा । अगर आप बिजली कम खर्च करते हैं तो बिल भी कम आएगा।

यहाँ एक राशि दूसरी राशि को प्रभावित करती हैं। हम कहते हैं कि बिजली की मात्रा एक मुक्त या स्वतंत्र चर है जबकि बिजली का बिल एक आश्रित चर है। ऐसी राशियों के संबंध को हम आलेख द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं।

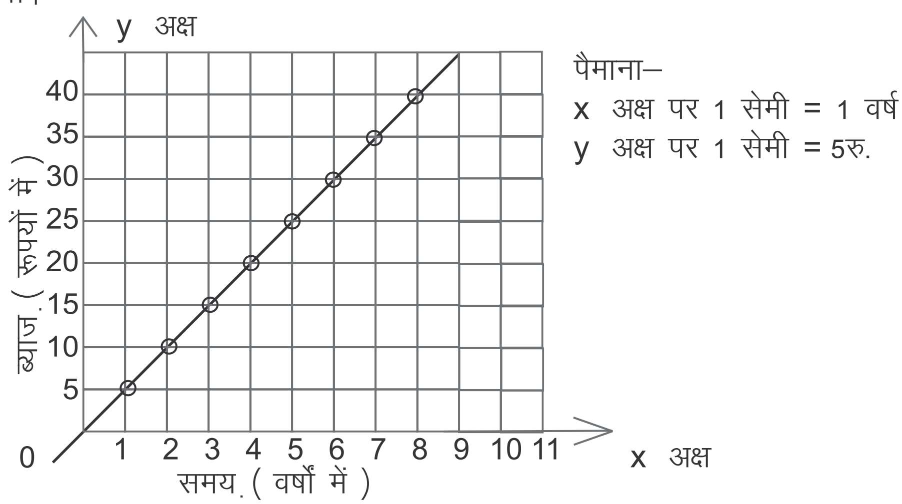
12.4 लेखाचित्र द्वारा कुछ वास्तविक संबंधों का निरूपण

उदाहरण 1 दिए गए मूलधन पर दी गई ब्याज दर से समय और साधारण ब्याज के संबंध का लेखाचित्र द्वारा निरूपण कीजिए।

हल दिए गए मूलधन, माना 100 रू पर 5 प्रतिशत प्रतिवर्ष की दर से साधारण ब्याज मिलता है तो इस संबंध को ब्याज = 5 x समय से निरूपित किया जा सकता है। समय (t) के विभिन्न मानों के संगत ब्याज (I) = 5 x समय (t) का मान ज्ञात करके निम्नांकित सारणी के रूप में लिखते हैं।

t (वर्षों में) समय	1	2	3	4	5	6	7	8
ब्याज I =5t (रु. में)	5	10	15	20	25	30	35	40

प्राप्त बिन्दुओं को (1, 5); (2, 10);(3, 15);(4, 20);(5, 25);(6, 30);(7, 35);(8, 40) ग्राफ पेपर पर अंकित करने पर वर्षों और प्राप्त ब्याज के संबंध का आलेख प्राप्त होगा। ये आलेख एक सरल रेखा को प्रदर्शित करेगा।

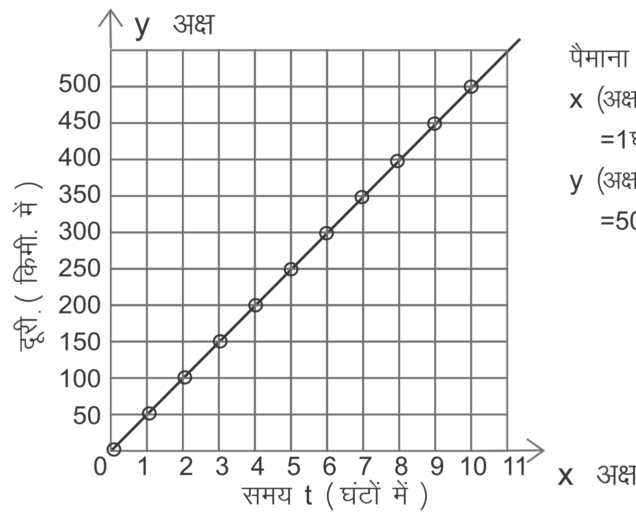


आलेख 12.8

उदाहरण 2 एक गतिशील कार 1 घंटे में 50 किमी. दूरी तय करती है। कार द्वारा तय की गई दूरी और समय के संबंध को d=50x t से प्राप्त किया जा सकता है, जहाँ पर समय (t) घंटों में और दूरी (d) किमी. में है। इस संबंध को ग्राफ पेपर पर निरूपित कीजिए। समय (t) के विभिन्न मानों के लिए तय दूरी को निम्नंकित सारणी में दर्शाया गया है।

समय t (घंटों में)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
दूरी d=50t (किमी. में)	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500

हल प्राप्त निर्देशांक बिन्दु (1,50), (2,100), (3,150), (4,200), (5,250), (6,300), (7,350), (8,400), (9,450), (10,500) को ग्राफ पेपर पर अंकित करने पर समय और दूरी के संबंध का ग्राफ प्राप्त होता है जो एक रेखा में दर्शाया गया है।



पैमाना
x (अक्ष पर 1 सेमी =1घंटा)
y (अक्ष पर 1 सेमी =50 किमी)

आलेख 12.9

12.5 आलेख (लेखा चित्र) को पढ़ना

अब हमने समय ब्याज, समय, दूरी के मध्य आलेख खींचा। इसी प्रकार संख्याओं के गुणज (जैसे 3 के गुणज = 3, 6, 9, 12.......), वर्ग की भुजा एवं परिमाप आदि के मध्य आलेख खींच सकते हैं। अब हम देखें कि दिए गए आलेख को कैसे पढ़ सकते हैं?

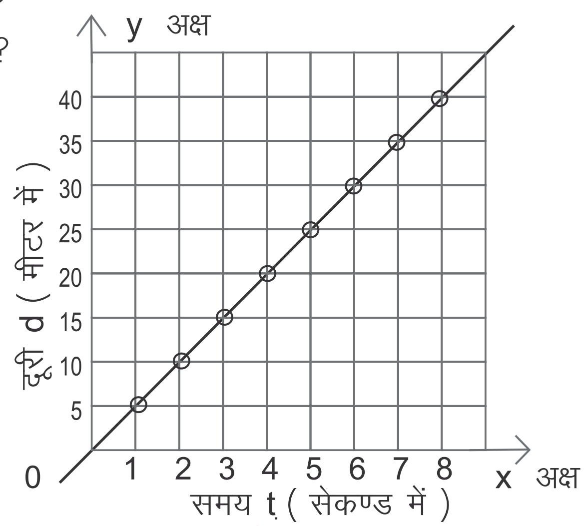
निम्न उदाहरणों को देखिए–

उदाहरण 3 आलेख 12.10 को ध्यान पूर्वक देखिए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. 2 सेकण्ड में तय की गई दूरी क्या है?
2. 6 सेकण्ड में तय की गई दूरी क्या है?
3. 20 मी. जाने में लगा समय कितना है?
4. वाहन की चाल प्रति सेकण्ड क्या है ?

हल आलेख से स्पष्ट है कि–

1. 2 सेकण्ड में तय दूरी = 10 मीटर
2. 6 सेकण्ड में तय दूरी = 30 मीटर
3. जब दूरी = 20 मीटर तब समय = 4 सेकण्ड
4. चाल $= \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{20}{4} =$ 5 मीटर /सेकण्ड



आलेख 12.10

प्रश्नावली 12.2

1. किसी समबाहु त्रिभुज एवं वर्ग की एक भुजा की लम्बाई x सेमी है। उनके परिमाप ज्ञात कर लम्बाई और परिमाप के सम्बन्ध का आलेख खींचिए।
(संकेत =△ का परिमाप = $x + x + x$) सेमी

2. एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से दुगनी है। आयत के क्षेत्रफल और चौड़ाई के सम्बन्ध का आलेख खींचिए।
(संकेत = आयत का क्षेत्रफल $A = 2x \times x = 2x^2$)

3. निम्न तालिका अनुसार समय और साधारण ब्याज के मध्य आलेख खींचिए।

समय	1 वर्ष	2 वर्ष	3 वर्ष	4 वर्ष
सा. ब्याज	60 रु.	120 रु.	180 रु.	240 रु.

4. समय और दूरी के सम्बन्ध को प्रदर्शित करने वाला आलेख खींचिए।

समय	2	4	6	8
दूरी	10	20	30	40

5. निम्न तालिका के आधार पर एक आलेख बनाइए और बताइए कि क्या यह आलेख मूल बिन्दु से गुजरता है ?

जमा धन (रु. में)	1000	2000	3000	4000	5000
सा. ब्याज (रु. में)	80	160	240	320	400

हमने सीखा

1. **रेखा आलेख** जो एक पूर्ण अखंडित रेखा हो, एक **रैखिक आलेख** कहलाता है।
2. वर्गांकित कागज पर किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने के लिए हमें **x–अक्ष** तथा **y–अक्ष** चाहिए।
3. किसी बिन्दु की y अक्ष से लम्बवत दूरी को **'भुज'** तथा x अक्ष से लम्बवत् दूरी को **'कोटि'** कहते हैं।
4. एक **स्वतंत्र चर** तथा **आश्रित चर** में संबंध एक आलेख द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।
5. मूल बिन्दु के निर्देशांक (0, 0) है।