12 परिमिति और क्षेत्रफल

आओ, थोड़ा याद करें

परिमिति (Perimeter)

किसी बंद आकृति की सभी भुजाओं की लंबाईयों का योगफल ही उस आकृति की परिमिति होती है।

बहुभुज की परिमिति = उसकी सभी भुजाओं की लंबाईयों का योगफल

$\therefore$ वर्ग की परिमिति = 4 $\times$ भुजा

a भुजावाले वर्ग की परिमिति = $4a$

आयत की परिमिति = 2 लंबाई + 2 चौड़ाई

l लंबाई तथा b चौड़ाईवाले आयत की परिमिति = $2l + 2b$

उदा. किसी आयत की परिमिति 64 सेमी हैं, तथा लंबाई 17 सेमी हो तो उसकी चौड़ाई कितनी होगी ?

हल : मानो आयत की चौड़ाई x सेमी

2 लंबाई + 2 चौड़ाई = परिमिति

2 (लंबाई + चौड़ाई) = 64

$2(17 + x) = 64$

$$\frac{2(17+x)}{2} = \frac{64}{2}$$

$17 + x = 32$

$x = 15$

आयत की चौड़ाई 15 सेमी है।

उदा. 28 सेमी लंबाई तथा 20 सेमी चौड़ाईवाले किसी आयत की परिमिति एक वर्ग के परिमिति के समान है। तो वर्ग की भुजा की लंबाई ज्ञात करो।

हल : आयत की परिमिति = 2 (लंबाई + चौड़ाई)

= 2 (28 + 20)

= 96

वर्ग की भुजा a हो तो $4a = 96$

वर्ग की परिमिति = 96

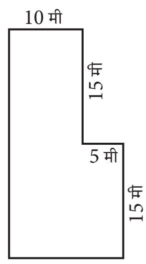
$4a = 96$

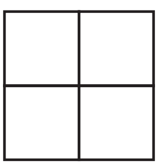
$$\therefore\ a = \frac{96}{4} = 24$$

वर्ग के भुजा की लंबाई 24 सेमी है।

प्रश्नसंग्रह 44

1. किसी आयत की लंबाई तथा चौड़ाई को दुगुनी करने पर उस आयत की परिमिति मूल आयत की परिमिति के कितनी गुनी होगी ?
2. किसी वर्ग की भुजा की लंबाई तीगुनी करने पर उसकी परिमिति मूल वर्ग के परिमिति के कितनी गुना होगी ?
3. संलग्न आकृति में मैदान की लंबाई तथा चौड़ाई के माप दिए गए है। तो मैदान की परिमिति ज्ञात करो।





4. एक मीटर लंबाई वाले वर्गाकार कपड़े का टुकड़ा लेकर आकृति में दर्शाए अनुसार चार समान आकार के रूमाल बनाए गए तो सभी रूमालों के किनारों पर लेस लगाने के लिए कितनी लंबी लेस लगेगी ?

आओ, थोड़ा याद करें

क्षेत्रफल (Area)

- वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा $\times$ भुजा = $(\text{भुजा})^2$
- आयत का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई = $l \times b$

क्षेत्रफल यह वर्ग मी, वर्ग सेमी, वर्ग किमी आदि इकाइयों में मापा जाता है।

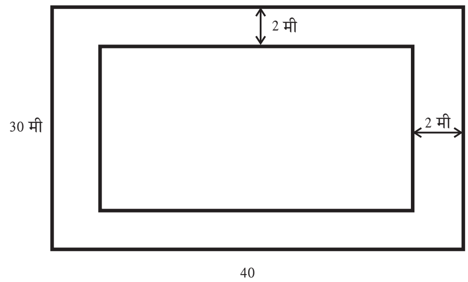
कृति I

खो-खो, कबड्ड़ी इन खेलों के लिए बनाए गए मैदानों (कोर्ट) में संभव हो तो टेनिस कोर्ट, बैडमिंटन कोर्ट की लंबाई तथा चौड़ाई नापो और उनकी परिमिति तथा क्षेत्रफल ज्ञात करो।

कृति II

अनिरुद्ध को उसके घर की किसी दीवार पर नया रंग लगाना है। दीवार की लंबाई 7 मीटर तथा ऊँचाई 5 मीटर है। रंग लगाने वाले (पेंटर) ने रंग लगाने की दर 120 रुपये प्रति वर्ग मीटर बताई तो पेंटर को कितने रुपये देने होंगे ? निश्चित करो।

उदा. किसी आयताकार बगीचे की लंबाई 40 मीटर तथा चौड़ाई 30 मी है। बगीचे के अंदर उसकी सीमाओं से सटा हुआ चारों ओर 2 मीटर चौड़ा रास्ता है। रास्ते पर 25 सेमी $\times$ 20 सेमी आकार की फर्शियाँ (टाईल्स) लगानी हों तो कितनी फर्शियाँ लानी होंगी ?



100 सेमी = 1 मी
25 सेमी = $\frac{25}{100}$ मी

फर्श लगने वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।

बगीचे का क्षेत्रफल = $40 \times 30 = 1200$ वर्ग मी

रास्ता छोड़कर बगीचे का क्षेत्रफल = $36 \times 26 = 936$ वर्ग मी.

$\therefore$ फर्शियाँ लगने वाली जगह का क्षेत्रफल = $1200 - 936 = 264$ वर्ग मीटर

प्रत्येक फर्श का क्षेत्रफल = $\frac{25}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{1}{20}$ वर्ग मी.

एक फर्श का क्षेत्रफल $\frac{1}{20}$ वर्ग मी. है तो 264 वर्ग मी स्थान पर लगने वाली फर्शियों की संख्या ज्ञात करेंगे।

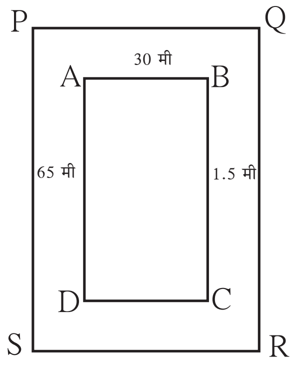
$$\text{फर्शियों की संख्या} = \frac{\text{जगह का क्षेत्रफल}}{\text{एक फर्श का क्षेत्रफल}}$$

$$= 264 \div \frac{1}{20}$$

$$= 264 \times 20 = 5280$$

अर्थात 5280 फर्श (टाइल्स) लानी होंगी।

उदा. किसी आयताकार खेल के मैदान की लंबाई 65 मीटर तथा चौडाई 30 मीटर है। इस मैदान के चारों ओर बाहरी भाग में सटकर 1.5 मीटर चौड़ा एक रास्ता है। उस रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



हल : खेल के मैदान का आकार आयताकार है।

☐ ABCD खेल का मैदान है। उसके चारों ओर बाहर से 1.5 मीटर चौड़ाई का रास्ता है।

☐ ABCD की सभी भुजाओं से 1.5 मीटर अंतर रखने पर

☐ PQRS , यह आयत मिलता है।

आयत PQRS की लंबाई $= 65 + 1.5 + 1.5 = 68$ मीटर

आयत PQRS की चौड़ाई $= 30 + 1.5 + 1.5 = 33$ मीटर

रास्ते का क्षेत्रफल = आयत PQRS का क्षेत्रफल – आयत ABCD का क्षेत्रफल

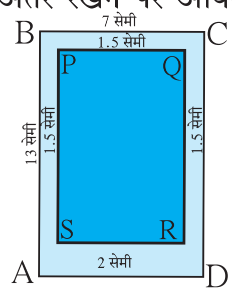
$= 68 \times 33 - 65 \times 30 = \square - \square = \square$ वर्ग मीटर

आओं, चर्चा करें

- उपर्युक्त उदाहरण के रास्ते का क्षेत्रफल अन्य किसी विधि से ज्ञात किया जा सकता है ?

उदा. किसी मोबाइल की लंबाई 13 सेमी तथा चौड़ई 7 सेमी है। उसपर स्क्रीन PQRS को आकृति में दर्शाया गया है। तो उस स्क्रीन का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल: मानो शीर्षों से बना मोबाइल आयत ABCD है। उसकी लंबाई 13 सेमी तथा चौड़ाई 7 सेमी है। AB, BC तथा DC की ओर 1.5 सेमी दूरी रखने पर और भुजा DA से 2 सेमी अंतर रखने पर आयत PQRS बनता है।



आयत PQRS की लंबाई = ☐ सेमी

आयत PQRS की चौड़ाई = ☐ सेमी

स्क्रीन का क्षेत्रफल = आयत PQRS का क्षेत्रफल = ... × .... = ☐ वर्गसेमी

कृति

विविध आकार के मोबाइल देखो। उनके स्क्रीन का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

प्रश्नसंग्रह 45

1. किसी वर्ग की भुजा की लंबाई 12 सेमी हो तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।
2. किसी आयत की लंबाई 15 सेमी तथा चौड़ाई 5 सेमी हो तो आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करो।
3. किसी आयत का क्षेत्रफल 102 वर्ग सेमी है। आयत की लंबाई 17 सेमी हैं तो आयत की परिमिति कितनी होगी ?

4*. किसी वर्ग की भुजा की लंबाई तीन गुना करने पर, उसका क्षेत्रफल मूल वर्ग के क्षेत्रफल का कितनी गुना होगा ?

आओ, समझें

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of right angle triangle)

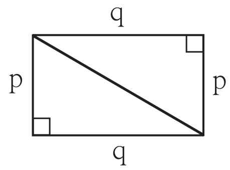
कृति

संलग्न आकृति में दर्शाए अनुसार एक ही माप के दो समकोण त्रिभुज काटकर उन्हें मिलाओ। एक आयत बनता है तुम यह महसूस करोगे। त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाओं की लंबाई p तथा q हैं और p तथा q यह आयत की भी भुजाएँ हैं। आकृति के अनुसार हमे यह दिखाई देता है कि,

आयत का क्षेत्रफल = 2 × समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

$\therefore$ 2 × समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = p × q

$\therefore$ समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{p \times q}{2}$



मैंने यह समझा

- समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{1}{2}$ × समकोण बनानेवाली भुजाओं की लंबाई का गुणनफल

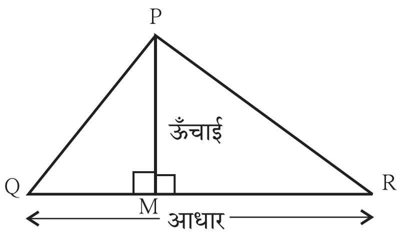
समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली दो भुजाओं में से एक भुजा को आधार मानें तो दूसरी भुजा ऊँचाई होती है।

इस प्रकार समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

किसी प्रकार का एक त्रिभुज ΔABC हो तो आधार के लिए एक भुजा लेते हैं, उस भुजा के सम्मुख शीर्षबिंदु से आधार पर खींचा गया लंब का माप ही उस त्रिभुज की ऊँचाई होती है।

ΔPQR (किसी भी प्रकार का त्रिभुज) लेकर आधार QR लो। P से रेखा QR पर PM लंब खींचो।

आकृति 1: बिंदु M रेख QR पर स्थित है।



ΔPMR तथा ΔPMQ समकोण त्रिभुज हैं।

A(ΔPQR) = A (ΔPMQ) + A(ΔPMR)

$= \dfrac{1}{2} \times l(QM) \times l(PM) + \dfrac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM)$

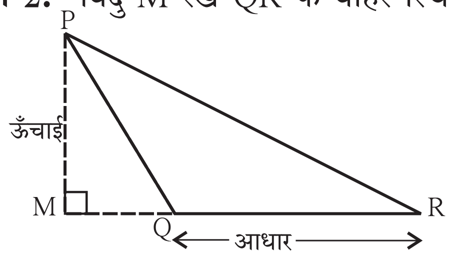
$= \dfrac{1}{2}\ [l(QM) + l(MR)] \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2}\ l(QR) \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

A(ΔPQR) = $\dfrac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

आकृति 2: बिंदु M रेख QR के बाहर स्थित है।



ΔPMR तथा ΔPMQ समकोण त्रिभुज हैं।

A(ΔPQR) = A(ΔPMR) − A (ΔPMQ)

$= \dfrac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM) - \dfrac{1}{2} \times l(MQ) \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2}\ [l(MR) - l(MQ)] \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} \times l(QR) \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

A(ΔPQR) = $\dfrac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

मैंने यह समझा

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

उदा. किसी समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाओं की लंबाई 3.5 सेमी तथा 4.2 सेमी हो, तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल: समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × समकोण बनाने वाली भुजाओं का गुणनफल

= $\frac{1}{2} \times 3.5 \times 4.2$

= 7.35 वर्ग सेमी

उदा. किसी त्रिभुज का आधार 5.6 सेमी तथा ऊँचाई 4.5 सेमी हो तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल: त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

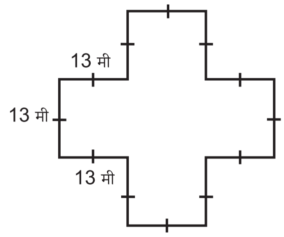
= $\frac{1}{2} \times 5.6 \times 4.5$

= 12.6 सेमी^{2}

(वर्ग सेमी को सेमी^{2} भी लिखते है।)

प्रश्नसंग्रह 46

1. किसी दिनदर्शिका के पृष्ठ की लंबाई 45 सेमी तथा चौड़ाई 26 सेमी है तो उस पृष्ठ का क्षेत्रफल कितना होंगा ?
2. किसी त्रिभुज की ऊँचाई 3.6 सेमी तथा आधार 4.8 सेमी है तो उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो ?
3. किसी आयताकार भूखंड की लंबाई 75.5 मीटर और चौड़ाई 30.5 मीटर हैं तो 1000 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से उस भूखंड का मूल्य कितना होगा ?
4. किसी आयताकार सभागृह की लंबाई 12 मीटर तथा चौड़ाई 6 मीटर है उस सभागृह में 30 सेमी भुजावाली वर्गाकार फर्शियाँ लगानी हैं तो उस सभागृह में कुल कितनी फर्शियाँ लगेंगी ? यदि 15 सेमी भुजावाली वर्गाकार फर्शियाँ लें तो कुल कितनी फर्शियाँ लगेंगी ? ज्ञात करो।
5. संलग्न आकृति में दर्शाए गए माप के अनुसार बगीचे की परिमिति तथा क्षेत्रफल ज्ञात करो।

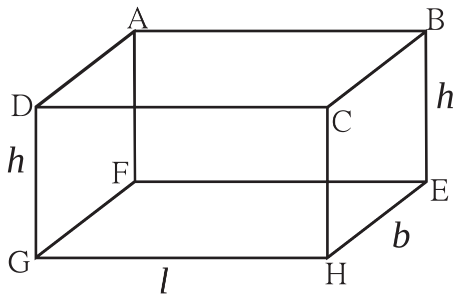


पृष्ठफल (Surface area)

आओ, समझें

किसी भी त्रिविम आकारवाली वस्तु के सभी पृष्ठभागों के क्षेत्रफल का योगफल ही उस वस्तु का पृष्ठफल होता है।

घनाभ का पृष्ठफल



- घनाभ के कुल छह पृष्ठ होते हैं।
- प्रत्येक पृष्ठ आयताकार होता है।
- सम्मुख पृष्ठों का क्षेत्रफल समान होता है।
- प्रत्येक कोर उसे जोड़ने वाली अन्य दो कोरों पर लंब होती है।
- घनाभ के क्षैतिज पृष्ठभाग की लंबाई l से और चौड़ाई b से दिखाते हैं। खड़े (उर्ध्वाधर) पृष्ठ की ऊँचाई h से दिखाते हैं।

आयत ABCD का क्षेत्रफल = आयत GHEF का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई = $l \times b$

आयत ADGF का क्षेत्रफल = आयत BCHE का क्षेत्रफल = चौड़ाई × ऊँचाई = $b \times h$

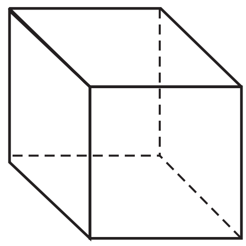
आयत CHGD का क्षेत्रफल = आयत ABEF का क्षेत्रफल = लंबाई × ऊँचाई = $l \times h$

घनाभ का संपूर्ण पृष्ठफल = सभी आयतों के क्षेत्रफलों का योगफल

घनाभ का संपूर्ण पृष्ठफल = 2 (लंबाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + लंबाई × ऊँचाई)

$= 2\,(l \times b + b \times h + l \times h) = 2\,(lb + bh + lh)$

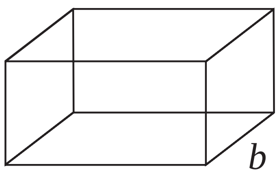
✸ समघन का पृष्ठफल



- प्रत्येक समघन के छह पृष्ठ होते हैं।
- प्रत्येक पृष्ठ वर्गाकार होता है।
- सभी पृष्ठों के क्षेत्रफल समान होते हैं।
- वर्ग की भुजा l मानेंगे।
- समघन के एक पृष्ठ का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल
- समघन का संपूर्ण पृष्ठफल = 6 वर्गों का क्षेत्रफल
  = 6 × भुजा^{2}
  $= 6 \times l^2$

उदा. 1.5 मी लंबी, 1.2 मी चौड़ी तथा 1.3 मी ऊँची लोहे की चद्दर वाली घनाभ आकार की पेटी (संदूक) बनाने के लिए कितनी लोहे की चद्दरें लगेंगी ?

हल : पेटी की लंबाई = l = 1.5 मीटर, चौड़ाई = b = 1.2 मीटर, ऊँचाई = h = 1.3 मीटर



पेटी का पृष्ठफल $= 2\,(l \times b + b \times h + l \times h)$

$= 2\,(1.5 \times 1.2 + 1.2 \times 1.3 + 1.5 \times 1.3)$

$= 2\,(1.80 + 1.56 + 1.95)$

$= 2\,(5.31)$

= 10.62 वमी.

पेटी बनाने के लिए 10.62 वर्ग मी लोहे की चद्दर लगेगी।

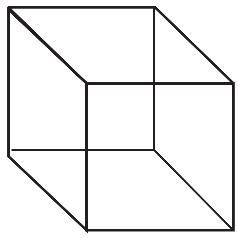
उदा. किसी समघनाकार डिब्बे की भुजा की लंबाई 0.4 मी है। 50 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से उस डिब्बे के केवल बाहरी पृष्ठों पर रंग लगवाने का खर्च कितना होगा ?

हल : भुजा = l = 0.4 मीटर

समघन का संपूर्ण पृष्ठफल $= 6 \times (l)^2$

$= 6 \times (0.4)^2$

$= 6 \times 0.16 = 0.96$ वर्ग मी



1 वर्ग मी रंग लगाने का खर्च 50 रुपये

∴ 0.96 वर्ग मी रंग लगाने का खर्च = 0.96 × 50

= 48 रुपये

डिब्बा रंगने का खर्च 48 रुपये होगा।

प्रश्नसंग्रह 47

1. समघन की भुजा की लंबाई नीचे दी गई है। उनका पृष्ठफल ज्ञात करो।
   (i) 3 सेमी (ii) 5 सेमी (iii) 7.2 मी (iv) 6.8 मी (v) 5.5 मी
2. घनाभ की लंबाई, चौड़ाई, तथा ऊँचाई क्रमशः नीचे दी गई है, उनका संपूर्ण पृष्ठफल ज्ञात करो।
   (i) 12 सेमी, 10 सेमी, 5 सेमी. (ii) 5 सेमी, 3.5 सेमी, 1.4 सेमी.
   (iii) 2.5 सेमी, 2 मी, 2.4 मी. (iv) 8 मी, 5 मी, 3.5 मी.
3. किसी माचिस पेटी की लंबाई 4 सेमी, चौड़ाई 2.5 सेमी तथा ऊँचाई 1.5 सेमी है। उस माचिस पेटी के बाहरी सतह पर रंगीन कागज चिपकाना है तो कितना कागज लगेगा ?
4. किसी बगीचे की साग-भाजी को ट्राली से ले जाने के लिए 1.5 मीटर लंबी, 1 मीटर चौड़ी तथा 1 मीटर ऊँची बिना ढ़क्कन वाली लोहे के चद्दर (पतरा) की पेटी तयार करनी है। उसके लिए कितने पृष्ठों का पतरा लगेगा ? उस पेटी को बाहर तथा अंदर से जंगरोधी रंग से रँगवाना हैंतो 150 प्रति वर्गमीटर की दर से पेटी रँगने का खर्च कितना होगा ?

गणितीय मनोरंजन

कुछ तीन अंकों की संख्या ऐसी हैं कि उनके अंकों के गुणनफल से उस संख्या में पूरा-पूरा भाग जाता है।

उदा. (i) 175 यह संख्या लो, $1 \times 7 \times 5 = 35$, $\frac{175}{35} = 5$

(ii) 816 यह संख्या लो, $8 \times 1 \times 6 = 48$, $\frac{816}{48} = 17$

(iii) 612 यह संख्या लो, $6 \times 1 \times 2 = 12$, $\frac{612}{12} = 51$

इसी तरह की संख्या 135, 312,672 हैं।

इसी प्रकार की और संख्या खोजो।

❑❑❑