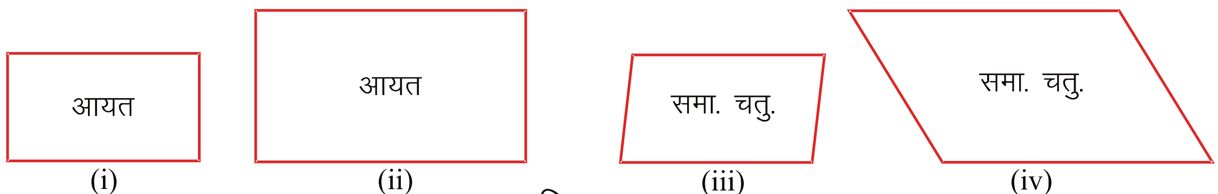
अध्याय–14

क्षेत्रमिति–1
MENSURATION-1

AAUGL8

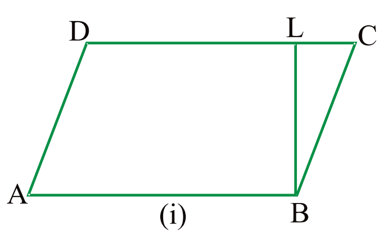
आकांक्षा और रानु ने मोटे कागज को काटकर विभिन्न मापों के आयत व समान्तर चतुर्भुज बना लिये जो नीचे दिये अनुसार थे–



चित्र 14-1

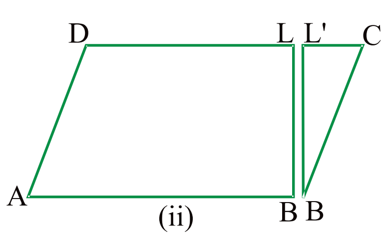
रानु ने आकांक्षा से इनका क्षेत्रफल निकालने के लिए कहा, आकांक्षा ने आयताकार टुकड़ों की लम्बाई तथा चौड़ाई का गुणा करके क्षेत्रफल निकाल लिया। (आयत का क्षेत्रफल = लं. × चौ.) लेकिन वह समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल नहीं निकाल पाई, क्योंकि वह समान्तर चतुर्भुज की लंबाई और चौड़ाई के बारे में निश्चय नहीं कर सकी। रानु ने कहा– यदि हम इन समान्तर चतुर्भुज वाली आकृति को काटकर आयत में बदल लें, तो इनका क्षेत्रफल निकाला जा सकता है।

इसके लिए उन्होंने निम्न क्रियाकलाप किया–

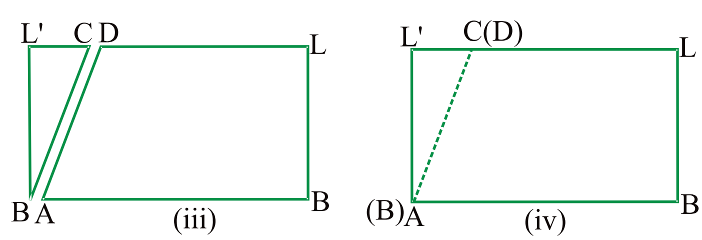


एक समान्तर चतुर्भुज वाली आकृति को लेकर ABCD से नामांकित किया एवं भुजा AB को आधार मानकर एक शीर्ष लंब BL खींचा। त्रिभुजाकार टुकड़े BLC को काटकर अलग किया। (चित्र 14.2(ii))

त्रिभुजाकार आकृति को उठाकर रानू ने उसी आकृति से जोड़ने का प्रयास किया, तो चित्र–14.2(iii) के अनुसार आकृति प्राप्त हुई।



उसके पश्चात् आकांक्षा ने पूरी तरह जोड़कर आकृति–14.3(iv) को प्राप्त किया।



चित्र 14.2

इस तरह आयत का चित्र प्राप्त हुआ। आकांक्षा ने कहा– आकृति–14.2(i) तथा आकृति–14.2(iv)

का क्षेत्रफल बराबर होगा, क्योंकि आकृति–14.2(iv) आकृति–14.2(i) का परिवर्तित रुप है।

आयत ABLL' का क्षेत्रफल $= AB \times BL =$ समान्तर चतुर्भुज ABCD का आधार x ऊँचाई

अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई, प्राप्त हुआ। इस तरह उन्होंने समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिया।

अतः

(1) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

(2) समान्तर चतुर्भुज का आधार = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

(3) समान्तर चतुर्भुज का ऊँचाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

उदाहरण 1. आधार 15 सेमी तथा ऊंचाई 5 सेमी वाले समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: आधार = 15 सेमी तथा ऊँचाई = 5 सेमी

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

= 15 सेमी × 5 सेमी

= 75 वर्ग सेमी

उदाहरण 2. उस समान्तर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 240 वर्ग सेमी तथा ऊंचाई 8 सेमी है।

हल: हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज का आधार = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

क्षेत्रफल = 240 वर्ग सेमी, ऊंचाई = 8 सेमी

अतः आधार $= \frac{240}{8} \; \frac{\text{सेमी}^2}{\text{सेमी}}$

= 30 सेमी

प्रश्नावली 14.1 (Exercise 14.1)

प्र.1 उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके आधार और शीर्षलंब निम्नलिखित हैं।

(i) आधार = 15 सेमी., शीर्ष लंब = 10 सेमी

(ii) आधार = 90 सेमी, शीर्ष लंब = 8 सेमी

(iii) आधार = 120 सेमी, शीर्ष लंब = 15 सेमी

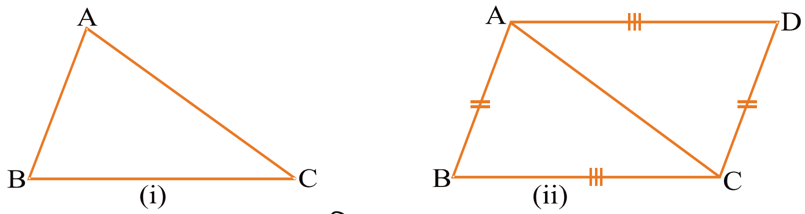
प्र.2 उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका आधार 26.5 सेमी तथा शीर्ष लंब 7 सेमी है।

प्र.3 उस समान्तर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 390 वर्ग सेमी तथा शीर्ष लंब 26 सेमी हो।

प्र.4 उस समान्तर चतुर्भुज का शीर्ष लंब ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 1200 वर्ग मीटर और आधार 60 मीटर है।

आइए, अब निम्न क्रियाकलाप करते हैं–

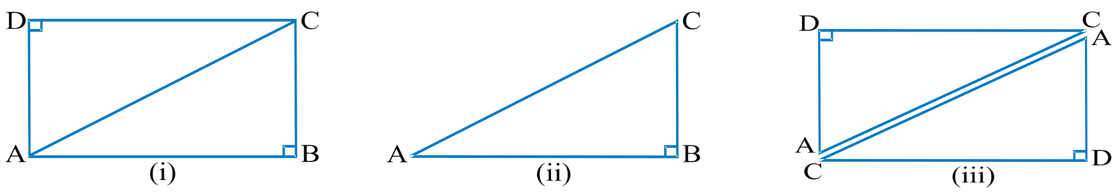
1. ABC एक त्रिभुज बनाइए तथा बिन्दु A से BC लम्बाई का तथा बिन्दु C से AB लम्बाई का चाप B के विपरीत ओर काटिए एवं दोनों चापों के कटान बिन्दु से A व C को मिलाइए तथा D से नामांकित कीजिए। इस प्रकार ABCD एक समान्तर चतुर्भुज प्राप्त होती है क्योंकि AB=DC तथा AD=BC है।



चित्र–14.3

क्रियाकलाप (Activity)

एक मोटे आयताकार कागज ABCD को विकर्ण AC पर कैंची से काटिए।



चित्र –14.4

इस तरह, दो ΔABC और ΔADC बन गए। ΔABC और ΔADC को एक–दूसरे पर रखिए। क्या वे एक–दूसरे को पूरी तरह ढँक लेते हैं? आप पायेंगे कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं और उनके क्षेत्रफल भी बराबर हैं।

$\therefore$ ΔABC का क्षे. + ΔADC का क्षे.= आयत ABCD का क्षे.

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षे. + ΔABC का क्षे.= आयत ABCD का क्षे.

$\Rightarrow 2\Delta ABC$ का क्षे. = आयत ABCD का क्षे. [$\because \Delta ABC$ का क्षे. = ΔADC का क्षे.]

$\Rightarrow 2$ (ΔABC का क्षे.) = AB x BC

ΔABC का क्षे. = $\frac{1}{2} \times AB \times BC$

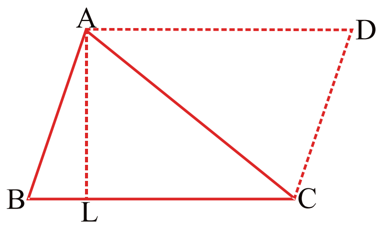
अभ्यास (Practice)

गत्ते पर एक समांतर चतुर्भुज बनाइए। उसे काटकर अलग कीजिए। एक विकर्ण पर उसे फिर काटिए। तब दो त्रिभुज मिलेंगे। क्या उन दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हैं? एक–दूसरे पर रखकर देखिए।

त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a Triangle)

हम समान माप के दो त्रिभुजों को आपस में जोड़कर समान्तर चतुर्भुज की रचना कर सकते हैं। एक विकर्ण खींचने पर समान्तर चतुर्भुज में समान माप के दो त्रिभुज प्राप्त होते हैं। समांतर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण AC खींचने पर प्राप्त ΔABC और ΔADC सर्वांगसम हैं। उनके क्षेत्रफल भी बराबर हैं।

अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल +ΔADC का क्षेत्रफल



चित्र–14.5

= 2 (ΔABC का क्षेत्रफल)

$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊंचाई = $\frac{1}{2} \times BC \times AL$

अतः $\boxed{\textbf{त्रिभुज का क्षेत्रफल } A = \frac{1}{2} \times b \times h}$

जहाँ b = त्रिभुज का आधार और h = त्रिभुज की ऊँचाई

याद रखें– **दो समान्तर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी आधार व ऊंचाई के समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।**

उदाहरण 3. आधार 28 सेमी तथा उंचाई 6 सेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार त्रिभुज का आधार b = 28 सेमी.

एवं ऊँचाई h = 6 सेमी

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 28 \times 6$

= 84 सेमी^{2}

उदाहरण 4. 80 सेमी आधार और 0.08 वर्गमीटर क्षेत्रफल वाले त्रिभुज की उंचाई ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार, त्रिभुज का आधार b = 80 सेमी. एवं क्षेत्रफल = 0.08 मी^{2}

यहाँ आधार सेमी. में दिया है अतः क्षेत्रफल को सेमी. में बदलने पर

1 मीटर^2 = 1 मीटर × 1 मीटर

= 100 सेमी × 100 सेमी (∴1 मीटर = 100 सेमी)

= 10000 सेमी^{2}

अतः 0.08 मीटर^2 = 0.08 × 10000 सेमी^{2}

= 800 सेमी^{2}

अब त्रिभुज का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \times b \times h$ से

त्रिभुज की उंचाई = $h = \frac{2A}{b} = \frac{2 \times 800}{80}$

⇒ $h =$ 20 सेमी

प्रश्नावली–14.2 (Exercise -14.2)

प्र.1 आधार 12 सेमी और संगत ऊँचाई 7 सेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.2 आधार 25 सेमी और शीर्ष लम्ब 1.5 सेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.3 आधार 6.5 सेमी और क्षेत्रफल 26 सेमी^{2} वाले त्रिभुज का शीर्ष लंब ज्ञात कीजिए।

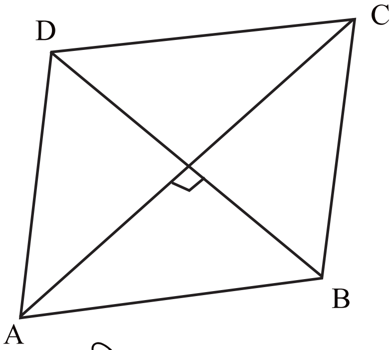
प्र.4 आधार 120 डेमी और ऊँचाई 75 डेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of a Rhombus)

समचतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज का ही एक रुप है अतः यदि उसका आधार तथा ऊँचाई ज्ञात हो तो क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है।

यदि आधार b तथा ऊँचाई h हो तो

क्षेत्रफल $A = b \times h$



चित्र–14.7

ABCD एक समचतुर्भुज है d_1 तथा d_2 इसके विकर्ण हैं चूँकि ये एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं अतः प्राप्त चार समकोण त्रिभुजों की लंबवत् भुजाएं $\frac{d_1}{2}$ तथा $\frac{d_2}{2}$ होंगी।

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= 4 \times$ एक समकोण त्रिभुज क्षेत्रफल

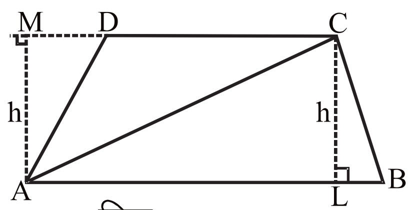
$$= 4 \times \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= 4 \times \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d_1\right)\times\left(\frac{1}{2}d_2\right)$$

अतः $\boxed{\textbf{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\, d_1 d_2 \text{ सेमी}^2}$

$$\boxed{\textbf{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \textbf{पहला विकर्ण} \times \textbf{दूसरा विकर्ण}}$$

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of a Trapezium)



चित्र–14.8

एक ऐसा चतुर्भुज जिसकी दो सम्मुख भुजाएँ एक–दूसरे के समान्तर होती हैं। चित्र–14.8 में ABCD एक समलंब चतुर्भुज दिखाया गया है। भुजा AB भुजा DC के समान्तर है। दो समान्तर भुजाओं की लम्बवत दूरी को AM तथा CL से दर्शाया गया है।

यदि हम इस त्रिभुज का विकर्ण AC खींचे इससे समलंब चतुर्भुज दो त्रिभुज ABC तथा ACD प्राप्त होते हैं।

अतः समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $+ \Delta ACD$ का क्षेत्रफल

समलंब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, AB \times CL + \frac{1}{2}\, DC \times AM$

चूंकि CL तथा AM समलंब चतुर्भुज की ऊंचाई है अतः यह बराबर होगी। माना कि यह h के बराबर है।

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, AB \times h + \frac{1}{2}\, DC \times h$

यदि $AB = b_1$ एवं $DC = b_2$ है तो

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} b_1 \times h + \frac{1}{2} b_2 \times h$

$$= \frac{1}{2} (b_1 + b_2) \times h$$

$= \frac{1}{2} \times$ (समांतर भुजाओं का योग) उनके बीच की दूरी

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (समांतर भुजाओं का योग) ऊँचाई

या **समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$**

उदाहरण 6. एक समचतुर्भुज की एक भुजा 7 सेमी तथा ऊँचाई 3.2 सेमी है इसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल: प्रश्नानुसार आधार = 7 सेमी, ऊँचाई = 3.2 सेमी

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

क्षेत्रफल = 7 × 3.2 वर्ग सेमी

= 22.4 वर्ग सेमी

उदाहरण 7. एक समचतुर्भुज का एक विकर्ण 10 सेमी व दूसरा विकर्ण 12 सेमी है। उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: समचतुर्भुज का पहला विकर्ण = 10 सेमी, दूसरा विकर्ण = 12 सेमी

यदि विकर्ण दिये हों तो समचतुर्भुज का

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (एक विकर्ण) × (दूसरा विकर्ण)

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12$$

= 60 वर्ग सेमी

उदाहरण 8. एक समलंब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ 25 मीटर व 20 मीटर है व भुजाओं के बीच की दूरी 8 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः प्रश्नानुसार $b_1 = 25$मी, $b_2 = 20$मी, $h = 8$ मी

समलंब का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \times h \times (b_1+b_2)$

$$A = \frac{1}{2} \times 8 \times (25+20)$$

$$A = \frac{1}{2} \times 8 \times (45)$$

$A = 180$ वर्ग मी

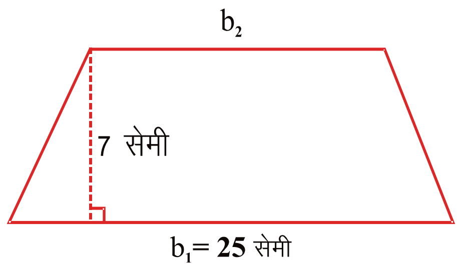
उत्तर

उदाहरण 9. एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 140 सेमी^{2} है, यदि समांतर भुजाओं में से एक भुजा 25 सेमी तथा ऊँचाई 7 सेमी है तो दूसरी समान्तर भुजा ज्ञात कीजिए।

हलः प्रश्नानुसार $A = 140$ सेमी^{2}, $b_1 = 25$ सेमी

$h = 7$ सेमी

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्र A है तो



चित्र–14.9

$$A = \frac{1}{2} \times h \times (b_1+b_2)$$

अतः $140 = \frac{1}{2} \times 7\,(25+b_2)$

$$\frac{2 \times 140}{7} = 25 + b_2$$

$$40 = 25+b_2$$

$$b_2 = 40 - 25$$

दूसरी भुजा $b_2 = 15$ सेमी.

प्रश्नावली–14.3 (Exercise -14.3)

प्र.1 एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण 24 सेमी व 10 सेमी हैं।

प्र.2 एक समचतुर्भुज की एक भुजा 7.5 सेमी और शीर्ष लंब 4 सेमी है तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.3 एक समलंब चतुर्भुज की समांतर भुजाएं 20 मी व 8 मी है। इन भुजाओं के बीच की दूरी 12 सेमी है, इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.4 आधार 30 सेमी और 24.4 सेमी वाले समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि शीर्ष लंब 1.5 सेमी है।

प्र.5 एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 105 वर्ग सेमी तथा ऊंचाई 7 सेमी है, समान्तर भुजाओं में से यदि एक दूसरी से 6 सेमी अधिक है तो दोनों समान्तर भुजाएं ज्ञात करो।

आयताकार पथ का क्षेत्रफल (Area of a Rectangular path)

चित्र–14.10

किसी विद्यालय के चारों ओर बना बरामदा, खेत के चारों ओर का रास्ता, खेल के मैदान का रास्ता आदि का क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है, इस स्थिति में हम क्या करते हैं।

चित्र–14.10 एक आयताकार खेत है जिसके चारों ओर रास्ता बना हुआ है। यदि हमें इस रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करना है तो क्या करेंगे?

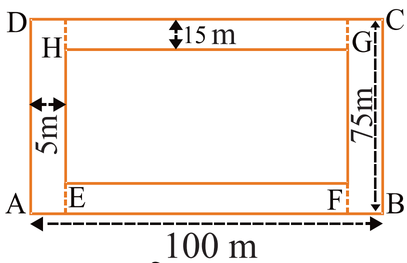
स्पष्ट है कि इसमें हमें दो आयत मिल रहे हैं अतः बड़े आयत के क्षेत्रफल में छोटे आयत के क्षेत्रफल को घटा देंगे।

आयताकार पथ का क्षेत्रफल = बड़े आयत का क्षेत्रफल – छोटे आयत का क्षेत्रफल

Area of the rectangular path = Area of the bigger rectangle - Area of smaller rectangle

उदाहरण 10. एक आयताकार खेत जिसकी लम्बाई 90 मीटर तथा चौड़ाई 65 मीटर है इसके बाहर चारों ओर 5 मीटर चौड़ा एक रास्ता बना हुआ है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: चित्र से स्पष्ट है कि रास्ते का क्षेत्रफल = आयत ABCD का क्षेत्रफल – आयत का EFGH का क्षेत्रफल होगा।



चित्र–14.11

अतः रास्ते का क्षेत्रफल $= (AB \times BC) - (EF \times FG)$

यहाँ $AB = AE + EF + FB$

$AB = 5 + 90 + 5$

$AB = 100$ मीटर

इसी तरह $BC = 5 + 65 + 5$

$= 75$ मीटर

अतः रास्ते का क्षेत्रफल $= (AB \times BC) - (EF \times FG)$

$= 100 \times 75 - 90 \times 65$

$= 7500 - 5850$

$= 1650$ वर्ग मीटर

उदाहरण 11. एक दीवार जिसकी लम्बाई 15.5 मीटर तथा चौड़ाई 9 मीटर है इसमें 3 मीटर $\times$ 1.5 मीटर माप के दो दरवाजे तथा 2 मीटर $\times$ 1 मीटर माप की दो खिड़कियाँ लगी हैं इसे 5 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से रंगवाने (पोताई) का खर्च ज्ञात कीजिए।

हल: हमें पहले पोताई योग्य दीवार का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

अतः पोताई योग्य दीवार का क्षेत्रफल = दीवार का संपूर्ण क्षेत्रफल – (2 दरवाजों + 2 खिड़कियों का क्षेत्रफल)

दीवार का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई

$= 15.5 \times 9$

$= 139.5$ वर्ग मीटर

1 दरवाजे का क्षेत्रफल= लम्बाई $\times$ चौड़ाई

$= 3 \times 1.5$

$= 4.5$ वर्ग मीटर

2 दरवाजों का क्षेत्रफल= 4.5×2

$= 9.0$ वर्ग मीटर

1 खिड़की का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई

$= 2 \times 1$

$= 2$ वर्ग मीटर

2 खिड़कियों का क्षेत्रफल 2×2

$= 4$ वर्ग मीटर

अतः पोताई योग्य दीवार का क्षे. $= 139.5 - (9.0 + 4)$

$= 139.5 - 13.0$

$= 126.5$ वर्गमीटर

5 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से पोताई का खर्च $= 126.5 \times 5$

$= 632.50$ रु.

उदाहरण 12. एक आयताकार क्षेत्र की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 35 मीटर व 24 मीटर है। इसके बीचों बीच इसकी लम्बाई के समान्तर 2 मीटर चौड़ा तथा चौड़ाई के समान्तर 1 मीटर चौड़ा रास्ता है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

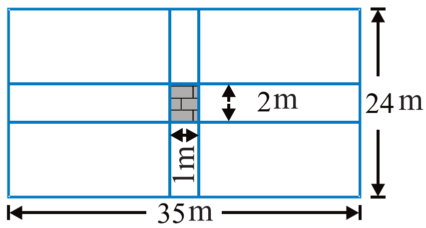
हल: लम्बाई के समान्तर रास्ते का क्षेत्रफल = $35 \times 2 = 70$ वर्ग मीटर

चौड़ाई के समान्तर रास्ते का क्षेत्रफल = 24×1

= 24 वर्ग मीटर

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 2×1

= 2 वर्ग मीटर



चित्र–14.12

(छायांकित भाग दोनों रास्तों में आया है अतः उसे एक बार घटायेंगे)

रास्ते का क्षेत्रफल = 70 + 24–2

= 94 – 2

= 92 वर्ग मीटर

प्रश्नावली–14.4 (Exercise -14.4)

प्र.1 एक 25 सेमी लंबी तथा 10 सेमी चौड़े चित्र के बाहर चारों ओर 2 सेमी चौड़ाई की पट्टी बनी है। पट्टी का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.2 एक आयताकार खेल का मैदान 35 मी $\times$ 25 मी माप का है। इसके बीचों–बीच लम्बाई के समान्तर 3 मीटर चौड़ा तथा चौड़ाई के समान्तर 2 मीटर चौड़ा रास्ता है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

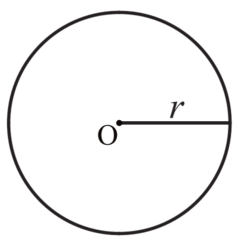
प्र.3 एक बास्केटबॉल का मैदान 28 मीटर लम्बा तथा 15 मीटर चौड़ा है। इसके बाहर चारों ओर 5 मीटर चौड़ी समतल दर्शक दीर्घा बनानी है। दीर्घा का क्षेत्रफल तथा दर्शक दीर्घा को बनाने का खर्च 5.25 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल (Area of a circular path)

पिछली कक्षाओं में हमने वृत के बारे में जाना है। यदि एक वृत जिसकी त्रिज्या r है तो परिधि $C = 2\pi r$

तथा क्षेत्रफल = πr^2 होता है।

जहां π एक नियतांक है जिसका मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 होता है।



चित्र–14.13

उदाहरण 13. साईकिल के पहिए की परिधि तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 21 सेमी है।

हल: साईकिल का पहिया वृत्ताकार होता है

अतः पहिए की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21$ सेमी $= 132$ सेमी

पहिए का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times (21)^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= \frac{22}{\cancel{7}} \times \overset{3}{\cancel{21}} \times 21$$

$= 1386$ वर्ग सेमी

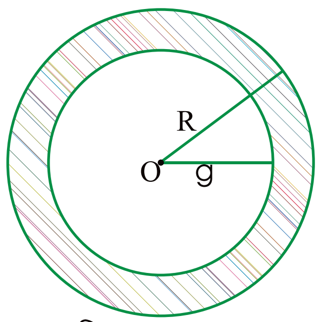
सकेन्द्री वृत्त

चित्र–14.14 में दो सकेन्द्री दिए गए हैं। यदि हमें छायांकि भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है तो क्या करेंगे। स्पष्ट है कि हम बड़े वृत्त के क्षेत्रफल से छोटे वृत्त के क्षेत्रफल को घटा देंगे।

अतः

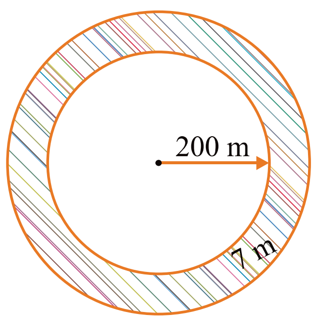
$\boxed{\text{वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल – छोटे वृत्त का क्षेत्रफल}}$

$\boxed{\text{Area of a circular path = Area of bigger circle - Area of smaller circle}}$



चित्र–14.14

उदाहरण 14. एक वृत्ताकार तालाब की त्रिज्या 200 मीटर है। इसके बाहर चारों ओर 7 मीटर चौड़ाई का तट (मार्ग) बना हुआ है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



चित्र–14.15

हल: वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल – छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

छोटे वृत्त की त्रिज्या $r = 200$ मीटर

बड़े वृत्त की त्रिज्या $R = 200 + 7 = 207$मीटर

वृत्ताकार तालाब का तट का क्षेत्रफल $= \pi R^2 - \pi r^2$

$= \pi[(207)^2 - (200)^2]$

$$= \frac{22}{7}(207+200)(207-200) \qquad [\because (a^2 - b^2) = (a+b)(a - b)]$$

$$= \frac{22}{7}(407)(7)$$

$= 22\ (407)$ वर्ग मीटर

$= 8954$ वर्ग मीटर

प्रश्नावली 14.5 (Exercise 14.5)

प्र.1 दो सकेन्द्री वृत्तों की त्रिज्याएं क्रमशः 9 सेमी व 12 सेमी हैं दोनों वृत्तों के बीच बनने वाले वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्र.2 एक वृत्त का क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी है। इस वृत्त के बाहर 2 मीटर चौड़ाई का मार्ग है। उस मार्ग का क्षेत्रफल कितना होगा।

प्र.3 एक वृत्ताकार क्रिकेट मैदान की त्रिज्या 60 मीटर है। मैदान के बाहर चारों ओर 7 मीटर चौडी दर्शक दीर्घा बनानी है। उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

ग्राफ पर बने समलम्ब चतुर्भुजों का वर्ग ग्रिड की सहायता से अनुमानित क्षेत्रफल निकालना तथा सूत्र से क्षेत्रफल निकालकर उसका सत्यापन करना।

To find the Approximate Area of the Trapezium given on graph paper with the help of square grid method and verify the result with the formula method –

चित्र क्रमांक 14.16 के लिए–

<u>वर्ग गिड द्वारा समलम्ब चतुर्भुज के अनुमानित क्षेत्रफल की गणना</u>

समलम्ब चतुर्भुज ABCD में

AB4CMV

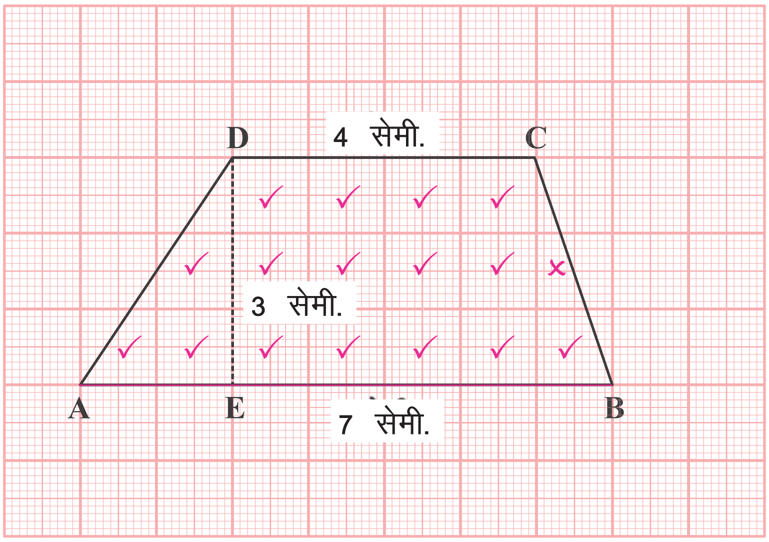
पूरे वर्ग तथा आधे से बड़े वर्गों की संख्या = 16

ठीक आधे वर्गों की संख्या = 1

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= $ पूरे वर्गों की संख्या $+ \frac{1}{2}$ आधे वर्गों की संख्या

$$= 16 + \frac{1}{2}\times 1$$

$$= 16 + \frac{1}{2} = 16 + .5 = 16.5 \text{ वर्ग सेमी.}$$



चित्र–14.16

सूत्र द्वारा

समलम्ब चतुर्भुज ABCD में

समान्तर भुजाएँ	AB	=	7 सेमी.
व	CD	=	4 सेमी.
चतुर्भुज की ऊँचाई	DE	=	3 सेमी.

$\because$ समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2}(AB + CD) \times DE$$

$$= \frac{1}{2}(7 + 4) \times 3$$

$$= \frac{1}{2} \times 11 \times 3$$

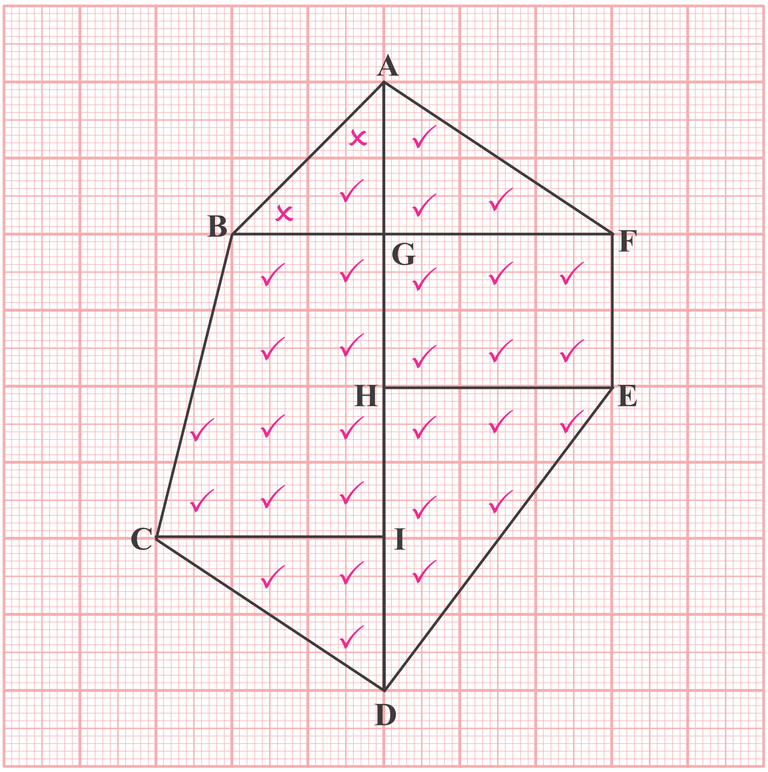
$$= \frac{33}{2}$$

$=$ 16.5 वर्ग सेमी.

स्पष्ट है कि

वर्ग ग्रिड द्वारा ज्ञात समलम्ब चतुर्भुज ABCD का अनुमानित क्षेत्रफल

$=$ सूत्र द्वारा ज्ञात समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल



चित्र–14.17

ग्राफ पर बने बहुभुज का वर्ग ग्रिड की सहायता से अनुमानित क्षेत्रफल निकालना तथा सूत्र से क्षेत्रफल निकालकर उसका सत्यापन करना

चित्र क्रमांक 14.17 के लिए

<u>वर्ग ग्रिड द्वारा बहुभुज का अनुमानित क्षेत्रफल–</u>

बहुभुज ABCDEFA में

पूरे तथा आधे से बड़े वर्गों की संख्या	=	29
ठीक आधे वर्गों की संख्या	=	2
ठीक पूरे वर्गों की संख्या	=	$29 + \frac{1}{2} \times 2$
	=	$29 + 1$
	=	30
अतः बहुभुज ABCDEFA का क्षेत्रफल	=	30 वर्ग सेमी.

<u>सूत्र द्वारा बहुभुज के क्षेत्रफल की गणना–</u>

बहुभुज ABCDEFA का क्षेत्रफल = Δ AGB का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज BGIC का क्षेत्रफल + ΔCID का क्षेत्रफल + ΔDHE का क्षेत्रफल + आयत HEFG का क्षेत्रफल + ΔGFA का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\ BG \times GA + \frac{1}{2}\ (BG + CI) \times GI + \frac{1}{2}\ CI \times ID$$

$$+ \frac{1}{2}\ HE \times HD + HE \times HG + \frac{1}{2}\ GF \times AG$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{1}{\cancel{2}} \times 2 + \frac{1}{\cancel{2}}\ (2 + 3) \times \overset{2}{\cancel{4}} + \frac{1}{\cancel{2}} \times 3 \times \overset{1}{\cancel{2}} + \frac{1}{\cancel{2}} \times 3 \times \overset{2}{\cancel{4}}$$

$$+ 3 \times 2 + \frac{1}{\cancel{2}} \times 3 \times \overset{1}{\cancel{2}}$$

$= \quad 2 + (5 \times 2) + 3 + (3 \times 2) + 6 + 3$

$= \quad 2 + 10 + 3 + 6 + 6 + 3$

$=$ 30 वर्ग सेमी.

ABD8PI

स्पष्ट है कि

वर्ग ग्रिड द्वारा ज्ञात बहुभुज का अनुमानित क्षेत्रफल = सूत्र द्वारा ज्ञात बहुभुज का क्षेत्रफल।

हमने सीखा (We have learnt)

1. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई
2. समांतर चतुर्भज के विकर्ण समांतर चतुर्भुज को दो समान त्रिभुजों में बाँटते हैं।
3. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई
4. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2
5. समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

   या

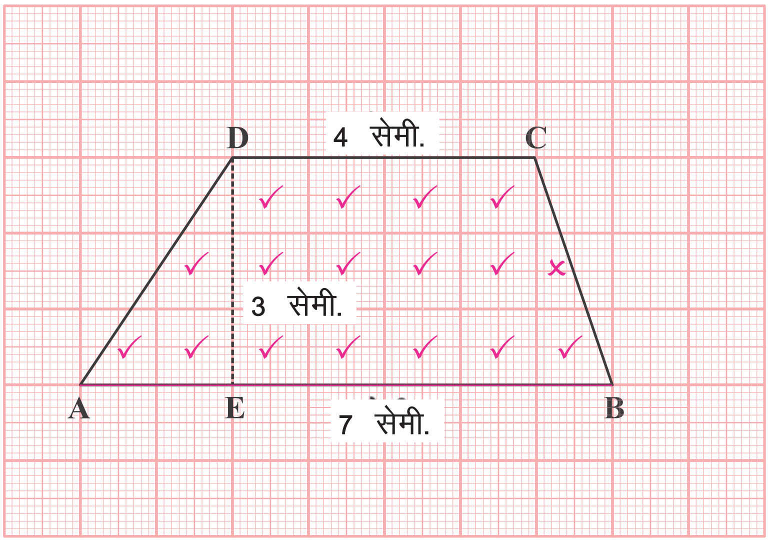
   समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × पहला विकर्ण × दूसरा विकर्ण

   $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
6. समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × ऊँचाई × (समांतर भुजाओं का योग)

   $= \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$
7. वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi \times$(त्रिज्या)^2

   $= \pi r^2$ (जहाँ π = नियतांक $= \frac{22}{7} = 3.14$ लगभग)
8. वृत्त की परिधि = $2 \times \pi \times$त्रिज्या

   $= 2\pi r$



चित्र–14.16

सूत्र द्वारा

समलम्ब चतुर्भुज ABCD में

समान्तर भुजाएँ AB = 7 सेमी.

व CD = 4 सेमी.

चतुर्भुज की ऊँचाई DE = 3 सेमी.

∵ समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) × ऊँचाई

$$= \frac{1}{2}(AB + CD) \times DE$$

$$= \frac{1}{2}(7 + 4) \times 3$$

$$= \frac{1}{2} \times 11 \times 3$$

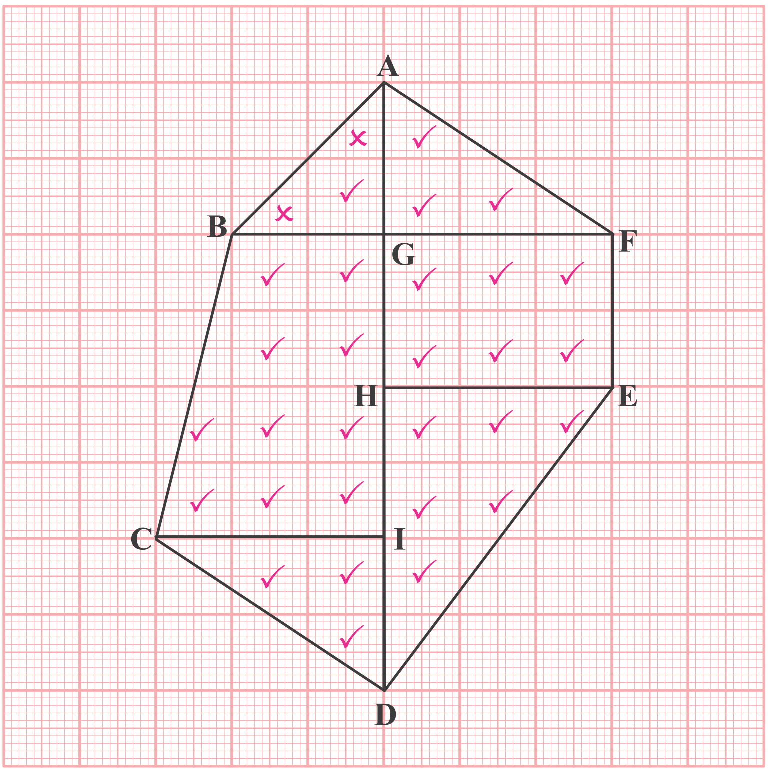
$$= \frac{33}{2}$$

= 16.5 वर्ग सेमी.

स्पष्ट है कि

वर्ग ग्रिड द्वारा ज्ञात समलम्ब चतुर्भुज ABCD का अनुमानित क्षेत्रफल

= सूत्र द्वारा ज्ञात समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल



चित्र–14.17

ग्राफ पर बने बहुभुज का वर्ग ग्रिड की सहायता से अनुमानित क्षेत्रफल निकालना तथा सूत्र से क्षेत्रफल निकालकर उसका सत्यापन करना

चित्र क्रमांक 14.17 के लिए

<u>वर्ग ग्रिड द्वारा बहुभुज का अनुमानित क्षेत्रफल–</u>

बहुभुज ABCDEFA में

पूरे तथा आधे से बड़े वर्गों की संख्या	=	29
ठीक आधे वर्गों की संख्या	=	2
ठीक पूरे वर्गों की संख्या	=	$29 + \frac{1}{2} \times 2$
	=	$29 + 1$
	=	30
अत: बहुभुज ABCDEFA का क्षेत्रफल	=	30 वर्ग सेमी.

<u>सूत्र द्वारा बहुभुज के क्षेत्रफल की गणना–</u>

बहुभुज ABCDEFA का क्षेत्रफल = Δ AGB का क्षेत्रफल + समलम्ब चतुर्भुज BGIC का क्षेत्रफल + ΔCID का क्षेत्रफल + ΔDHE का क्षेत्रफल + आयत HEFG का क्षेत्रफल + ΔGFA का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\ BG \times GA + \frac{1}{2}\ (BG + CI) \times GI + \frac{1}{2}\ CI \times ID$$

$$+ \frac{1}{2}\ HE \times HD + HE \times HG + \frac{1}{2}\ GF \times AG$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \overset{1}{\cancel{2}} \times 2 + \frac{1}{\cancel{2}}\ (2 + 3) \times \overset{2}{\cancel{4}} + \frac{1}{\cancel{2}} \times 3 \times \overset{1}{\cancel{2}} + \frac{1}{\cancel{2}} \times 3 \times \overset{2}{\cancel{4}}$$

$$+ 3 \times 2 + \frac{1}{\cancel{2}} \times 3 \times \overset{1}{\cancel{2}}$$

$= 2 + (5 \times 2) + 3 + (3 \times 2) + 6 + 3$

$= 2 + 10 + 3 + 6 + 6 + 3$

$= 30$ वर्ग सेमी.

स्पष्ट है कि

वर्ग ग्रिड द्वारा ज्ञात बहुभुज का अनुमानित क्षेत्रफल = सूत्र द्वारा ज्ञात बहुभुज का क्षेत्रफल।

हमने सीखा (We have learnt)

1. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई
2. समांतर चतुर्भज के विकर्ण समांतर चतुर्भुज को दो समान त्रिभुजों में बाँटते हैं।
3. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई
4. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2
5. समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

   या

   समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × पहला विकर्ण × दूसरा विकर्ण

   $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
6. समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × ऊँचाई × (समांतर भुजाओं का योग)

   $= \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$
7. वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi \times$(त्रिज्या)^2

   $= \pi r^2$ (जहाँ π = नियतांक $= \frac{22}{7} = 3.14$ लगभग)
8. वृत्त की परिधि = $2 \times \pi \times$ त्रिज्या

   $= 2\pi r$