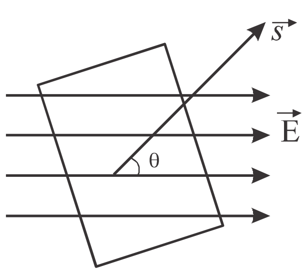
अध्याय–02
गाउस का नियम एवं इसके अनुप्रयोग
(Gauss's Law and Its Applications)

पिछले अध्याय में हमने स्थिर बिन्दु आवेश, विविक्त आवेशों के निकाय तथा इनके कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की संकल्पनाओं का अध्ययन किया। जहाँ हमने देखा कि विविक्त आवेशों के निकाय के कारण विद्युत क्षेत्र का परिकलन करने में अध्यारोपण का सिद्धांत किस प्रकार सहायक होता है। इस अध्याय में हम आवेशो के संतत वितरण के लिए विद्युत क्षेत्र ज्ञात करने के लिए आवेश घनत्व की अवधारणा को काम लेते हुए कूलॉम नियम का उपयोग कर पहले आवेश वितरण के लिए किसी अल्पांश द्वारा किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करेंगे तथा फिर समाकलन विधि द्वारा अभीष्ट बिन्दु पर समस्त आवेश वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र ज्ञात करेंगे। सिद्धांततः किसी भी संतत आवेश वितरण के लिए ऐसा संभव है किन्तु कतिपय स्थितियों में समाकलन को हल करना या तो बहुत जटिल होता है अथवा यथार्थतः हल करना संभव नहीं होता। संतत आवेश वितरण की ऐसी समस्याओं, जहाँ आवेश सममित रूप से वितंरित होता है, में गाउस का नियम बहुत उपयोगी है जो विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना बहुत ही सरल बना देता है। गाउस नियम को समझने के लिए पहले विद्युत फलक्स की अवधारणा को समझना आवश्यक है अतः इस अध्याय का प्रारंभ हम विद्युत फलक्स के अध्ययन से करेंगे।

2.1 विद्युत फलक्स (Electric Flux)

किसी एक समान विद्युत क्षेत्र E में स्थित किसी समतल सतह जिसका क्षेत्रफल S है, से पारित विद्युत फलक्स निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है।

$$\phi = ES\cos\theta \qquad \ldots(2.1)$$

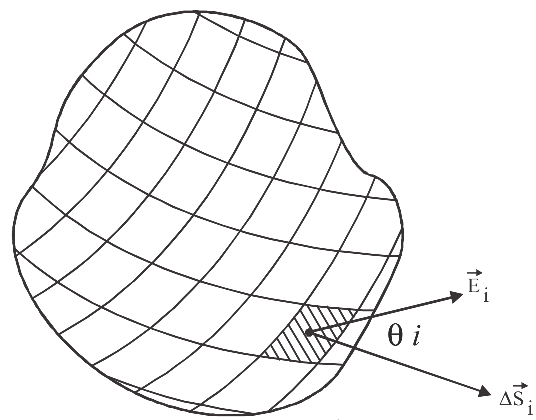


चित्र 2.1 किसी समतल सतह से पारित विद्युत फलक्स

जहाँ $\theta, \vec{E}$ तथा सतह के अभिलंब के मध्य कोण है (चित्र 2.1) किसी समतल सतह के क्षेत्रफल को एक सदिश $\vec{S}$ द्वारा व्यक्त किया जा सकता है जिसका परिमाण सतह के क्षेत्रफल S के बराबर है तथा दिशा दी गई सतह के अभिलंबवत होती है तदानुसार

$$\phi_E = \vec{E}\cdot\vec{S} \qquad \ldots(2.2)$$

लिखा जा सकता है। विद्युत फलक्स एक अदिश राशि है जिसका मान सतह क्षेत्रफल तथा विद्युत क्षेत्र के साथ–साथ क्षेत्रफल सदिश तथा विद्युत क्षेत्र के मध्य बनने वाले कोण पर भी निर्भर करता है। किसी सतह से गुजरने वाला विद्युत फलक्स ϕ_E उस सतह से गुजरने वाली कुल विद्युत क्षेत्र रेखाओं की संख्या के समानुपाती होता है। ϕ_E धनात्मक (जब $90^\circ > \theta > 0^\circ$) ऋणात्मक (जब $180^\circ > \theta > 90^\circ$) या शून्य (जब $\theta = 90^\circ$) हो सकता है। जब विद्युत क्षेत्र रेखाएँ क्षेत्रफल के बाहर निकलती हैं तो फलक्स धनात्मक होता है तथा जब विद्युत क्षेत्र रेखाएँ क्षेत्रफल के भीतर जाती हैं तो फलक्स ऋणात्मक होता है। यदि क्षेत्र रेखाएँ समतल क्षेत्रफल के समान्तर हों तब फलक्स शून्य होता है।



चित्र 2.2 बन्द सतह से फलक्स

एक व्यापक प्रकरण में जिसमें $\vec{E}$ एकसमान नही हैं तथा सतह समतल नहीं है के लिए निर्गत फलक्स ज्ञात करने के लिए सतह को n छोटे अवयवी क्षेत्रफलों $\Delta S_1, \Delta S_2 \ldots \Delta S_n$ में विभाजित किया जाता है (चित्र 2.2) जहाँ प्रत्येक अवयवी क्षेत्रफल ΔS_i इतना सूक्ष्म है ताकि

(i) इसे समतलीय माना जा सके तथा

(ii) इस पर विद्युत क्षेत्र में परिवर्तन इतना अल्प है कि विद्युत क्षेत्र E_i एक समान माना जा सके तब समीकरण 2.2 की सहायता से इस अवयवी क्षेत्रफल से संबद्ध फलक्स होगा

$$\Delta\phi_i = \vec{E}_i\cdot\Delta\vec{S}_i \qquad \ldots(2.3)$$

तथा सम्पूर्ण सतह से निर्गत फलक्स सन्निकट रूप से ऐसे समस्त अवयवी क्षेत्रफलों से संबद्ध विद्युत फलक्सों का अदिश योग होगा अर्थात्

$$\phi = \sum \vec{E}_i\cdot\Delta\vec{S}_i$$

सीमान्त अवस्था $\Delta\vec{s}_i \to 0$ में योग चिन्ह $\sum$ को समाकलन से प्रतिस्थापित करने पर दी गई सम्पूर्ण सतह से संबद्ध फलक्स इस प्रकार दिया जाएगा।

$$\phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{s} \qquad \ldots(2.4)$$

सामान्यतः हम बंद पृष्ठों से पारित फ्लक्स ज्ञात करने में रूचि रखते है। एक बंद पृष्ठ से आशय उससे है जो समष्टि(space) को एक आन्तरिक तथा एक बाह्य प्रभाग में विभाजित करती है ताकि कोई एक प्रभाग से दूसरे प्रभाग में इस पृष्ठ को काटे बिना नहीं जा सकता। उदाहरण के लिए गोले की सतह, एक बंद पृष्ठ है। बंद पृष्ठों के लिए समाकलन को $\oint$ से व्यक्त करने पर किसी बंद पृष्ठ से पारित फलक्स को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad \ldots(2.5)$$

जैसा हम ऊपर वर्णित कर चुके है किसी क्षेत्रफल अवयव की दिशा उसके अभिलंब के अनुदिश होती है परन्तु अभिलंब दो दिशाओं में इंगित कर सकता है। प्रचलित परिपाटी के अनुसार किसी बंद पृष्ठ के किसी क्षेत्रफलीय अवयव के लिए क्षेत्रफल सदिश $d\vec{s}$ बहिर्मुखी (बाहर की ओर) अभिलंब की दिशा में होता हैं इस परिपाटी का उपयोग चित्र 2.2 में किया गया है इस चित्र के लिए ध्यान दे कि विभिन्न सतह अवयवों के लिए क्षेत्रफलीय अवयवी सदिश ΔS_i विभिन्न दिशाओं में होंगे किन्तु ऐसा प्रत्येक सदिश संगत सतह के बाहर की ओर अभिलंबवत है। साथ ही बंद पृष्ठ से निर्गत फ्लक्स धनात्मक जबकि इसकी भीतर प्रविष्ट फ्लक्स को ऋणात्मक माना जाता है। यदि सतह को छोड़कर जाने वाली क्षेत्र रेखाओं की संख्या सतह से प्रवेश कर रही क्षेत्र रेखाओं की संख्या से अधिक है तो नेट फ्लक्स धनात्मक होगा। इसका विपरीत होने पर नेट फ्लक्स ऋणात्मक होगा।

विद्युत फ्लक्स का SI मात्रक $\mathrm{N\,m^2C^{-1}}$ या Vm होता है तथा इसकी विमाएँ $\left[\mathrm{M^1L^3T^{-3}A^{-1}}\right]$ होती है।

उदाहरण 2.1 विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = 200\hat{i} + 300\hat{j}\,\mathrm{Vm^{-1}}$ में स्थित एक क्षेत्रफल सदिश $\vec{S} = 5\times10^{-3}\,\hat{j}\,\mathrm{m^2}$ से पारित विद्युत फ्लक्स का मान ज्ञात कीजिए।

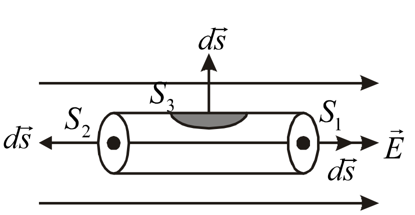
हलः विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \vec{E}\cdot\vec{S} = \left(200\hat{i}+300\hat{j}\right)\cdot\left(5\times10^{-3}\hat{j}\right)$$

$$\phi = 0 + 1500\times10^{-3} = 1.5\,\mathrm{Vm}$$

उदाहरण 2.2 एक समान विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में एक बेलन इस प्रकार स्थित है कि इसकी अक्ष विद्युत क्षेत्र के अनुदिश है। प्रदर्शित कीजिए कि बेलन से पारित कुल विद्युत फ्लक्स शून्य है।

हलः



चित्रानुसार हम बेलन को तीन भागों दो वृत्तीय फलक S_1 व S_2 तथा वक्रीय पृष्ठ S_3 से बना मान सकते हैं अतः बेलन से पारित कुल विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \int_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{S_3}\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

यहाँ चित्र से स्पष्ट है कि फलक S_1 के लिए $\vec{E}$ व $d\vec{s}$ समान्तर $(\theta = 0)$ फलक S_2 के लिए $Ed\vec{s}$ प्रतिसमान्तर $(\theta = 180^\circ)$ तथा वक्र पृष्ठ पर कहीं भी $\vec{E}$ व $d\vec{s}$ लंबवत $(\theta = 90^\circ)$ है अतः

$$\phi = \int_{S_1} Eds\cos 0^\circ + \int_{S_2} Eds\cos 180^\circ + \int_{S_3} Eds\cos 90^\circ$$

या $\quad \phi = ES_1 - ES_2 + 0$

$\because \quad$ क्षेत्रफल $S_1 = S_2 =$ (माना S)

तब $\quad \phi = ES - ES = 0$

यह परिमाण अपेक्षित ही है क्योंकि विद्युत क्षेत्र के एकसमान होने के कारण बेलन में प्रवेश कर रही क्षेत्र रेखाओं की संख्या इसको निर्गत क्षेत्र रेखाओं की संख्या के बराबर है

उदाहरण 2.3 एक 5 cm त्रिज्या की वृत्ताकार शीट, एक समान विद्युत क्षेत्र $5\times10^{+5}\,\mathrm{Vm^{-1}}$ में इस प्रकार स्थित है कि इसका तल, विद्युत क्षेत्र से 30° का कोण बनाता है। शीट से पारित विद्युत फ्लक्स ज्ञात कीजिए।

हलः शीट के क्षेत्रफल सदिश द्वारा विद्युत क्षेत्र के साथ बनाया गया कोण $\theta = 90^\circ - 30^\circ$ या $\theta = 60^\circ$

अतः विद्युत फ्लक्स $\phi = ES\cos\theta = E\left(\pi r^2\right)\cos 60^\circ$

$$\phi = 5\times10^{+5}\times3.14\times\left(5\times10^{-2}\right)^2\times\frac{1}{2}$$

$$\phi = 125\times3.14\times\frac{1}{2}\times10 = 1.96\times10^3\,\mathrm{Vm}$$

2.2 संतत आवेश वितरण (Continuous Charge Distribution)

सूक्ष्म पैमाने (microscopic scale) पर आवेश क्वांटीकृत होता है। परन्तु, कई बार इस प्रकार की परिस्थितियाँ होती हैं जिनमें बहुत संख्या में आवेश परस्पर इतने निकट होते हैं कि उन्हें सतत रूप से वितरित माना जा सकता है। ऐसे आवेश वितरणों में किसी रेखा के अनुदिश वितरण में आवेश कितनी बड़ी संख्या में विद्यमान हो सकते हैं इसका अनुमान इससे लगाया जा सकता है कि किसी छड़ जिस पर 1 nC मात्रा का अल्प आवेश ही, है में लगभग 10^{10} बिन्दु आवेश उपस्थित होते हैं ऐसे आवेश वितरणों के कारण यद्यपि

किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की गणना आवेश वितरण के प्रत्येक बिन्दु आवेश के कारण अभीष्ट बिन्दु पर कूलॉम नियम की सहायता से विद्युत क्षेत्र ज्ञात कर तथा फिर समस्त बिन्दु आवेशों के कारण विद्युत क्षेत्रों का सदिश योग ज्ञात कर सकल विद्युत क्षेत्र परिकलन सिद्धांततः संभव है पर बहुसंख्या में आवेशों की उपस्थिति इसे निराशाजनक रूप से जटिल बना देती है। इस प्रकार की परिस्थितियों में हम आवेश को सतत मानते हुए आवेश घनत्व की अवधारणा काम लेते हुए कलन (calculus) विधि से विद्युत क्षेत्र ज्ञात कर सकते हैं (अतिनिकट स्थित विविक्त आवेशो को एक सतत आवेश घनत्व के रूप में मानना ठीक उसी प्रकार है जैसे हम वायु जो वस्तुतः विविक्त अणुओं से बनी है को एक सतत द्रव्यमान घनत्व के रूप में मानते हैं)

यदि किसी वस्तु पर नेट आवेश q है तब हम इसे कई सूक्ष्म अवयवों dq में बाँटते है। प्रत्येक अवयव के लिए कुछ लंबाई, कुछ क्षेत्रफल अथवा कुछ आयतन होता है जो इस बात पर निर्भर करता है कि विचारित आवेश एकविमीय, द्विविमीय या त्रिविमीय किस प्रकार वितरित है। तब हम dq को अवयव के आमाप (size) एवं आवेश घनत्व के पदों में व्यक्त कर सकते है। आवेश वितरण कितनी विमाओं में है इस आधार पर हम निम्नलिखित तीन प्रकार के आवेश वितरणों एवं इनके संगत आवेश घनत्वों पर विचार करेंगे।

(i) रेखीय आवेश वितरण (Linear Charge Distribution)

कतिपय परिस्थितियों में आवेश समष्टि में एक रेखा के अनुदिश (या वस्तु की लंबाई के अनुदिश) वितरित होता है यथा किसी तार अथवा पतली छड़ पर आवेश तथा किसी वलय की परिधि पर वितरित आवेश आदि।इस प्रकार के आवेश वितरण की स्थिति में हम अवयवी आवेश dq को रेखीय आवेश घनत्व (आवेश प्रति एकांक लंबाई) λ के पदों में व्यक्त करते हैं जिसका SI मात्रक कूलॉम/मीटर (C/m) है। यदि अवयवी आवेश dq की लंबाई dx है तो परिभाषा से

$$\lambda = \frac{dq}{dx} \qquad \ldots (2.6अ)$$

या $$dq = \lambda\, dx \qquad \ldots (2.6ब)$$

यदि L लंबाई की किसी छड़ पर आवेश q एक समान वितरित है तब $\lambda = q/L$ लिखा जा सकता है तथा यह नियत होगा।

(ii) पृष्ठ आवेश वितरण (Surface Charge Distribution)

कुछ परिस्थितियों में आवेश किसी द्विविमीय क्षेत्रफल में वितरित हो सकता है जैसे किसी चकती की सतह पर आवेश वितरण या किसी शीट पर वितरित आवेश या चालक की सतह पर उपस्थित आवेश इत्यादि। इस प्रकार के प्रकरणों में हम अवयवी आवेश dq को पृष्ठीय आवेश घनत्व (आवेश प्रतिएकांक क्षेत्रफल) σ के पदों में व्यक्त करते हैं। यदि अवयवी (elemental) आवेश dq क्षेत्रफल ds में वितरित पदों में व्यक्त करते हैं जिसका SI मात्रक C/m^2 होता है। है तो परिभाषा से

$$\sigma = dq/ds \qquad \ldots (2.7अ)$$

या $$dq = \sigma ds \qquad \ldots (2.7ब)$$

आवेश q किसी क्षेत्रफल S पर एकसमान वितरित है तब $\sigma = q/S$ तथा यह नियत होगा।

(iii) आयतन आवेश वितरण (Volume Charge Distribution)

कई परिस्थितियों में आवेश किसी त्रिविमीय वस्तु के संपूर्ण आयतन में वितरित हो सकता है। ऐसे प्रकरणों में हम आयतन आवेश घनत्व ρ का उपयोग करते हैं जिसका SI मात्रक C/m^3 है यदि आवेश dq, आयतन अल्पांश dV में निहित है तब

$$\rho = dq/dV \qquad \ldots (2.8अ)$$

या $$dq = \rho dV \qquad \ldots (2.8ब)$$

यदि किसी आयतन V में आवेश q एक समान वितरित है तब $\rho = q/V$ एवं यह नियत होगा।

2.2.1 संतत आवेश वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र (Electric Field due to a Continous Charge Distribution)

इस उप अनुभाग में हम आवेश घनत्व की अवधारणा की सहायता से किसी संतत आवेश वितरण के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करेंगें जिसकी विधि निम्नानुसार है

1. संतत आवेश वितरण को बहु संख्या में उपस्थित अवयवी आवेश अल्पांशों से निर्मित मानें
2. किसी स्वैच्छिक आवेश अल्पांश का चयन करें तथा इसका आवेश dq आवेश घनत्व के रूप में समीकरणों 2.6, 2.7 या 2.8 में व्यक्त करें जो इस बात पर निर्भर करेगा कि आवेश वितरण रेखीय पृष्ठीय अथवा किसी आयतन पर वितरित है।
3. आवेश अल्पांश dq के अत्यल्प होने के कारण इसे हम एक बिन्दु आवेश की तरह मानते हैं। तब अल्पांश dq के कारण किसी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र (कूलॉम नियम की सहायता से)

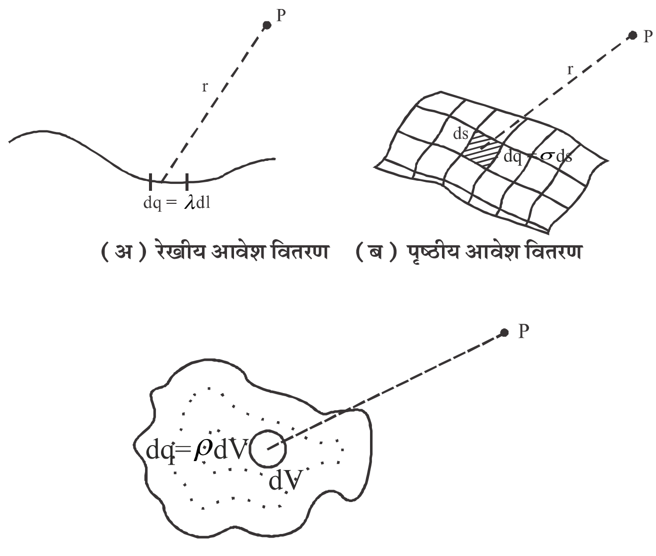
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{dq}{r^2}\hat{r} \qquad \ldots (2.9)$$

से दिया जाएगा। यहाँ r अल्पांश dq तथा अभीष्ट बिन्दु P के मध्य दूरी हैं $d\vec{E}$ की दिशा dq के चिह्न तथा बिन्दु P के अवस्थिति पर निर्भर करेगी (यह P की स्थिति पर रखे एकांक धन आवेश पर रखे परीक्षण आवेश पर लगने वाले बल की दिशा में होगी)

4. संपूर्ण आवेश वितरण के कारण P पर परिणामी विद्युत क्षेत्र वितरण के सभी आवेश अल्पांशों के कारण विद्युत क्षेत्रों का सदिश योग होगा अवयवी अल्पांश का आमाप शून्य की ओर अग्रसर होने की सीमा में

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \in_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r} \qquad \ldots (2.10)$$

द्वारा दिया जाएगा। चित्र 2.3 में रेखीय, पृष्ठीय व आयतन आवेश वितरण से संबंधित परिस्थितियाँ दर्शाई गई जिनके संगत विद्युत क्षेत्र के सूत्र निम्नानुसार है।



चित्र 2.3 रेखीय, पृष्ठीय एवं आयतन आवेश वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र की गणना

(i) रेखीय आवेश वितरण यहाँ $dq = \lambda d\ell$

$$\therefore \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{\lambda d\ell}{r^2}\hat{r} \qquad \ldots(2.11)$$

यहाँ समाकलन पर L का चिन्ह रेखीय समाकलन को व्यक्त करता है।

तथा यदि λ एकसमान (नियत) है तब

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda\int_L \frac{d\ell}{r^2}\hat{r} \qquad \ldots(2.12)$$

(ii) पृष्ठीय आवेश वितरण यहाँ $dq = \sigma ds$

$$\therefore \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma ds}{r^2}\hat{r} \qquad \ldots(2.13)$$

यहाँ समाकलन पर S का चिह्न पृष्ठीय समाकलन को व्यक्त करता है।

यदि σ एक समान (नियत) है तब

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sigma\int_S \frac{ds}{r^2}\hat{r} \qquad \ldots(2.14)$$

(iii) आयतन आवेश वितरण यहाँ $dq = \rho dV$

$$\therefore \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho dV}{r^2}\hat{r} \qquad \ldots(2.15)$$

यहाँ समाकलन पर V का चिह्न आयतन समाकलन को व्यक्त करता है।

तथा ρ नियत होने पर

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho\int_V \frac{dV}{r^2}\hat{r} \qquad \ldots(2.16)$$

उपर्युक्त समाकलनों को हल करते समय ध्यान दें कि विभिन्न अवयवी आवेशों dq के कारण $d\vec{E}$ भिन्न दिशाओं में हो सकते हैं। व्यापक रूप में समीकरण (2.10) एक त्रिविमीय सदिश को व्यक्त करती है जिसके तीन कार्तीय घटक E_x, E_y व E_z क्रमशः

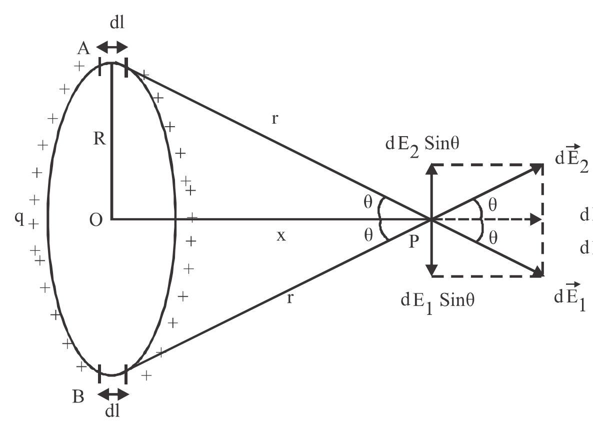
$$E_x = \int dE_x,\ E_y = \int dE_y,\ E_z = \int dE_z \ldots(2.17)$$

द्वारा ज्ञात किए जा सकते हैं। कई प्रकरणों में सममितता के कारण एक या अधिक समाकलन शून्य हो सकते है अथवा समान मान देते है।

यदि किसी आवेश वितरण के कारण किसी बिन्दु आवेश q पर बल ज्ञात करना हो तेा पहले आवेश वितरण की परिस्थिति अनुसार समीकरण 2.10 से $\vec{E}$ ज्ञात कर फिर सूत्र $\vec{F} = q\vec{E}$ से उद्देश्य प्राप्त किया जा सकता हैं इस अध्याय में हम ऐसे आवेश वितरणों के अध्ययन तक ही सीमित रहेंगे जिनके लिए संगत आवेश घनत्व (λ, σ या ρ जैसा भी प्रकरण हो) नियत होता है।

उदाहरण 2.4 एक R त्रिज्या की पतली वलय पर q घन आवेश एक समान रूप से वितरित है। वलय की अक्ष पर, केन्द्र से x दूरी पर स्थित बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए। प्राप्त परिणाम की प्रतिबंध $x >> R$ के लिए विवेचना कीजिए।

हल: चूंकि वलय पर q आवेश एक समान रूप से वितरित है अतः रेखीय आवेश घनत्व



$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{q}{2\pi R}$$

अब चित्र में दर्शाए अनुसार हम वलय पर व्यासतः सम्मुख दो समान लम्बाई $d\ell$ के अल्पांश A एवं B लेते हैं।

प्रत्येक अल्पांश पर आवेश

$dq = \lambda d\ell$

प्रत्येक अल्पांश से बिन्दु P की दूरी r है तो

अल्पांश A के कारण बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{dq}{r^2} \qquad \{\text{AP दिशा में}\}$$

अल्पांश B के कारण बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र

$$d\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{dq}{r^2} \qquad \{\text{BP दिशा में}\}$$

स्पष्टतः $|d\vec{E}_1| = |d\vec{E}_2|$

$d\vec{E}_1$ एवं $d\vec{E}_2$ को चित्रानुसार वियोजित करने पर इनके ऊर्ध्वघटक $dE_1 \sin\theta$ एवं $dE_2 \sin\theta$ परिमाण में समान एवं परस्पर विपरीत होने के कारण परस्पर निरस्त हो जाते हैं जबकि क्षैतिज घटक $dE_1 \cos\theta$ एवं $dE_2 \cos\theta$ समान दिशा में होने के कारण जुड़ जाते हैं। हम संपूर्ण वलय को इसी प्रकार के अल्पांश युग्मों में विभक्त कर सकते हैं। प्रत्येक युग्म का क्षैतिज घटकOP दिशा के अनुदिश होता है अतः संपूर्ण वलय के कारण बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र

$$E = \int_L dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi \in_0} \int_L \frac{dq}{r^2} \cos\theta$$

$\because$ चित्र से $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\because$ $dq = \lambda d\ell$ तथा x, λ एवं r नियतांक है

अतः $$E = \frac{\lambda x}{4\pi \in_0 r^3} \int_L d\ell$$

$\because$ $\int_L d\ell =$ संपूर्ण वलय की लम्बाई $= 2\pi R$

अतः $$E = \frac{\lambda x}{4\pi \in_0 r^3} \cdot 2\pi R$$

$\because$ $\lambda \times 2\pi R = q$ तथा चित्र से $r = \left(R^2 + x^2\right)^{1/2}$

अतः $$E = \frac{qx}{4\pi \in_0 \left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{kqx}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

प्रतिबंध $x >> R$ के लिए उपरोक्त सूत्र

$$E = \frac{kqx}{x^3} = \frac{kq}{x^2}$$

में लघुकृत हो जाता है। यह सूत्र किसी बिन्दु आवेश q से x दूरी पर स्थित बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र के सूत्र के समान ही है। अतः अक्ष पर दूरस्थ बिन्दुओं के लिए वलय इस प्रकार व्यवहार करती हैं मानो इसका सम्पूर्ण आवेश इसके केन्द्र पर संकेन्द्रित है।

उदाहरण 2.5 एक समान रूप से आवेशित एक वलय एवं एक गोले दोनों की त्रिज्या R है। दोनों पर आवेश q है। गोले का केन्द्र वलय की अक्ष पर विद्यमान है तथा वलय के केन्द्र से $R\sqrt{3}$ दूरी पर है। गोले एवं वलय के मध्य विद्युत बल का मान ज्ञात कीजिए।

हल: वलय की अक्ष पर x दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{qx}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

दिया है $x = R\sqrt{3}$ अतः गोले के केन्द्र पर वलय के कारण विद्युत क्षेत्र

$$E = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{qR\sqrt{3}}{\left(4R^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{\sqrt{3}q}{8R^2} = \frac{\sqrt{3}q}{32\pi \in_0 R^2}$$

सममितता से एक समान आवेशित गोले पर उपस्थित समस्त आवेश q, इसके केन्द्र पर संकेन्द्रित माना जा सकता है

अतः गोले एवं वलय के मध्य विद्युत बल $F = qE$

$$F = \frac{\sqrt{3}q^2}{32\pi \in_0 R^2}$$

2.3 गाउस का नियम (Gauss's Law)

गाउस नियम के अनुसार, विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी काल्पनिक बन्द पृष्ठ से सम्बद्ध कुल विद्युत फ्लक्स उस बन्द पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश एवं $1/\in_0$ के गुणनफल के समान होता है।

अर्थात् $$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0} \qquad \ldots(2.18)$$

यदि बन्द पृष्ठ निर्वात् या वायु के स्थान पर किसी परा वैद्युत माध्यम में है तो

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0} \qquad \ldots(2.19)$$

उपर्युक्त समीकरण परावैद्युतीय माध्यमों के लिए गाउस नियम है।

गाउस नियम से सम्बन्धित महत्त्वपूर्ण बिन्दु यह है कि

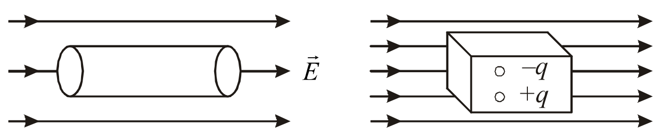
(i) यहाँ $\sum q$, बन्द पृष्ठ में परिबद्ध आवेशों के बीजगणितीय योग को व्यक्त करता है।

(ii) कुल विद्युत फ्लक्स, पृष्ठ से निर्गत विद्युत फ्लक्स (धनात्मक चिन्ह) एवं पृष्ठ में प्रवेशित विद्युत फ्लक्स (ऋणात्मक चिन्ह) के बीजगणितीय योग के समान होता है।

(iii) गाउस नियम के अनुप्रयोग के लिए चयनित पृष्ठ को गाउसियन पृष्ठ कहते है। यह एक स्वैच्छिक काल्पनिक बंद पृष्ठ होता अर्थात् इसकी आकृति गोलीय, बेलनाकार, घनाकार या कोई भी अन्य स्वेच्छ आकृति हो सकती है। यद्यपि निकाय में उपस्थित आवेश वितरण में सममितता यदि उपस्थित हो तो उसके अनुरूप उचित गाउसियन पृष्ठ का चयन E के परिकलन में सहायता देता है।

(iv) गाउस नियम, केवल बन्द पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश पर निर्भर करता है फलक्स ϕ का मान, गाउसियन पृष्ठ के आकार, आकृतियाँ क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता। यह केवल परिबद्ध आवेश की मात्रा, प्रकृति व माध्यम पर निर्भर करता है। यह पृष्ठ में आवेशों की स्थिति एवं वितरण पर निर्भर नहीं करता। गाउस का नियम, परिबद्ध आवेशों की गतिशीलता या स्थिर अवस्था पर निर्भर नहीं करता। ध्यान दे कि कूलॉम नियम केवल स्थिर आवेशों के लिए ही सही है। अतः इस संदर्भ में गाउस नियम कूलॉम नियम से अधिक व्यापक है।

(v) यदि किसी बन्द पृष्ठ में परिबद्ध कुल आवेश शून्य है तो पृष्ठ से सम्बद्ध कुल विद्युत फलक्स शून्य होता है, चाहे पृष्ठ किसी समान या असमान विद्युत क्षेत्र में स्थित हो। ऐसे पृष्ठ में प्रवेशित फलक्स एवं पृष्ठ से निर्गत फलक्स समान होते हैं। (जैसे चित्र 2.4 (अ) एवं (ब))



चित्र 2.4 एक समान विद्युत क्षेत्र में बन्द पृष्ठ

अर्थात् $\phi_{\text{कुल}} = \phi_{\text{प्रवेशित}} + \phi_{\text{निर्गत}} = 0$ ...(2.20)

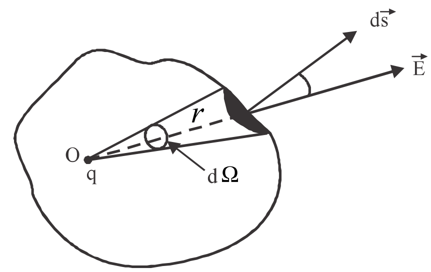
(vi) गाउस नियम केवल उन सदिश क्षेत्रों के लिए वैध है जो व्युत्क्रम वर्ग नियम का पालन करते हैं।

(vii) गाउसयिन पृष्ठ पर किसी बिन्दु पर $\vec{E}$ उस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र का परिणामी मान है। यह $\vec{E}$, पृष्ठ के भीतर परिबद्ध आवेश तथा पृष्ठ के बाहर आवेश (यदि कोई हों के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्रों के सदिश योग से प्राप्त विद्युत क्षेत्रों से प्राप्त परिणामी विद्युत क्षेत्र है। तथापि गाउस नियम के दक्षिण पक्ष में $\in q$ केवल पृष्ठ में परिबद्ध कुल आवेश को ही निरूपित करता है। कुछ विशिष्ट प्रकरणों में किसी बंद पृष्ठ से निर्गत कुल फ्लक्स शून्य होने पर भी गाउसियन पृष्ठ पर $\vec{E}$ का अशून्य मान प्राप्त हो सकता है। उदाहरण के लिए यदि गाउसियन पृष्ठ एक द्विध्रुव को परिबद्ध करता है तब पृष्ठ में परिबद्ध कुल आवेश शून्य होने से ϕ शून्य होगा पर द्विध्रुव के कारण गाऊसियन पृष्ठ के किसी बिन्दु पर अशून्य $\vec{E}$ प्राप्त होगा।

(viii) बंद पृष्ठ से बाहर स्थित आवेशों का पृष्ठ से निर्गत फलक्स में कोई योगदान नहीं होता।

2.3.1 कूलॉम नियम से गाउस नियम की उपपत्ति (Proof of Gauss's Law Using Coulomb's Law)

माना बिन्दु O पर एक धनावेश q स्थित है जो एक स्वेच्छ आकार के बन्द पृष्ठ में परिबद्ध है।



चित्र 2.5 ठोस कोण

पृष्ठ के किसी क्षेत्रफल अल्पांश $d\vec{s}$, जिसकी आवेश से दूरी r है पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता, कूलॉम नियम से

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad ...(2.21)$$

अतः क्षेत्रफल अल्पांश से सम्बद्ध विद्युत फलक्स

$$d\phi = Eds\cos\theta = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r^2}ds\cos\theta$$

अतः सम्पूर्ण बन्द पृष्ठ से सम्बद्ध कुल विद्युत फलक्स

$$\phi = \oint_S \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{q}{r^2}ds\cos\theta = \frac{q}{4\pi\in_0}\oint_S \frac{ds\cos\theta}{r^2} \qquad ...(2.22)$$

$\therefore \quad \dfrac{ds\cos\theta}{r^2} = d\Omega$ (क्षेत्रफल अल्पांश द्वारा बिन्दु O पर बना घन कोण)

$$\phi = \frac{q}{4\pi\in_0}\oint_S d\Omega = \frac{4\pi q}{4\pi\in_0} \quad \left[\because \oint_s d\Omega = 4\pi\right]$$

या $$\phi = \frac{q}{\in_0} \qquad ...(2.23)$$

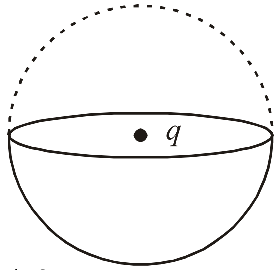
यही गाउस नियम है। जहाँ $\oint_S d\Omega = 4\pi$ (संपूर्ण बन्द पृष्ठ द्वारा आन्तरिक बिन्दु पर बना कुल घन कोण)

उदाहरण 2.6 0.03 m त्रिज्या के एक गोलीय पृष्ठ के केन्द्र पर 7.6mC आवेश स्थित है। गोलीय पृष्ठ से सम्बद्ध विद्युत फलक्स का मान ज्ञात कीजिए। पृष्ठ की त्रिज्या दोगुनी करने पर फलक्स के मान में क्या परिवर्तन होगा?

हलः $\because \phi = \dfrac{q}{\in_0} = \dfrac{7.6\times10^{-6}}{8.85\times10^{-12}} = 8.6\times10^{5}\ \text{Nm}^2\text{C}^{-1}$

गोले की त्रिज्या दोगुनी करने पर फ्लक्स अपरिवर्तित रहेगा क्योंकि गाउस नियम पृष्ठ के आकार पर निर्भर नहीं करता।

उदाहरण 2.7 चित्रानुसार एक बिन्दु आवेश q, एक अर्द्धगोलीय पृष्ठ के केन्द्र पर स्थित है। पृष्ठ से पारित कुल विद्युत फ्लक्स का मान ज्ञात कीजिए।

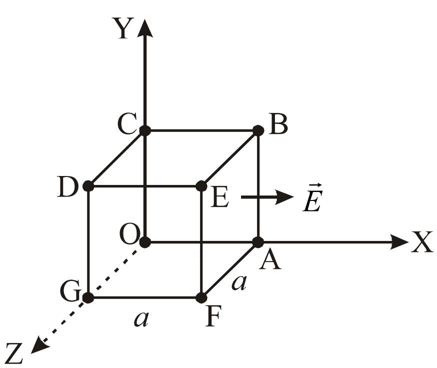


हलः गाउस नियम में विद्युत फ्लक्स, पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश पर निर्भर करता है। अतः आवेश को परिबद्ध करने के लिए तथा सममिति को ध्यान में रखते हुए हम अर्द्धगोले के समान, एक अन्य अर्द्धगोले की कल्पना करते हैं।

अब गाउस नियम से पूर्ण गोले (या दो अर्द्धगोलों) से पारित कुल विद्युत फ्लक्स $\phi' = \frac{q}{\epsilon_0}$

अतः एक अर्द्धगोले से पारित कुल विद्युत फ्लक्स $\phi = \frac{\phi'}{2} = \frac{q}{2\epsilon_0}$

उदाहरण 2.8 चित्रानुसार एक घन विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = E_0 x\hat{i}$ में स्थित है। घन की प्रत्येक भुजा $a = 1\text{cm}$ है तथा नियतांक $E_0 = 2.5\times10^5\ \text{NC}^{-1}\text{m}^{-1}$ है। घन से पारित कुल विद्युत फ्लक्स एवं घन द्वारा परिबद्ध आवेश का मान ज्ञात कीजिए।



हलः घन के प्रत्येक फलक का क्षेत्रफल

$$S = a^2$$

अतः घन से पारित कुल विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \left(\vec{E}\cdot\vec{S}\right)_{\text{ABEF}} + \left(\vec{E}\cdot\vec{S}\right)_{\text{OCDG}} + \left(\vec{E}\cdot\vec{S}\right)_{\text{BCDE}} + \left(\vec{E}\cdot\vec{S}\right)_{\text{OAFG}} + \left(\vec{E}\cdot\vec{S}\right)_{\text{OABC}} + \left(\vec{E}\cdot\vec{S}\right)_{\text{DEFG}}$$

या $$\phi = \left(E_0 x\hat{i}\cdot a^2\hat{i}\right)_{\text{ABEF}} + \left(E_0 x\hat{i}\cdot a^2\left(-\hat{i}\right)\right)_{\text{OCDG}} + 0+0+0+0$$

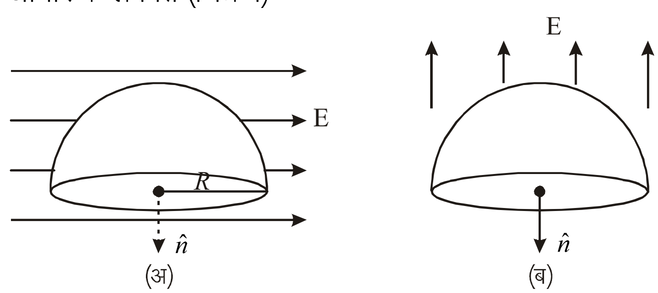
क्योंकि पृष्ठ BCDE, OAFG, OABC एवं DEFG पर $\vec{E}\perp\vec{S}$ है, पुनः पृष्ठ ABEF पर $x = a$ तथा पृष्ठ OCDG पर $x = 0$ अतः $\phi = E_0 a^3 - 0 = E_0 a^3$

$$= \left(2.5\times10^5\right)\times\left(1\times10^{-2}\right)^3 = 0.25\ \text{Nm}^2\text{C}^{-1}$$

अतः गाउस नियम से परिबद्ध आवेश

$$q = \epsilon_0\,\phi = 8.85\times10^{-12}\times0.25 = 2.21\times10^{-12}\ \text{C}$$

उदाहरण 2.9 एक अर्द्धगोलाकार पिण्ड, किसी एकसमान विद्युत क्षेत्र E में रखा है।इसके वक्र पृष्ठ से संबद्ध फ्लक्स क्या है यदि विद्युत क्षेत्र है (अ) इसके आधार के समान्तर (चित्र अ) तथा (ब) इसके आधार के लंबवत (चित्र ब)



हलः अर्द्धवृत्ताकार पिण्ड को एक बंद वस्तु की तरह माने जो एक वक्र पृष्ठ तथा एक समतल आधार (काटक्षेत्र) से निर्मित है तो पिण्ड से संबद्ध कुल विद्युत फ्लक्स शून्य होगा क्योंकि पिण्ड में कोई आवेश परिबद्ध नहीं हैं। अतः यदि ϕ_C व ϕ_b क्रमशः वक्र पृष्ठ तथा आधार की संबद्ध फ्लक्स है तो

$$\phi = \phi_c + \phi_s = 0$$

या $$\phi_c = -\phi_b$$

चित्र (अ) की परिस्थिति में आधार का सदिश क्षेत्रफल, $\vec{E}$ के लंबवत है अतः $\phi_b = 0$ तथा इस कारण $\phi_c = 0$

चित्र (ब) की परिस्थिति में आधार का सदिश क्षेत्रफल $\vec{E}$ के प्रति समान्तर है अतः $\phi_b = Es\cos180^o = -E\pi R^2$

अतः $$\phi_C = -\phi_b = E\cdot\pi R^2$$

(यहाँ यह स्पष्ट है कि वक्र पृष्ठ से संबद्ध फ्लक्स काट क्षेत्र की त्रिज्या पर निर्भर है पर वक्र पृष्ठ की आकृति पर नहीं)

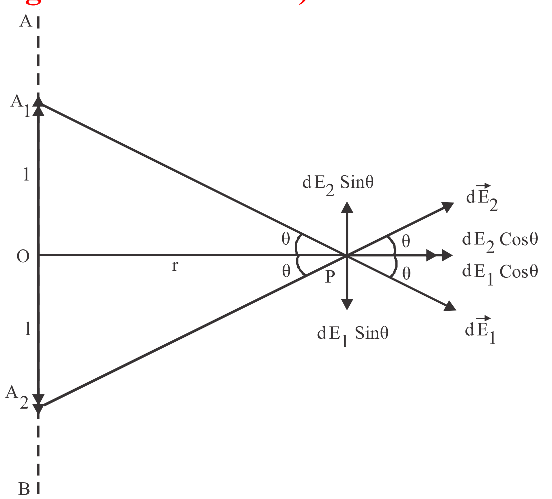
2.4 गाउस नियम के अनुप्रयोग (Applications of Gauss's Law)

गाउस नियम

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0}$$

की सहायता से हम किसी सममित आवेश वितरण के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कर सकते हैं। इसके लिए हम एक सममित बन्द पृष्ठ (गाउसियन पृष्ठ) की कल्पना करते हैं जिस पर (1) विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिमाण एक समान हो तथा (2) पृष्ठ के चयनित भागों के सदिश क्षेत्रफल की दिशा, $\vec{E}$ विद्युत क्षेत्र के समान्तर अथवा लम्बवत् हों।

2.4.1 गाउस के नियम से अनन्त रेखीय आवेश (आवेशित तार) के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Electric Field Intensity Due to Infinite Line Charge from Gauss Law)



चित्र 2.6 अनन्त रेखीय आवेश वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र

माना AB एक अपरिमित रेखीय आवेश है जिस पर रेखीय आवेश घनत्व λ है। हमें इससे लम्बवत् दूरी $OP = r$ पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है।

यदि हम बिन्दु O के दोनों ओर समान दूरी ℓ पर दो समान लम्बाई के अल्पांश A_1 व A_2 लें (चित्र 2.6) तो दोनों अल्पांश के कारण बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रताओं $d\vec{E}_1$ व $d\vec{E}_2$ के परिमाण समान होते हैं परंतु इनकी दिशाएँ क्रमशः A_1P एवं A_2P के अनुदिश हैं। इन विद्युत क्षेत्रों को रेखा OP एवं उसके लम्बवत् दिशा में वियोजित करने पर लम्बवत् घटक $dE_1 \sin\theta$ तथा $dE_2 \sin\theta$ परस्पर निरस्त हो जाते हैं जबकि रेखा OP के अनुदिश घटक $dE_1 \sin\theta$ तथा $dE_2 \sin\theta$ परस्पर जुड़ जाते हैं।

इसी प्रकार संपूर्ण रेखीय आवेश को सममित अल्पांश युग्मों में विभक्त किया जा सकता है। प्रत्येक युग्म का परिणामी विद्युत क्षेत्र रेखा OP के अनुदिश होगा। अतः हम कह सकते हैं कि संपूर्ण रेखीय आवेश के कारण बिन्दु P पर परिणामी विद्युत क्षेत्र बिन्दु को तार से जोड़ने वाली लम्बवत् रेखा के अनुदिश होता है अर्थात् त्रिज्यीय दिशा में होता है जो रेखीय आवेश की प्रकृति के अनुरूप आवेश से परे या आवेश की ओर इंगित करता है। यह परिणाम सममितता से भी देखा जा सकता है। मान ले कि जब आप तार को देख रहे हैं कोई इस तार को इसके लंबवत अक्ष के परितः अथवा सिरों से सिरे के परितः घुमा देता है तब भी आप कोई परिवर्तन अनुभव नहीं करेंगे अतः इस समस्या में केवल एक ही दिशा अद्वितीय परिभाषित है जो कि रेखीय आवेश की त्रिज्यीय रेखा के अनुदिश है।

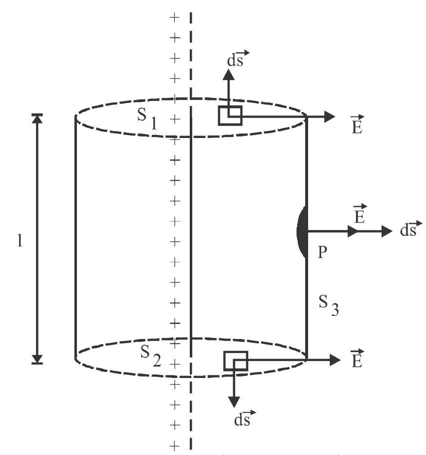
अब रेखीय आवेश को अक्ष मानते हुए एक ℓ लम्बाई के सममित बेलनाकार पृष्ठ की कल्पना करते हैं जिसके वक्र पृष्ठ पर बिन्दु P स्थित है।

गाउसियन पृष्ठ में परिबद्ध आवेश

$$\Sigma q = \lambda \ell \qquad \ldots(2.24)$$

अतः गाउस नियम से

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0} \qquad \ldots(2.25)$$



चित्र 2.7 अनन्त विस्तारित आवेशित तार में गाउस का नियम

हम बेलनाकार बन्द पृष्ठ को तीन भागों में विभक्त कर सकते हैं (i) ऊपरी वृत्ताकार पृष्ठ S_1 (ii) निचला वृत्ताकार पृष्ठ S_2 एवं (iii) वक्र पृष्ठ S_3

अतः समीकरण (2.25) को निम्नानुसार लिख सकते हैं

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

या $$\int_{S_1} Eds\cos 90^\circ + \int_{S_2} Eds\cos 90^\circ + \int_{S_3} Eds\cos 0^\circ = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

अतः $\quad 0+0+\int_{S_3} E ds = \frac{\lambda \ell}{\in_0} \quad \ldots (2.26)$

$\because$ बेलन के वक्र पृष्ठ पर सभी बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र का परिमाण एक समान है अतः समीकरण (2.26) से

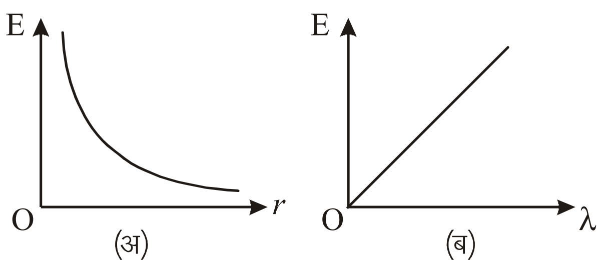
$$E\int_S ds = \frac{\lambda \ell}{\in_0}$$

या $\quad E \times 2\pi r \ell = \frac{\lambda \ell}{\in_0} \qquad \because \int_{S_3} ds = 2\pi r \ell$

या $\quad E = \frac{\lambda}{2\pi r \in_0} \quad \ldots (2.27)$

सदिश रूप में $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \in_0 r}\hat{r} \quad \ldots (2.28)$

स्पष्टतः अनन्त रेखीय आवेश वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता दूरी के व्युत्क्रमानुपाती एवं रेखीय आवेश घनत्व के समानुपाती होती है। अर्थात्



चित्र 2.8 अनन्त आवेशित तार में विद्युत क्षेत्र निर्भरता

$$E \propto \frac{1}{r} \text{ एवं } E \propto \lambda \quad \ldots (2.29)$$

अतः संगत ग्राफ चित्र (2.8) के अनुसार प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 2.10 एक अपरिमित विस्तार के सीधे तार पर रेखीय आवेश घनत्व $2\,\mu C/m$ है। इस रेखीय आवेश से वायु में 20 cm दूरी पर स्थित बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\because \quad E = \frac{\lambda}{2\pi \in_0 r} = \frac{2\lambda}{4\pi \in_0 r}$

$$= 9\times10^9 \times \frac{2\times2\times10^{-6}}{20\times10^{-2}}$$

या $\quad E = 1.8\times10^5 \text{ NC}^{-1}$

उदाहरण 2.11 एक इलेक्ट्रॉन 0.1 m त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर अनन्त रेखीय आवेश के चारों ओर चक्कर लगा रहा है। यदि रेखीय आवेश घनत्व 10^{-6} cm^{-1} है तो इलेक्ट्रॉन के वेग का मान ज्ञात कीजिए। [दिया है $m_e = 9.0\times10^{-31}$ kg, $e = 1.6\times10^{-19}$ C]

हलः इलेक्ट्रॉन पर रेखीय आवेश के कारण विद्युत बल

$$F = qE = eE = \frac{1}{4\pi \in_0}\frac{2e\lambda}{r}$$

यह बल इलेक्ट्रॉन को आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है अतः

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{2e\lambda}{4\pi \in_0 r}$$

या $\quad v = \sqrt{\frac{2e\lambda}{4\pi \in_0 m_e}}$

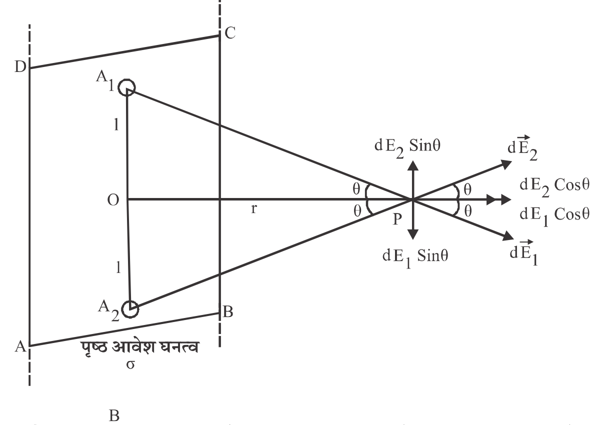
$$= \sqrt{\frac{9\times10^9 \times 2\times1.6\times10^{-19}\times10^{-6}}{9.0\times10^{-31}}}$$

$$v = \sqrt{2\times16\times10^{14}} = 4\sqrt{2}\times10^7$$

$$= 5.65\times10^7 \text{ ms}^{-1}$$

2.4.2 अपरिमित समरूप आवेशित अचालक परत के कारण विद्युत क्षेत्र (Electric Field due to an Infinite Uniformly Charged Non-conducting Sheet)

माना ABCD एक समरूप आवेशित अपिरिमित विस्तार की किसी अचालक परत का एक भाग है (चित्र 2.9)। परत पर एकसमान पृष्ठ आवेश घनत्व σ है। हमें इससे लम्बवत् दूरी $OP = r$ पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है।



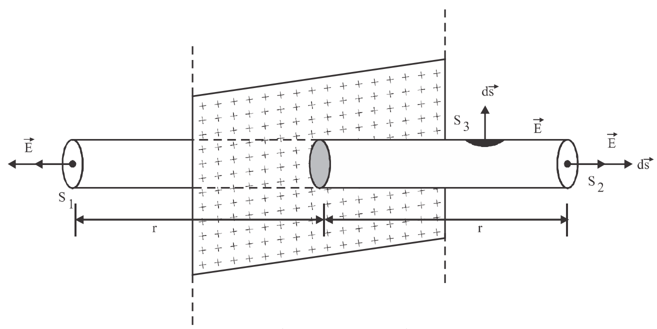
चित्र 2.9 अनन्त आवेशित अचालक के कारण विद्युत क्षेत्र

यदि हम बिन्दु O के सममित दोनों ओर समान दूरी ℓ पर दो समान क्षेत्रफल अल्पांश A_1 व A_2 लें तो दोनों अल्पांशों के कारण बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रताओं dE_1 एवं dE_2 के परिमाण समान होते हैं। परन्तु इनकी दिशाएँ क्रमशः A_1P एवं A_2P के अनुदिश हैं। इन विद्युत क्षेत्रों को रेखा OP एवं उसके लम्बवत् दिशा में वियोजित करने पर लम्बवत् घटक $dE_1 \sin\theta$ तथा $dE_2 \sin\theta$ परस्पर निरस्त हो

जाते हैं जबकि रेखा OP के अनुदिश घटक $dE_1 \cos\theta$ तथा $dE_2 \cos\theta$ परस्पर जुड़ जाते हैं।

इसी प्रकार संपूर्ण परत को सममित अल्पांश युग्मों में विभक्त कर सकते हैं। प्रत्येक युग्म का परिणामी विद्युत क्षेत्र रेखा OP के अनुदिश होगा। अतः हम कह सकते हैं कि संपूर्ण परत का बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र, बिन्दु को परत से जोड़ने वाली लम्बवत् रेखा के अनुदिश होता है।

अब एक S अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल एवं $2r$ लम्बाई के बेलनाकार पृष्ठ की कल्पना करते हैं जिसके वृत्तीय फलक पर बिन्दु P स्थित है तथा परत बेलन को दो समान भागों में बाँटती है (चित्र 2.10)।



चित्र 2.10 अनन्त आवेशित परत में गाउस का नियम

इस गाउससियन पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश

$$\sum q = \sigma S \quad \ldots (2.30)$$

अतः गाउस नियम से सम्पूर्ण गाउसियन पृष्ठ से पारित कुल विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad \ldots (2.31)$$

हम बेलनाकार बन्द पृष्ठ को तीन भागों (i) वृत्तीय फलक (बाँयी ओर) S_1 (ii) वृत्तीय फलक (दाँयी ओर) S_2 एवं (iii) वक्र पृष्ठ S_3 से बना मान सकते हैं।

अतः समीकरण (2.31) को निम्नानुसार लिखा जा सकता है

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad \ldots (2.32)$$

पृष्ठ S_1 व S_2 पर $\vec{E}$ एवं $d\vec{s}$ समान दिशा में हैं अतः इन पर $\vec{E} \cdot d\vec{s} = Eds$ जबकि पृष्ठ S_3 पर $\vec{E}$ व $d\vec{s}$ परस्पर लम्बवत् हैं अतः इस पर $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ होगा। अतः समीकरण (2.32) से

$$\int_{S_1} Eds + \int_{S_2} Eds + 0 = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$\because$ पृष्ठ S_1 व S_2 पर प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र एक समान है अतः

$$E\int_{S_1} ds + E\int_{S_2} ds = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$\because$ $$\int_{S_1} ds = \int_{S_2} ds = S$$

या $$ES + ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

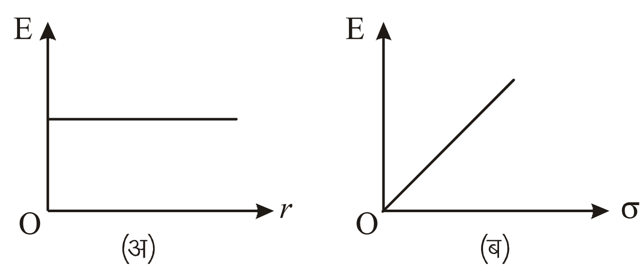
या $$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

या $$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \ldots (2.33)$$

सदिश रूप में $$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} \quad \ldots (2.34)$$

जहाँ $\hat{n}$, परत के अभिलम्बवत् दिशा में इकाई सदिश है।

स्पष्टतः अपरिमित समरूप आवेशित परत के कारण विद्युत क्षेत्र, दूरी पर निर्भर नहीं करता अर्थात् यह एक समान विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करती है। यदि अपरिमित आकार की नहीं है तो भी पट्टिका के निकट (किन्तु किनारों के निकट नहीं) स्थित बिन्दुओ के लिए जहाँ बिन्दुओं की पट्टिका से दूरी पट्टिका की विमाओं से बहुत कम है भी यह सूत्र सन्निकट रूप से लागू किया जा सकता है।



चित्र 2.11 अनन्त आवेशित परत में विद्युत क्षेत्र की निर्भरता

उदाहरण 2.12 एक अनन्त विस्तार की अचालक परत के 1 cm^2 क्षेत्रफल में 17.70 μC आवेश है। परत के निकट वायु में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

हलः पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma = \frac{q}{A} = \frac{17.70\times10^{-6} C}{10^{-4} m^2}$

$$\sigma = 17.70\times10^{-2}\ \mathrm{C/m^2}$$

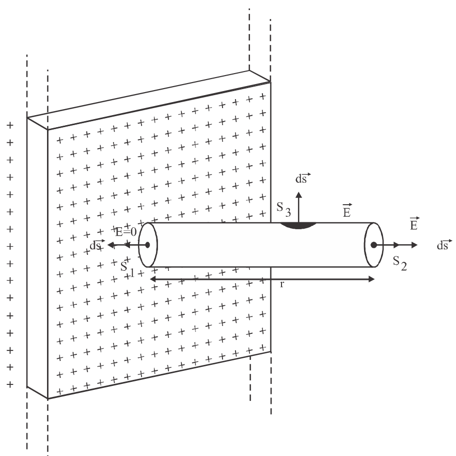
अतः विद्युत क्षेत्र

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{17.70\times10^{-2}}{2\times8.85\times10^{-12}} = 10^{10}\ \mathrm{NC^{-1}}$$

2.4.3 समरूप आवेशित अपरिमित चालक पट्टिका के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Electric Field Intensity due to an Uniformly Charged Infinite Conducting Plate)

अपरिमित समरूप आवेशित चालक पट्टिका के कारण निकट स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दिशा, अचालक परत की भांति पट्टिका के अभिलम्बवत् बिन्दु को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश होती है जिसे ठीक अचालक परत की भांति ज्ञात किया जा सकता है।

अचालक परत एवं चालक पट्टिका में मूलभूत अन्तर यह है कि परत पर आवेश उसी स्थान पर विद्यमान होता है जहाँ दिया जाता है जबकि चालक पट्टिका में यह उसके दोनों पृष्ठों पर समानरूप से विद्यमान होता है तथा चालक पट्टिका के आन्तरिक भाग में विद्युत क्षेत्र शून्य होता है।



चित्र 2.12 आवेशित पट्टिका चालक में गाउस नियम

माना चालक पट्टिका पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ है। पट्टिका से r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है। चित्र (2.12) के अनुसार एक S अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल एवं r लम्बाई के बेलनाकार गाउसियन पृष्ठ की कल्पना करते हैं तब

पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश $\sum q = \sigma S$ ...(2.35)

गाउस नियम से बेलनाकार पृष्ठ से सम्बद्ध विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad \ldots(2.36)$$

बेलनाकार गाउसियन पृष्ठ को तीन भागों (i) बाँयी ओर का वृत्तीय फलक S_1 (ii) दाँयी ओर का वृत्तीय फलक S_2 एवं (iii) वक्र पृष्ठ S_3 में विभक्त किया जा सकता है। अतः समीकरण (2.36) को निम्नानुसार लिखा जा सकता है।

$$\int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad \ldots(2.37)$$

पृष्ठ S_1, पट्टिका के आन्तरिक भाग की ओर दिष्ट है अतः इस पर E = 0 जबकि पृष्ठ S_3 पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E एवं क्षेत्रफल परस्पर लम्बवत् है अतः S_3 पर $\vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$ होगा जबकि पृष्ठ S_2 पर $\vec{E}$ व $d\vec{s}$ समान दिशा में है एवं S_2 के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र एकसमान है अतः समीकरण (2.37) से

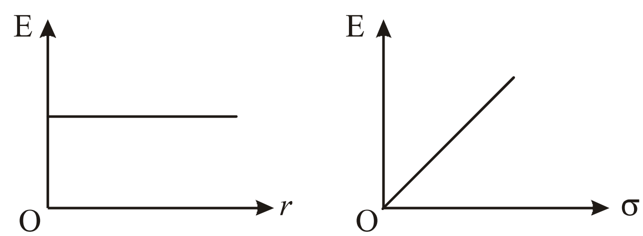
$$0 + E\int_{S_2} ds + 0 = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

या $$ES = \frac{\sigma s}{\epsilon_0}$$

या $$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \ldots(2.38)$$

सदिश रूप में $$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} \quad \ldots(2.39)$$

जहाँ $\hat{n}$, पट्टिका के अभिलम्बवत् दिशा में इकाई सदिश है। स्पष्टतः समरूप आवेशित अपरिमित चालक पट्टिका के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता दूरी पर निर्भर नहीं करती अर्थात् इससे एक समान विद्युत क्षेत्र प्राप्त होता है। यह परिणाम परिमित आकार की चालक पट्टिका के निकटस्थ बिन्दुओ के लिए भी सन्निकटतः लागू होता है



चित्र 2.13 आवेशित चालक परत के लिए विद्युत क्षेत्र निर्भरता

उदाहरण 2.13 एक अपरिमित चालक पट्टिका पर पृष्ठ आवेश घनत्व $4\times10^{-6}\,\text{Cm}^{-2}$ है। पट्टिका के निकट एक आवेश -2×10^{-6} C रखा गया है। आवेश पर लगने वाले विद्युत बल का मान क्या होगा?

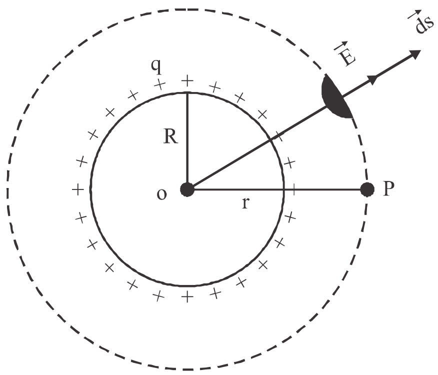
हल: पट्टिका के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$

आवेश q पर बल

$$F = qE = \frac{q\sigma}{\epsilon_0} = \frac{2\times10^{-6}\times4\times10^{-6}}{8.85\times10^{-12}} = \frac{8}{8.85}$$

$$F = 0.903\,\text{N}$$

2.4.4 समरूप आवेशित गोलीय कोश के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Electric Field Intensity due to an Uniformly Charged Spherical Shell)



चित्र 2.14 समरूप गोलीय कोश में विद्युत क्षेत्र

माना R त्रिज्या के गोलीय कोश के पृष्ठ पर Q आवेश एक समान रूप से वितरित है। तब गोलीय कोश पर पृष्ठ आवेश घनत्व

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi R^2} \qquad \ldots(2.40)$$

इस गोले के केन्द्र से r दूरी पर स्थित बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है। गोले के केन्द्र O को केन्द्र मानकर r त्रिज्या के गोलीय गाउसियन पृष्ठ की कल्पना करते हैं। यहाँ बिन्दु P की तीन स्थितियाँ संभव हैं। (चित्र 2.14)

(अ) जब बिन्दु गोले के बाहर $(r > R)$ स्थित है: इस स्थिति में गाउसियन पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश

$$\Sigma q = Q \qquad \ldots(2.41)$$

अतः गाउस नियम से, गाउसियन पृष्ठ से सम्बद्ध कुल विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q}{\in_0} = \frac{Q}{\in_0} \qquad \ldots(2.42)$$

गोलीय गाउसियन पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$ एवं क्षेत्रफल अल्पांश $d\vec{s}$ दोनों त्रिज्य दिशा में होते हैं अर्थात् दोनों समान दिशा में होते हैं तथा गाउसियन पृष्ठ का प्रत्येक बिन्दु केन्द्र से समान दूरी पर होने के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिमाण समान होता है अतः समीकरण (2.42) से

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S E ds = E \oint_S ds = \frac{Q}{\in_0} \ldots(2.43)$$

$\because \quad \int_S ds = 4\pi r^2 =$ गोलीय गाउसियन पृष्ठ को क्षेत्रफल

अतः $\quad \phi = E \times 4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\in_0}$

या $$E_{out} = \frac{Q}{4\pi \in_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\in_0 r^2} \qquad \ldots(2.44)$$

$\{\because$ समीकरण (2.40) से $\dfrac{Q}{4\pi} = \sigma R^2 \}$

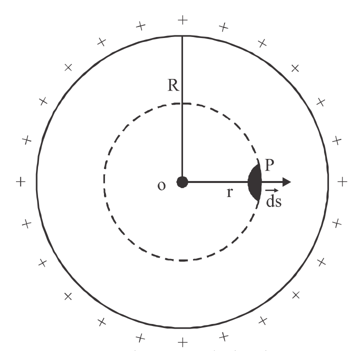
समीकरण (2.44) से स्पष्ट है बाहर स्थित बिन्दुओं के लिए गोलीय कोश इस प्रकार व्यवहार करता है जैसे कि उसका संपूर्ण आवेश, उसके केन्द्र पर स्थित हो। अतः आवेश Q के एक गोलीय कोश द्वारा गोलीय कोश से बाहर रखे किसी आवेशित कण पर बल वही होगा जोकि कोश के केन्द्र पर रखे बिन्दु आवेश Q से उत्पन्न होता। यह एक महत्वपूर्ण परिणाम है।

(ब) जब बिन्दु गोले के पृष्ठ $(r = R)$ स्थित है: इस स्थिति में $r = R$ अतः समीकरण (2.44) से

$$E_S = \frac{Q}{4\pi \in R^2} = \frac{\sigma}{\in_0} \qquad \ldots(2.45)$$

(स) जब बिन्दु गोले के अन्दर $(r < R)$ स्थित है: यदि वह बिन्दु जिस पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है, आवेशित गोले के अन्दर स्थित है तो इस स्थिति में गोलीय गाउसियन पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश शून्य होगा क्योंकि आवेशित गोले पर आवेश केवल पृष्ठ पर स्थित है। (चित्र 2.15)

$$\Sigma q = 0$$



चित्र 2.15 समरूप आवेशित गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र

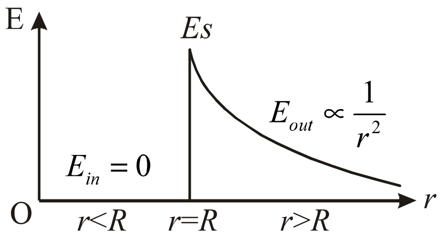
अतः गाउस नियम से गाउसियन पृष्ठ से निर्गत विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q}{\varepsilon_0} = 0$$

$\because$ $ds \neq 0$ एवं $\vec{E}$ व $d\vec{s}$ परस्पर लम्बवत् नहीं हैं अतः गोलीय कोश के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य होती है।

अर्थात् $$E_{in} = 0 \qquad \ldots(2.46)$$

अतः यदि कोई आवेशित कण ऐसे आवेशित गोलीय कोश के भीतर होता तो इस पर कोश द्वारा कोई बल नहीं लगता।



चित्र 2.16 समरूप आवेशित गोलीय कोश में दूरी के साथ विद्युत क्षेत्र में परिवर्तन

चित्र (2.16) में समरूप आवेशित गोलीय कोश के कारण गोले के केन्द्र से r दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को दूरी के साथ आरेखित किया गया है।

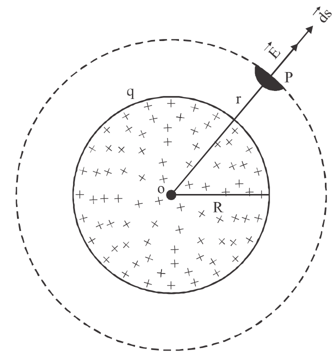
2.4.5 समरूप आवेशित चालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Electric Field Intensity due to Uniformly Charged Conducting Sphere)

यदि किसी विलगित चालक को कुछ अतिरिक्त आवेश दिया जाए तो यह सदैव उसके बाह्य पृष्ठ पर ही वितरित होता हैं कोई भी अतिरिक्त आवेश इसके भीतरी भाग में नहीं रह सकता। यह तर्क संगत भी है क्योंकि समान प्रवृत्ति के आवेश परस्पर प्रतिकर्षण करते हैं तथा चूंकि आवेश चालक में गति कर सकते हैं अतः यदि चालक को अतिरिक्त ओवश दिया जाए तो प्रतिकर्षण के कारण अतिरिक्त आवेश परस्पर इतनी दूर जाने को प्रवृत होंगे जितना कि ये जा सकते हैं अर्थात् सतह पर आ जाएँगे। स्थिर विद्युतीय परिस्थितियों में चालकों के भीतर विद्युत क्षेत्र भी शून्य होना चाहिए। धात्विक चालको के लिए इसे आसानी से समझा जा सकता हैं यदि चालक के भीतर विद्युत क्षेत्र शून्य नहीं होता तो इसके भीतर उपस्थित मुक्त इलेक्ट्रॉन बल अनुभव कर गति करते तथा धारा प्रवाहित होती। विलगित चालक में इस प्रकार की शाश्वत धारा प्रेक्षित नहीं होती अतः चालकों के भीतर विद्युत क्षेत्र प्रकट होता है पर अतिरिक्त आवेश इतनी तेजी (लगभग नैनो सेकंड समय में) अपने आप को पुनः वितरित कर सतह पर आ जाते हैं ताकि आन्तरिक विद्युत क्षेत्र शून्य हो जाता है। तब अतिरिक्त आवेशों की गति समाप्त हो जाती है। अब प्रत्येक आवेश पर परिणामी विद्युत बल शून्य है यह अवस्था स्थिर विद्युत साम्य कहलाती है।

अब चूंकि सम्पूर्ण आवेश पृष्ठ पर ही है अतः इस प्रकार एक समरूप आवेशित चालक गोला, एक समरूप आवेशित गोलीय कोश की भांति ही होता है तथा इसकी विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन ठीक अनुच्छेद 2.4.4 की तरह किया जा सकता है।

2.4.6 समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (Electric Field Intensity due to Uniformly Charged Non-Conducting Sphere)

अचालक वस्तु को दिया गया आवेश उसी स्थान पर विद्यमान रहता है जहाँ उसे दिया गया है।



चित्र 2.17 समरूप आवेशित अचालक गोले के बाह्य बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र

माना एक R त्रिज्या का अचालक गोला, Q आवेश से एकसमान रूप से आवेशित है तो यह आवेश उसके संपूर्ण आयतन में एकसमान रूप से वितरित होता है। अतः आयतन आवेश घनत्व

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3} \qquad \ldots(2.47)$$

यदि गोले के केन्द्र O से r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करनी है तो गोले के केन्द्र O को केन्द्र मानकर r त्रिज्या के गोलीय गाउसियन पृष्ठ की कल्पना करते हैं। यहाँ बिन्दु P की तीन स्थितियाँ संभव हैं।

(अ) जब बिन्दु गोले के बाहर $(r > R)$ स्थित है: इस स्थिति में पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश

$$\Sigma q = Q \qquad \ldots(2.48)$$

अतः गाउस नियम से, गाउसियन पृष्ठ से सम्बद्ध कुल विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \ldots(2.49)$$

या $$\phi = \oint_S E ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \{\because \text{प्रत्येक बिन्दु पर } \vec{E} \| d\vec{s}\}$$

या $$\phi = E\oint_S ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \{\because \text{प्रत्येक बिन्दु पर } E \text{ एकसमान है}\}$$

या $$\phi = E \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \ldots(2.50)$$

या $$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \ldots(2.51)$$

या $$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{R^3}{r^2}\right) \qquad \ldots(2.52)$$

$$\{\because \text{समीकरण 2.47 से } Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\}$$

सदिश रूप में

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \in_0 r^2}\hat{r} = \frac{\rho}{3\in_0}\left(\frac{R^3}{r^2}\right)\hat{r} \qquad \ldots(2.53)$$

(ब) जब बिन्दु गोले के पृष्ठ पर $(r = R)$ स्थित है: इस स्थिति में $r = R$ अतः समीकरण (2.51), (2.52) एवं (2.53) से

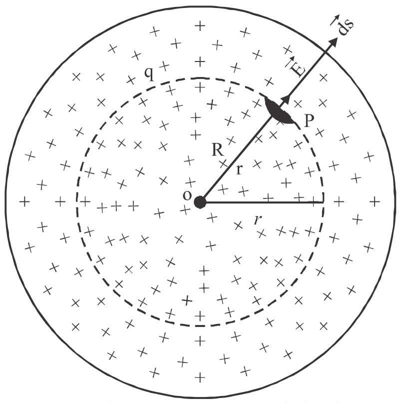
$$E = \frac{Q}{4\pi \in_0 R^2} = \frac{\rho R}{3\in_0} \qquad \ldots(2.54)$$

तथा सदिश रूप में

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \in_0 R^2}\hat{r} = \frac{\rho R}{3\in_0}\hat{r} \qquad \ldots(2.55)$$

समीकरण (2.53) से स्पष्ट है कि समरूप आवेशित कुचालक गोले के लिए बाहरी बिन्दुओं के लिए भी विद्युत क्षेत्र ऐसा व्यवहार करता है मानों इसका समस्त आवेश गोले के केन्द्र पर ही स्थित है।

(स) जब बिन्दु गोले के अन्दर $(r < R)$ स्थित है: जब बिन्दु P गोले के अन्दर है तो गोलीय गाउसियन पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश



चित्र 2.18 समरूप आवेशित अचालक गोले के अंदर विद्युत क्षेत्र

$$Q' = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$Q' = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3} \qquad \ldots(2.56)$$

अतः गाउस नियम से, गाउसियन पृष्ठ से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{Qr^3}{\in_0 R^3}$$

या $$\phi = \oint_S E ds = \frac{Qr^3}{\in_0 R^3}$$

{$\because$ गाउसियन सतह के प्रत्येक बिन्दु पर $\vec{E} \| d\vec{s}$ }

या $$\phi = \oint_S E ds = \frac{Qr^3}{\in_0 R^3}$$

{$\because$ सतह के प्रत्येक बिन्दु पर E एक समान है}

या $$\phi = E \times 4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\in_0 R^3}$$

अतः $$E = \frac{Qr}{4\pi \in_0 R^3} r = \frac{\rho}{3\in_0} r \qquad \ldots(2.57)$$

$$\left\{\because Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right\}$$

सदिश रूप में

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} \qquad \ldots(2.58)$$

गोले के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र (2.57) से किसी $r = 0$ रखने पर

$$E = 0 \qquad \{\because \text{ केन्द्र पर } r = 0\} \ldots(2.59)$$

विभिन्न स्थितियों में प्राप्त परिणामों से स्पष्ट है कि

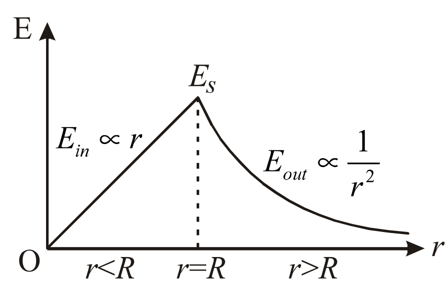
(1) गोले के केन्द्र पर $E = 0$

(2) गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता, केन्द्र से दूरी के समानुपाती होती है। $E_{in} \propto r$

(3) गोले की सतह पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता अधिकतम होती है।

(4) गोले के बाहर, विद्युत क्षेत्र की तीव्रता दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होती है। $E_{out} \propto \frac{1}{r^2}$

अतः समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को दूरी r के साथ चित्र 2.19 के अनुसार, आरेखित किया जा सकता है।



चित्र 2.19 समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र में दूरी के साथ परिवर्तन

उदाहरण 2.14 एक 10 सेमी. त्रिज्या के चालक गोले को $1\,\mu C$ आवेश से आवेशित करने पर (अ) गोले के केन्द्र पर (ब) गोले के केन्द्र से 5 सेमी. दूरी पर (स) गोले के केन्द्र से 10 सेमी दूरी पर तथा (द) गोले के केन्द्र से 15 सेमी. दूरी पर स्थित (वायु में) बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

हल: (अ) चालक गोले के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य होती है।

(ब) $r = 5$ cm, जबकि त्रिज्या $R = 10$ cm अतः बिन्दु गोले का आन्तरिक बिन्दु है। चालक गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है।

(स) $r = 10$ cm, बिन्दु गोले के पृष्ठ पर है अतः

$$E = \frac{Q}{4\pi \in_0 R^2} = 9\times10^9 \times \frac{1\times10^{-6}}{\left(10\times10^{-2}\right)^2}$$

$$= 9\times10^5\ \text{NC}^{-1}$$

(द) $r = 15$ cm, बिन्दु गोले के बाहर स्थित है अतः

अतः $$E = \frac{Q}{4\pi \in_0 r^2} = \frac{9\times10^9 \times 1\times10^{-6}}{\left(15\times10^{-2}\right)^2}$$

$$= 4\times10^5\ \text{NC}^{-1}$$

उदाहरण 2.15 10 सेमी. व्यास के एक गोले के एकसमान रूप से आवेशित किया गया है ताकि इसकी सतह पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $5\times10^5\ \text{Vm}^{-1}$ हो जाती है। गोले के केन्द्र से 25 सेमी. दूरी पर स्थित $5\times10^{-2}\,\mu C$ आवेश पर बल का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना गोले को दिया गया आवेश q है

तब $$E_{\text{सतह}} = \frac{q}{4\pi \in_0 R^2}$$

गोले के बाहर r दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{q}{4\pi \in_0 r^2}$$

अतः $$\frac{E}{E_{\text{सतह}}} = \frac{R^2}{r^2}$$

या $$E = \frac{R^2}{r^2}\times E_{\text{सतह}} = \frac{(5)^2}{(25)^2}\times5\times10^5 = \frac{125\times10^5}{625}$$

$$E = 2\times10^4\ \text{Vm}^{-1}$$

आवेश पर बल $F = q_0 E = 5\times10^{-8}\times2\times10^4$

$$= 10\times10^{-4} = 10^{-3}\ \text{N}$$

उदाहरण 2.16 एक 10 सेमी. त्रिज्या के अचालक गोले पर $0.5\,\mu C$ आवेश एक समान रूप से वितरित है। गोले के (अ) केन्द्र पर तथा केन्द्र से (ब) 8 सेमी. दूर (स) 10 सेमी. दूर (द) 20 सेमी. दूर, वायु में स्थित बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

हल: (अ) गोले के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E = 0$

(ब) जब $r = 8$ सेमी $= 8\times10^{-2}$ m यह बिन्दु गोले का आन्तरिक बिन्दु है अतः

$$E = \frac{Q}{4\pi \in_0 R^3} r$$

$$= \frac{9\times10^9\times0.5\times10^{-6}\times8\times10^{-2}}{\left(10\times10^{-2}\right)^3} = \frac{360}{10^{-3}}$$

$$E = 3.6\times10^5\ \text{V/m}$$

(स) जब $r = 10$ सेमी, बिन्दु गोले की सतह पर स्थित है अतः

$$E = \frac{Q}{4\pi \in_0 R^2}$$

$$= \frac{9\times10^9\times0.5\times10^{-6}}{\left(10\times10^{-2}\right)^2} = 4.5\times10^5\ \text{V/m}$$

(द) जब $r = 20$ सेमी, बिन्दु गोले के बाहर स्थित है अतः

$$E = \frac{Q}{4\pi \in_0 r^2}$$

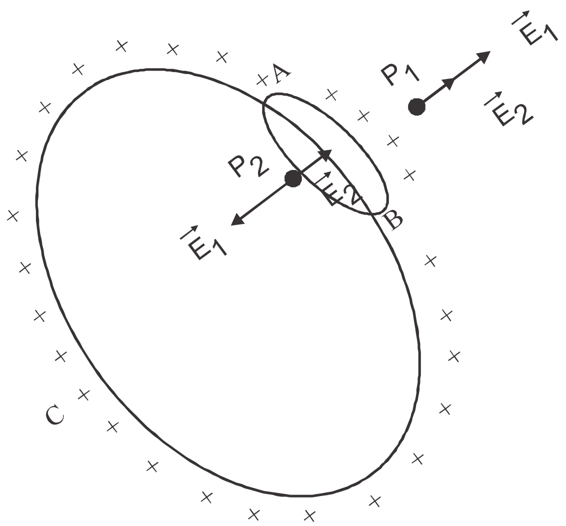
$$= \frac{9\times10^9\times0.5\times10^{-6}}{\left(20\times10^{-2}\right)^2}$$

$$= 1.125\times10^5\ \text{V/m}$$

2.5 आवेशित चालक की सतह पर बल (Force on the Surface of Charged Conductor)

किसी चालक को दिया गया सम्पूर्ण आवेश, उसके पृष्ठ पर वितरित हो जाता है। चालक के किसी छोटे भाग में उपस्थित आवेश पर चालक के शेष भाग में उपस्थित आवेश द्वारा प्रतिकर्षण बल कार्य करता है तथा इस प्रकार चालक पर लिए गए प्रत्येक अल्पांश पर प्रतिकर्षण बल कार्य करेगा एवं चालक की सतह पर कुल बल, सभी अल्पांशों पर लगने वाले बलों के सदिश योग के समान होता है। इस कारण आवेशित चालक पृष्ठ बाहर की ओर एक दाब अनुभव करता है।

माना एक चालक की सतह पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ है। हम चालक के ठीक बाहर एवं ठीक अन्दर, चालक के सापेक्ष दो सममित बिन्दुओं क्रमशः P_1 एवं P_2 पर विचार करते हैं (देखें चित्र 2.20)



चित्र 2.20 आवेशित चालक की सतह पर विद्युत क्षेत्र

क्योंकि आवेशित चालक पृष्ठ के ठीक बाहर विद्युत क्षेत्र $\sigma / \in_0$ होता है अतः बिन्दु P_1 पर विद्युत क्षेत्र

$$E_{P_1} = \frac{\sigma}{\in_0} \qquad \ldots(2.60)$$

चालक के भीतर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है

अतः बिन्दु P_2 पर विद्युत क्षेत्र

$$E_{P_2} = 0 \qquad \ldots(2.61)$$

अब हम चालक को दो भागों (i) अल्पांश AB जिसका क्षेत्रफल ds है तथा (ii) चालक का शेष भाग ACB में विभक्त कर सकते हैं। यदि अल्पांश AB के कारण अपने निकट स्थित बिन्दुओं पर उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}_1$ एवं भाग ACB के कारण $\vec{E}_2$ हैं तो चित्र से

$$E_{P_1} = E_1 + E_2 \qquad \ldots(2.62)$$

(बिन्दु P_1 पर E_1 व E_2 समान दिशा में है)

तथा $$E_{P_2} = E_1 - E_2$$

(बिन्दु P_2 पर E_1 व E_2 परस्पर विपरीत है)

$\ldots(2.63)$

समीकरण (2.61) एवं (2.63) से

$$E_1 - E_2 = 0$$

अर्थात् $$E_1 = E_2 \qquad \ldots(2.64)$$

समीकरण (2.60), (2.62) एवं (2.64) से

$$E_2 + E_2 = \frac{\sigma}{\in_0}$$

या $$E_2 = \frac{\sigma}{2\in_0} \qquad \ldots(2.65)$$

अतः भाग ACB के कारण अल्पांश AB पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\frac{\sigma}{2\in_0}$ है। यदि अल्पांश AB पर कुल आवेश dq है तो

अल्पांश पर बल $dF = E_2 dq = \frac{\sigma}{2\in_0} dq \quad (\because dq = \sigma ds)$

अतः $$dF = \frac{\sigma^2}{2\in_0} ds = \frac{1}{2}\in_0 E^2 ds \qquad \ldots(2.66)$$

$\{ \because E = \frac{\sigma}{\in_0}$ अतः $\sigma = \in_0 E \}$

संपूर्ण पृष्ठ पर लगने वाला बल

$$F = \int_S \frac{\sigma^2}{2\in_0} ds = \int_S \frac{\in_0 E^2}{2} ds \qquad \ldots(2.67)$$

तथा पृष्ठ के एकांक क्षेत्रफल पर बल या दाब

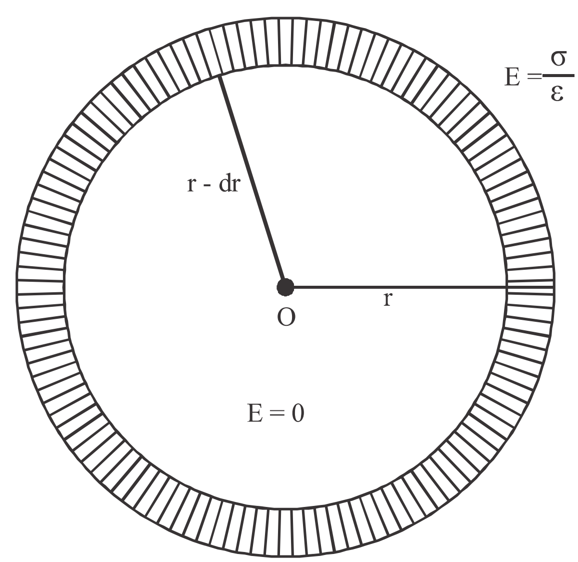
$$P = \frac{dF}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\in_0} = \frac{1}{2}\in_0 E^2 \qquad \ldots(2.68)$$

यह दाब, विद्युत दाब (electric pressure) कहलाता है।

2.6 विद्युत क्षेत्र के एकांक आयतन में ऊर्जा (Energy Per Unit Volume in an Electric Field)

आवेशित चालक की सतह पर अभिलम्बवत् बाहर की ओर विद्युत बल विद्यमान रहता है। चालक पर आवेश की मात्रा बढ़ाने या विद्युत क्षेत्र के आयतन में वृद्धि करने में इस बल के विरूद्ध कार्य करना पड़ता है जो कि विद्युत क्षेत्र में ऊर्जा के रूप में संचित होता है।

सरलता के लिए हम r त्रिज्या का गोलीय आवेश लेते है। गोले पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ है (देखें चित्र 2.21)।



चित्र 2.21 गोलीय आवेश वितरण

गोले की सतह पर बाहर की ओर दाब

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \ldots(2.69)$$

अतः गोले की सतह पर बाहर की ओर बल

$$F = PA = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \times 4\pi r^2 \quad \ldots(2.70)$$

इस बल के विरूद्ध गोले को dr दूरी से संपीडित करने में किया गया कार्य

$$dW = Fdr = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} 4\pi r^2 dr$$

संपीडन के कारण गोले के आयतन में कमी (या विद्युत क्षेत्र के आयतन में वृद्धि) $dV = 4\pi r^2 dr$

अतः $$dW = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dV \quad \ldots(2.71)$$

संपूर्ण विद्युत क्षेत्र में संचित ऊर्जा

$$W = U = \int \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dV = \int \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 dV \ldots(2.72)$$

तथा विद्युत क्षेत्र के इकाई आयतन में संचित ऊर्जा या ऊर्जा घनत्व

$$U_V = \frac{dW}{dV} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad \ldots(2.73)$$

यदि निर्वात या वायु के स्थान पर कोई अन्य माध्यम है तो

$U_r = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$ होगा।

उपरोक्त सूत्र यद्यपि गोलीय कोश का उदाहरण लेकर व्युत्पन्न किए गए है पर ये व्यापक रूप में वैध है।

2.7 साबुन के आवेशित बुलबुले का संतुलन (Equilibrium of Charged Soap Bubble)

साबुन के बुलबुले के आन्तरिक पृष्ठ पर वायु का दाब, बाह्य पृष्ठ पर उपस्थित वायुमण्डलीय दाब से अधिक होता है। इस दाबाधिक्य को पृष्ठ तनाव बल संतुलित करता है। यदि बुलबुले की त्रिज्या r तथा पृष्ठ तनाव T है तो दाब आधिक्य

$$P_{ex} = \frac{4T}{r} \quad \ldots(2.74)$$

अब यदि बुलबुले σ पृष्ठ आवेश घनत्व से आवेशित किया जाए तो बुलबुले के पृष्ठ पर बाहर की ओर वैद्युत दाब $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ भी कार्य करता है। इस स्थिति में

$$P_{ex} + \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{4T}{r}$$

या $$P_{ex} = \frac{4T}{r} - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \ldots(2.75)$$

इस प्रकार बुलबुले को आवेशित करने पर एक स्थिति ऐसी आयेगी कि दाबाधिक्य शून्य हो जाता है इसके पश्चात् बुलबुला फूट जाता है। अतः संतुलन के लिए

$$P_{ex} = \frac{4T}{r} - \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = 0$$

या $$\frac{4T}{r} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \ldots(2.76)$$

बुलबुले की त्रिज्या $r = \frac{8T\epsilon_0}{\sigma^2} \quad \ldots(2.77)$

बुलबुले पर पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma = \sqrt{\frac{8T\epsilon_0}{r}} \quad \ldots(2.78)$

तथा आवेश $q = \sigma \times 4\pi r^2 = 4\pi\sqrt{8T\epsilon_0 r^3} \quad \ldots(2.79)$

उदाहरण 2.17 एक आवेशित साबुन के बुलबुले पर पृष्ठ आवेश घनत्व $2.96\ \mu C/m^2$ है। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 4×10^{-4} N/m है। बुलबुले की त्रिज्या की ज्ञात कीजिए कि दाबाधिक्य शून्य हो एवं बुलबुला संतुलन में रहे।

हल: $$r = \frac{8T\epsilon_0}{\sigma^2} = \frac{8\times4\times10^{-4}\times8.85\times10^{-12}}{\left(2.96\times10^{-6}\right)^2}$$

$$= 3.2\times10^{-1}\ \text{m}$$

$$r = 0.32\ \text{m}$$

महत्वपूर्ण बिन्दु (Important Points)

1. किसी क्षेत्रफल के पारित विद्युत फलक्स उस क्षेत्रफल से गुजरने वाली क्षेत्र रेखाओं की संख्या के समानुपाती होता हैं किसी एक समान विद्युत क्षेत्र में रखी क्षेत्रफल की एक समतल सतह से पारित विद्युत फलक्स

$$\phi = ES\cos\theta$$

जहाँ θ विद्युत क्षेत्र E की दिशा व क्षेत्रफल के अभिलंब के मध्य कोण है यदि विद्युत क्षेत्र सदिशकों $\vec{E}$ तथा क्षेत्रफल सदिश को $\vec{S}$ से व्यक्त करें तो

$$\phi = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

2. यदि विद्युत क्षेत्र असमान है तथा (अथवा) सतह समतल नही तब विद्युत फ्लक्स

$$\phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

जहाँ $d\vec{s}$ सतह के किसी अल्पांश का सदिश क्षेत्रफल है तथा $\vec{E}$ इस अल्पांश पर क्षेत्र तीव्रता है बंद पृष्ठ के लिए

$$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

लिखा जाता है।

3. क्षेत्रफल $\vec{S}$ (या $d\vec{s}$) तथा $\vec{E}$ के सापेक्षिक अभिविन्यास के अनुरूप ϕ धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है

4. संतत आवेश वितरण के किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की गणना के लिए इसे छोटे अल्पांश आवेशों (dq) से विभक्त कर प्रत्येक अल्पांश से प्राप्त विद्युत क्षेत्रों का समाकलन कर कुल विद्युत क्षेत्र प्राप्त किया जाता है।
अल्पांश dq के कारण r दूरी पर विद्युत क्षेत्र

$$dE = \frac{1}{4\pi\in_0}\frac{dq}{r^2}$$

संपूर्ण संतत आवेश वितरण के लिए

$$E = \int dE = \frac{1}{4\pi\in_0}\int\frac{dq}{r^2}$$

यदि आवेश वितरण रेखीय है तो $dq = \lambda d\ell$ जहाँ, λ रैखिक आवेश घनत्व तथा $d\ell$ अल्पांश की लम्बाई हैं

यदि आवेश वितरण पृष्ठीय है तो $dq = \sigma ds$ तथा ds अल्पांश का क्षेत्रफल है जहाँ σ पृष्ठ आवेश घनत्व है

यदि आवेश वितरण आयतनीय है तो $dq = \rho dV$ जहाँ ρ आवेश घनत्व तथा dV अल्पांश का आयतन है

5. गाउस नियम बंद पृष्ठों के लिए ही सत्य है, इसके अनुसार किसी बंद पृष्ठ है से निर्गत फलक्स

$$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\in_0}$$

जहाँ q पृष्ठ द्वारा परिबद्ध कुल आवेश हैं।

6. गाउस नियम ऐसे आवेश वितरणों से उत्पन्न विद्युत क्षेत्रों की गणना में अति सहायक है जिनमें सममिति हो।

7. λ रेखीय आवेश के एक समान आवेशित अन्नत लंबाई के तार के लिए

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\in_0 r}$$

8. अपरिमित समरूप आवेशित अचालक परत (आवेश घनत्व σ) के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (एक समान विद्युत क्षेत्र)

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

9. अपरिमित समरूप आवेशित चालक पट्टिका (आवेश घनत्व σ) के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

$$E = \frac{\sigma}{\in_0} \text{ (एक समान विद्युत क्षेत्र)}$$

10. संतत आवेश वितरण तीन प्रकार का होता है (i) रेखीय आवेश वितरण (ii) पृष्ठ आवेश वितरण (iii) आयतन आवेश वितरण

11. समरूप आवेशित गोलीय कोश या चालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र $E_{out} = \frac{Q}{4\pi \in_0 r^2}(r > R)$;

$E_{surface} = \frac{Q}{4\pi \in_0 R^2}(r = R)$; तथा $E_{in} = 0$ (यहां Q गोले पर कुल आवेश तथा R इसकी त्रिज्या है)

12. समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $E_{out} = \frac{Q}{4\pi \in_0 r^2}(r > R)$;

$E_{surface} = \frac{Q}{4\pi \in_0 R^2}(r = R)$; तथा $E_{in} = \frac{Qr}{4\pi \in_0 R^3}(r < R)$

13. आवेशित चालक की सतह पर दाब $P = \frac{\sigma^2}{2\in_0} = \frac{1}{2}\in_0 E^2$ यह सतह पर स्थित आवेशो के पारस्परिक प्रतिकर्षण के कारण है।

14. विद्युत क्षेत्र के इकाई आयतन में संचित ऊर्जा $U_V = \frac{\sigma^2}{2\in_0} = \frac{1}{2}\in_0 E^2$

15. आवेशित साबुन के बुलबुले के संतुलन के लिए जबकि दाबाधिक्य शून्य हो: $\frac{4T}{r} = \frac{\sigma^2}{2\in}$ T पृष्ठ तनाव, r बुलबले की त्रिज्या है।

अभ्यासार्थ प्रश्न

बहुचयनात्मक प्रश्न

1. एक समरूप आवेशित ठोस अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता अधिकतम होती है
(अ) केन्द्र पर
(ब) केन्द्र से सतह के मध्य के किसी बिन्दु पर
(स) सतह पर
(द) अनन्त पर

2. विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E वाले स्थान पर ऊर्जा घनत्व (निर्वात में) होता है

(अ) $\frac{1}{2}\in_0 E$ (ब) $\frac{E^2}{2\in_0}$

(स) $\frac{1}{2}E\in_0^2$ (द) $\frac{1}{2}\in_0 E^2$

3. 0.2 मीटर भुजा वाले घन के केन्द्र पर $1\,\mu C$ का आवेश रखा गया है। घन के प्रत्येक फलक से निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान Vm में होगा
(अ) 1.12×10^4 (ब) 2.2×10^4
(स) 1.88×10^4 (द) 3.14×10^4

4. एक घन के अन्दर $\pm q$ आवेशों वाले दो द्विध्रुव एक दूसरे के लम्बवत् रखे हैं तो घन से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स का मान होगा

(अ) $\frac{q}{\in_0}$ (ब) $\frac{4q}{\in_0}$

(स) शून्य (द) $\frac{2q}{\in_0}$

5. एक साबुन के बुलबुले को ऋणात्मक आवेशित करने पर उसकी त्रिज्या
(अ) कम हो जाती है
(ब) बढ़ जाती है
(स) अपरिवर्तित रहती है
(द) जानकारी अपूर्ण है अतः कुछ नहीं कह सकते

6. एक गोले में आवेश q स्थित है तथा इससे निर्गत विद्युत फ्लक्स $\frac{q}{\in_0}$ है। गोले की त्रिज्या आधी करने पर निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान कितना परिवर्तित होगा?

(अ) पहले से 4 गुना हो जायेगा
(ब) पहले से एक चौथाई हो जायेगा
(स) पहले से आधा हो जायेगा
(द) अपरिवर्तित रहेगा

7. वायु में स्थित इकाई धनावेश से निकलने वाले संपूर्ण विद्युत फ्लक्स का मान है

(अ) $\in_0$ (ब) $\in_0^{-1}$

(स) $(4\pi\in_0)^{-1}$ (द) $4\pi\in_0$

8. दो चालक गोलों की त्रिज्याएँ a एवं b हैं। इन्हें समान पृष्ठ आवेश घनत्व से आवेशित करने पर इनकी सतह पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रताओं का अनुपात होगा

(अ) $b^2 : a^2$ (ब) $1:1$

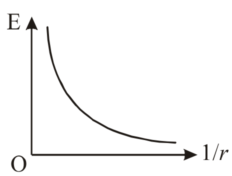
(स) $a^2 : b^2$ (द) $b : a$

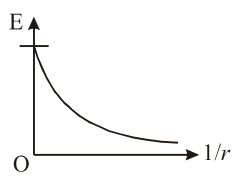
9. दो चालक गोलों की त्रिज्याएँ a एवं b हैं। इन्हें समान आवेश से आवेशित करने पर इनकी सतह पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रताओं का अनुपात होगा

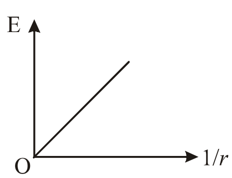
(अ) $b^2 : a^2$ (ब) $1:1$

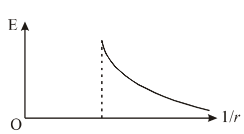
(स) $a^2 : b^2$ (द) $b : a$

10. एक लम्बे सीधे आवेशित तार के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का $1/r$ के साथ परिवर्तन आरेख है

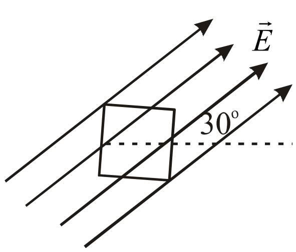
(अ)


(ब)


(स)


(द)


11. क्षैतिज के समान्तर स्थापित एकसमान विद्युत क्षेत्र E में एक वर्ग चित्रानुसार इस प्रकार स्थित है कि वर्ग के तल i j [kM+h xbZ js[kk fo| q {ks= ds lkFk 30^o का कोण बनाती है। यदि वर्ग की भुजा a है तो वर्ग से पारित विद्युत फ्लक्स का मान होगा



(अ) $\frac{\sqrt{3}Ea^2}{2}$ (ब) $\frac{Ea^2}{2}$

(स) शून्य (द) इनमें से कोई नहीं

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1 विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में रखे किसी क्षेत्रफल अल्पांश से निर्गत विद्युत फ्लक्स का मान शून्य कब होता है?

2 एक समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता किन स्थितियों पर शून्य होती है?

3 आवेशित चालक के इकाई क्षेत्रफल पर लगने वाले बल का सूत्र लिखिए तथा इसकी दिशा भी बताइए।

4 विद्युत आवेश के कारण ऊर्जा कहाँ संग्रहित होती है?

5 एक d व्यास के चालक गोले को Q आवेश दिया गया है। गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र का मान क्या होगा?

6 यदि कूलॉम नियम में $1/r^2$ के स्थान पर निर्भरता $1/r^3$ होती तो क्या गाउस नियम सत्य होता?

7 यदि किसी गाउसियन पृष्ठ में परिबद्ध नेट आवेश, धनात्मक है तो पृष्ठ से पारित कुल विद्युत फ्लक्स की प्रकृति होगी?

8 यदि विद्युत क्षेत्र में स्थित किसी बन्द पृष्ठ से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स शून्य है तो पृष्ठ के संदर्भ में क्या कहा जा सकता है?

9 यदि किसी गाउसियन पृष्ठ के अन्दर नेट आवेश शून्य है तो क्या इसका अर्थ यह है कि पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता भी शून्य होगी?

10 रेखीय आवेश घनत्व को परिभाषित कीजिए।

11 σ पृष्ठ आवेश घनत्व वाली एक आवेशित परत के एक ओर से दूसरी ओर जाने पर विद्युत क्षेत्र में कितना परिवर्तन होगा?

12 किसी समरूप आवेशित अचालक परत के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को दूरी के साथ आरेखित कीजिए।

13 एक समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण उसके केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मान कितना होता है?

14 यदि आवेश q एक गोले के केन्द्र पर स्थित है। अब यदि आवेश को समान आयतन के बेलनाकार पृष्ठ के अन्दर स्थापित किया जाए तो दोनों स्थितियों में निर्गत विद्युत फ्लक्सों का अनुपात क्या होगा?

लघूत्तरात्मक प्रश्न

1 विद्युत फ्लक्स को समझाइये। इसका SI मात्रक एवं विमाएँ लिखिए।

2 रेखीय आवेश घनत्व को समझाइये। इसका मात्रक लिखिए।

3 पृष्ठ आवेश घनत्व को समझाइये। इसका मात्रक लिखिए।

4 आयतन आवेश घनत्व को समझाइये। इसका मात्रक लिखिए।

5 स्थिर वैद्युतिकी के लिए गाउस नियम का प्रतिपादन कीजिए।

6 किसी चालक वस्तु पर आवेश सदैव बाह्य सतह पर ही क्यों होता है? स्पष्ट कीजिए।

7 साबुन का बुलबुला आवेशित करने पर आकार में क्यों बढ़ जाता है?

8 आवेशित चालक के पृष्ठ पर विद्युत बल एवं विद्युत दाब के व्यंजक स्थापित कीजिए।

9 विद्युत क्षेत्र के इकाई आयतन में संचित ऊर्जा का व्यंजक स्थापित कीजिए।

10 आवेशित साबुन के बुलबुले के संतुलन के लिए अधिकतम पृष्ठ आवेश घनत्व का व्यंजक स्थापित कीजिए।

11 कूलॉम नियम से गाउस नियम का सत्यापन कीजिए।

12 आप एक कार में जा रहे हैं। बिजली गिरने वाली है तो अपनी सुरक्षा के लिए क्या करेंगे?

13 दो सीधे समान्तर लम्बे रेखीय आवेशों पर रेखीय आवेश घनत्व λ_1 एवं λ_2 हैं। इनके मध्य प्रति इकाई लम्बाई लगने वाले बल का व्यंजक स्थापित कीजिए।

14 दो अनन्त विस्तार के समतल समान्तर तलों पर क्रमशः समान आवेश घनत्व $+\sigma$ एवं $-\sigma$ हैं। इनके मध्य किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का मान क्या होगा?

निबन्धात्मक प्रश्न

1 त्रिज्या R के गोलीय चालक को q आवेश से आवेशित करने पर निम्न स्थितियों में विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए।

(अ) $r > R$ (ब) $r < R$

(स) गोले की सतह पर (द) गोले के केन्द्र पर

विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को दूरी के साथ आरेखित कीजिये।

2 समरूप आवेशित अचालक गोले के कारण (अ) गोले के बाहर (ब) गोले की सतह पर (स) गोले के अन्दर (द) गोले के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए तथा विद्युत क्षेत्र की तीव्रता को दूरी के साथ आरेखित कीजिए।

3 गाउस नियम की सहायता से अपरिमित समरूप आवेशित तार के कारण इसके निकट स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए। दूरी के साथ तीव्रता में परिवर्तन को आरेखित कीजिए।

4 गाउस नियम की सहायता से अपरिमित समरूप आवेशित अचालक परत के कारण इसके निकट स्थित किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का परिकलन कीजिए। विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की निर्भरता समझाइये।

5 एक समरूप आवेशित अपरिमित चालक पट्टिका के कारण इसके निकट स्थित बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की दिशा ज्ञात कीजिए। गाउस नियम का उपयोग कर इसके लिए विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का व्यंजक स्थापित कीजिए। आवश्यक चित्र बनाइये।

उत्तरमाला (बहुचयनात्मक प्रश्न)

1. (स) 2. (द) 3. (स) 4. (स) 5. (ब) 6. (द)
7. (ब) 8. (ब) 9. (अ) 10. (स) 11. (स)

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

1. जबकि $\vec{E}$ व $d\vec{s}$ परस्पर लम्बवत् हों।

2. केन्द्र पर तथा अनन्त पर।

3 $\dfrac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ तथा इसके दिशा पृष्ठ के अभिलम्बवत् बाहर की ओर होती है।

4 विद्युत क्षेत्र के आयतन में

5 शून्य।

6 नहीं, क्योंकि गाउस नियम केवल उन्हीं क्षेत्रों के लिए लागू है जो व्युत्क्रम वर्ग नियम का पालन करते हैं।

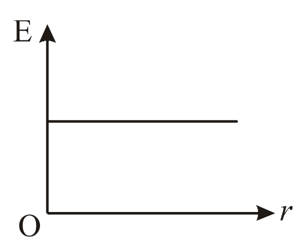
7 धनात्मक एवं निर्गत।

8 पृष्ठ में कुल आवेश शून्य है तथा $\phi_{\text{निर्गत}} = \phi_{\text{प्रवेशित}}$

9 नहीं, क्योंकि $\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \dfrac{q}{\epsilon_0} = 0$ से यह स्थिति तब भी हो सकती है जबकि $\vec{E} \perp d\vec{s}$ हो।

10 इकाई लम्बाई में उपस्थित आवेश की मात्रा।

11 $\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$

12 

13 शून्य

14 1 : 1

आंकिक प्रश्न

1 किसी बन्द पृष्ठ में प्रवेशित फ्लक्स $400\ Nm^2/C$ तथा निर्गत विद्युत फ्लक्स $800\ N\ m^2/C$ है। बन्द पृष्ठ द्वारा परिबद्ध आवेश का मान क्या है?

(उत्तर : 3.54 nC)

2 2.4 मी. व्यास के किसी एकसमान आवेशित चालक गोले का पृष्ठ आवेश घनत्व $80\ \mu C/m^2$ है। गोले का आवेश एवं गोले के पृष्ठ से निर्गत कुल विद्युत फ्लक्स ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : 1.45 mC, $1.63 \times 10^8\ Nm^2/C$)

3 एक बिन्दु आवेश q, एक a मीटर भुजा वाले (i) घन के केन्द्र पर (ii) घन की एक कोर पर (iii) घन के एक तल पर रखा है। घन से सम्बद्ध कुल विद्युत फ्लक्स तथा घन के प्रत्येक फलक से सम्बद्ध फ्लक्स की गणना कीजिए।

(उत्तर : (i) $\frac{q}{6\varepsilon_0}\ \frac{q}{6\varepsilon_0}$ (ii) $\frac{q}{4\in_0}, \frac{q}{16\in_0}$ (iii) $\frac{q}{2\in_0}, \frac{q}{10\in_0}$)

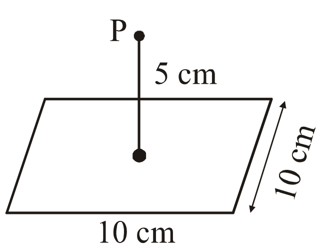
4 एक गोले के केन्द्र से 20 सेमी. दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता 10 V / m है। गोले की त्रिज्या 5 सेमी. है। गोले के केन्द्र से 8 सेमी. दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : 62.5 V / m)

5 एक अनन्त रेखीय आवेश 2 सेमी. दूरी पर 9×10^4 N/C का विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करता है। रेखीय आवेश घनत्व ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : 10^{-7} C/ m)

6 चित्रानुसार 10 सेमी भुजा के किसी वर्ग के केन्द्र से ठीक 5 सेमी ऊँचाई पर कोई $+10\ \mu C$ आवेश रखा है। इस वर्ग से गुजरने वाले विद्युत फ्लक्स का परिमाण क्या है?



(उत्तर : $1.88 \times 10^5\ Nm^2/C$)

7 एक धातु की प्लेट का क्षेत्रफल 10^{-2} मी.^{2} है प्लेट को 10 μC आवेश दिया गया है। प्लेट के निकट बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : 5.65×10^7 V/ m)

8 1 मी.^{2} क्षेत्रफल के दो धात्वीय पृष्ठ एक दूसरे के समान्तर 0.05 मी. दूरी पर रखे हैं। दोनों पर समान परिमाण के परंतु विपरीत आवेश हैं। यदि दोनों के के मध्य विद्युत क्षेत्र का मान 55 V/ m है तो प्रत्येक पर आवेश का मान ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : 4.87×10^{-10} C)

9 एक 9×10^{-5} ग्राम द्रव्यमान का कण, एक समरूप आवेशित लम्बी क्षैतिज परत, जिस पर पृष्ठ आवेश घनत्व $5 \times 10^{-5}\ C/m^2$ है के ऊपर कुछ दूरी पर रखा जाता है। कण पर कितना आवेश हो कि इसे स्वतन्त्र छोड़ने पर यह नीचे न गिरे?

(उत्तर : $3.12\times10^{-13}\ C$)

10 एक X – Y तल में स्थित लम्बी समरूप आवेशित परत पर पृष्ठ आवेश घनत्व $5 \times 10^{-16}\ C/m^2$ है। एक 0.1 मी. त्रिज्या के वृत्ताकार लूप जिसकी अक्ष Z- अक्ष से 60^o का कोण बनाती है, से पारित विद्युत फ्लक्स का मान ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : $4.44 \times 10^{-7}\ Nm^2/C$)

11 10^3 eV ऊर्जा का इलेक्ट्रॉन 5 मिमी. दूरी से एक अनन्त विस्तार की चालक प्लेट की ओर लम्बवत् दागा जाता है। चालक प्लेट पर न्यूनतम पृष्ठ आवेश घनत्व की गणना कीजिए कि इलेक्ट्रॉन प्लेट से न टकराये।

(उत्तर : $1.77 \times 10^{-6}\ C/m^2$)

12 एक साबुन के बुलबुले के अन्दर एवं बाहर दाब समान है। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 0.04 N / m है तथा बुलबुले का व्यास 4 सेमी. है। बुलबुले पर आवेश का मान ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : 59.8 nC)