



त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios)

प्रस्तावना (Introduction)

कक्षा 9 में आपने न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के बारे में अध्ययन किया है। इस अध्याय में हम समकोण त्रिभुज के विशिष्ट कोण $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ एवं 90° के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात करेंगे।

6.01 कोण 0° के त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान

माना परिक्रमी रेखा CA, प्रारम्भिक स्थिति CX से प्रारम्भ कर वामावर्त (धनात्मक) दिशा में अतिअल्प कोण $\angle XCA = \theta$ बनाती हैं। बिन्दु A से CX पर लम्ब AB डालते हैं। जिसका परिमाण बहुत अल्प होता है। जैसे-जैसे रेखा CA स्थिर रेखा CX की ओर अग्रसर होती है। वैसे-वैसे CB की लम्बाई शून्य की ओर अग्रसर होती है। इस स्थिति में रेखा CA और CB सम्पाती हो जाती हैं और $\angle XAC = \theta = 0^\circ$ तथा $CA = CB \therefore AB = 0$ (शून्य)

अतः 0° के संगत त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान निम्न होंगे

$$\sin 0^\circ = \frac{CB}{CA} = \frac{0}{CA} = 0$$

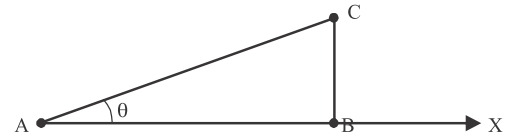
$$\cos 0^\circ = \frac{AB}{CA} = \frac{CA}{CA} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{0}{AB} = 0$$

$$\sec 0^\circ = \frac{CA}{AB} = \frac{CA}{0} = \infty$$

$$\cot 0^\circ = \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{0} = \infty$$

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{0} = \infty$$



आकृति 6.01

6.2 कोण 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात

$\triangle CBA$ से स्पष्ट है कि जैसे-जैसे θ बढ़ता जाता है। वैसे-वैसे CB की लम्बाई घटती जाती है और बिन्दु B बिन्दु C के निकट आता जाता है अतः जब $\theta, 90^\circ$ के बराबर हो जाए तो बिन्दु B बिन्दु C के संपाती हो जायेगा इस स्थिति में $CB=0$ तथा $CA=AB$

$$\sin 90^\circ = \frac{AB}{CA} = \frac{AB}{AB} = 1$$

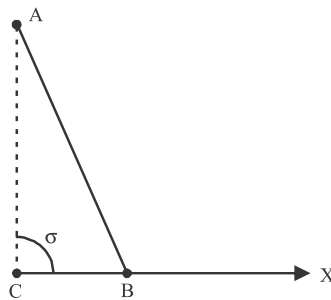
$$\cos 90^\circ = \frac{CB}{CA} = \frac{0}{AB} = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{AB}{CB} = \frac{AB}{0} = \infty$$

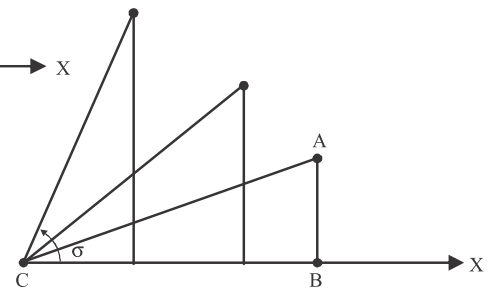
$$\cot 90^\circ = \frac{CB}{AB} = \frac{0}{AB} = 0$$

$$\sec 90^\circ = \frac{CA}{CB} = \frac{CA}{0} = \infty$$

$$\operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{CA}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$



आकृति 6.02



आकृति 6.03

6.03 कोण 30° तथा कोण 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratios of 30° and 60°)

एक समबाहु $\triangle ABC$ की रचना करते हैं, जिसका प्रत्येक भुजा की लम्बाई $2a$ है। समबाहु $\triangle$ का प्रत्येक कोण 60° होता है। शीर्ष A से भुजा BC पर लम्ब AD है। AD, $\angle A$ का समद्विभाजक होगा तथा बिन्दु D भुजा BC का मध्य बिन्दु है।

$$\therefore BD = DC = a \text{ तथा } \angle BAD = 30^\circ$$

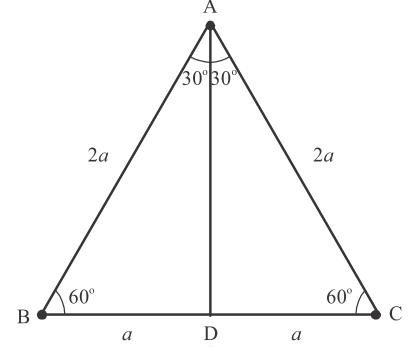
अतः $\triangle ABC$ में कोण D समकोण है तथा कर्ण $AB = 2a$, तथा $BD = a$
 $\triangle ABD$ में बौधायन प्रमेय से,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$(2a)^2 = AD^2 + a^2$$

$$AD^2 = 4a^2 - a^2$$

$$AD = \sqrt{3}a$$



आकृति 6.04

कोण 30° के त्रिकोणमितीय अनुपात

समकोण $\triangle ADB$ में आधार $(AD) = \sqrt{3}a$, लम्ब $(BD) = a$ कर्ण $(AB) = 2a$ तथा $\angle DAB = 30^\circ$

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{2a}{a} = 2$$

कोण 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात

समकोण $\triangle ADB$ में आधार $(BD) = a$, लम्ब $(AD) = a\sqrt{3}$ कर्ण $(AB) = 2a$ तथा $\angle ABD = 60^\circ$

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

6.04 कोण 45° के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric ratios of 45°)

एक समकोण $\triangle ABC$ भी रचना करते हैं जिसका कोण B समकोण है तथा $\angle A = 45^\circ$ हो, तो $\triangle ABC$ में

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$45^\circ + 90^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 45^\circ$$

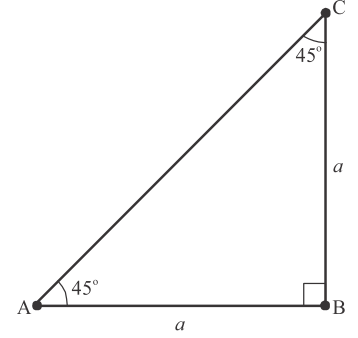
$$\therefore \angle A = \angle C$$

$$\therefore AB = BC$$

$\triangle ABC$ में बौधायन प्रमेय से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$AC = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$



आकृति 6.05

$\triangle ABC$ में, $\angle A = 45^\circ$, आधार $(AB) = a$, लम्ब $(BC) = a$, कर्ण $(AC) = \sqrt{2}a$

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$$

विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारणी

कोण (डिग्री/रेडियन)	0°	30°	45°	60°	90°
त्रिकोणमितीय अनुपात	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot \theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec \theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\operatorname{cosec} \sigma$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

उदाहरण-1. $\tan^2 60^\circ + 3 \cos^2 30^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\tan^2 60^\circ + 3 \cos^2 30^\circ$ (त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान रखने पर)

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{3})^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 3 + 3 \times \frac{3}{4} \\ &= 3 + \frac{9}{4} = \frac{12+9}{4} = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

उदाहरण-2. $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

उदाहरण-3. सिद्ध कीजिए कि $4 \sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3 \cos 60^\circ \tan 45^\circ = 2 \sec^2 60^\circ - \operatorname{cosec}^2 90^\circ$

हल: बायाँ पक्ष (L. H. S.) $= 4 \sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3 \cos 60^\circ \tan 45^\circ$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

दायाँ पक्ष (R. H. S.) $= 2 \sec^2 60^\circ - \operatorname{cosec}^2 90^\circ$

$$= 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - (1)^2 = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$\therefore L. H. S. = R. H. S.$

उदाहरण-4. $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} \left[\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \right] = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{4(3-1)} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{8} \end{aligned}$$

उदाहरण-5. सिद्ध कीजिए $3 \tan^2 30^\circ - \frac{4}{3} \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 45^\circ + \frac{4}{3} \sin^2 90^\circ = \frac{1}{3}$

हल: बायाँ पक्ष (L. H. S.) $= 3 \tan^2 30^\circ - \frac{4}{3} \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 45^\circ + \frac{4}{3} \sin^2 90^\circ$

$$\begin{aligned} &= 3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} (\sqrt{2})^2 + \frac{4}{3} (1)^2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \right) - \frac{1}{2} \cdot (2) + \frac{4}{3} \\ &= 1 - 1 - 1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \text{ दाया पक्ष (R. H. S.)} \end{aligned}$$

उदाहरण.6. यदि $\tan 3x = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए। ($x < 90^\circ$)

हल: दिया है, $\tan 3x = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$

$$\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

या $\tan 3x = 1$

या $3x = 45^\circ$

या $\tan 3x = \tan 45^\circ$

या $x = 15^\circ$

उदाहरण-7. यदि $\sin(A+B) = 1$ तथा $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ यहाँ $0^\circ < (A+B) \leq 90^\circ$, $A > B$ हो, तो A तथा B के मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है $\sin(A+B) = 1$

या $\sin(A+B) = \sin 90^\circ$

या $A+B = 90^\circ \quad \dots(1)$

तथा $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

या $\cos(A-B) = \cos 30^\circ$

या $A-B = 30^\circ \quad \dots(2)$

समीकरण (1) व (2) समीकरण को जोड़ने पर

$$(A+B) + (A-B) = 90 + 30^\circ$$

$$2A = 120^\circ$$

या $A = 60^\circ$

A का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$60^\circ + B = 90^\circ$$

$$B = 30^\circ$$

$\therefore A = 60^\circ, B = 30^\circ$

उदाहरण.8. $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} = \left(\frac{3\sqrt{3}-4}{4+3\sqrt{3}} \right) \times \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{4-3\sqrt{3}} \right)$$

(अंश व हर में $(4-3\sqrt{3})$ से गुणा करने पर)

$$= \frac{-(4-3\sqrt{3})(4-3\sqrt{3})}{(4)^2 - (3\sqrt{3})^2} = \frac{-(4-3\sqrt{3})^2}{16-27}$$

$$= \frac{-(16+27-24\sqrt{3})}{-11} = \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$

$$\therefore \frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 45^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ} = \frac{43-24\sqrt{3}}{11}$$

प्रश्नमाला 6.1

निम्न के मान ज्ञात कीजिए:

- $2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ$
- $\cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ$
- $\sin^2 30^\circ + 2 \cos^2 45^\circ + 3 \tan^2 60^\circ$
- $3 \sin 60^\circ - 4 \sin^3 60^\circ$
- $\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sin^2 30^\circ + \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 45^\circ}$
- $4 \cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ + \cos^2 90^\circ$
- $\frac{4}{\cot^2 30^\circ} + \frac{1}{\sin^2 30^\circ} - \cos^2 45^\circ$
- $\frac{\tan^2 60^\circ + 4 \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ}{3 \sec^2 30^\circ + \operatorname{cosec}^2 60^\circ - \cot^2 30^\circ}$
- $\frac{\sin 30^\circ - \sin 90^\circ + 2 \cos 0^\circ}{\tan 30^\circ \tan 60^\circ}$
- $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$
- निम्न में x का मान ज्ञात कीजिए:

- $\cos x = \cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$
- $\sin 2x = \sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ$
- $\sqrt{3} \tan 2x = \sin 30^\circ + \sin 45^\circ \cos 45^\circ + 2 \sin 90^\circ$

सिद्ध कीजिए:

- $\frac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $4 \cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = -\frac{1}{4}$

$$14. \quad 4 \sin 30^\circ \sin^2 60^\circ + 3 \cos 60^\circ \tan 45^\circ = 2 \sec^2 45^\circ - \operatorname{cosec}^2 90^\circ$$

$$15. \quad \operatorname{cosec}^2 45^\circ \sec^2 30^\circ \sin^3 90^\circ \cos 60^\circ = \frac{4}{3}$$

$$16. \quad \frac{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ} = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}$$

$$17. \quad 2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ) = 6$$

$$18. \quad (\sec^2 30^\circ + \operatorname{cosec}^2 45^\circ)(2 \cos 60^\circ + \sin 90^\circ + \tan 45^\circ) = 10$$

$$19. \quad (1 - \sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1 + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{7}{4}$$

$$20. \quad \cos^2 0^\circ - 2 \cot^2 30^\circ + 3 \operatorname{cosec}^2 90^\circ = 2(\sec^2 45^\circ - \tan^2 60^\circ)$$

21. यदि $x = 30^\circ$ हो, तो सिद्ध कीजिए:

$$(i) \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$(ii) \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$(iii) \sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$(iv) \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

22. यदि $A = 60^\circ$ और $B = 30^\circ$ हो तो सिद्ध कीजिए:

$$\cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

विविध प्रश्नमाला-6

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (1 से 5 तक)

1. $\tan^2 60^\circ$ का मान है

$$(क) 3 \quad (ख) \frac{1}{3} \quad (ग) 1 \quad (घ) \infty$$

2. $2 \sin^2 60^\circ \cos 60^\circ$ का मान होगा

$$(क) \frac{4}{3} \quad (ख) \frac{5}{2} \quad (ग) \frac{3}{4} \quad (घ) \frac{1}{3}$$

3. यदि $\operatorname{cosec} \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ हो, तो θ का मान है

$$(क) \frac{\pi}{4} \quad (ख) \frac{\pi}{3} \quad (ग) \frac{\pi}{2} \quad (घ) \frac{\pi}{6}$$

4. $\cos^2 45^\circ$ का मान होगा

$$(क) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (ख) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (ग) \frac{1}{2} \quad (घ) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

5. यदि $\theta = 45^\circ$ हो, तो $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ का मान है
 (क) 0 (ख) 1 (ग) 2 (घ) ∞
11. $\sin^2 60^\circ \cot^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।
12. $4 \cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।
13. यदि $\cot \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए $\frac{1 - \cos^2 \theta}{2 - \sin^2 \theta} = \frac{3}{5}$
14. सिद्ध कीजिए $3(\tan^2 30^\circ + \cot^2 30^\circ) - 8(\sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ) = 0$
15. $4(\sin^4 30^\circ + \cos 60^\circ) - 3(\cos^2 45^\circ - \sin^2 90^\circ) = \frac{15}{4}$
16. $\frac{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
17. $2(\cos^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ) - 6(\sin^2 45^\circ - \tan^2 30^\circ) = 6$

उत्तरमाला प्रश्नमाला 6.1

- (1) 1 (2) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (3) $10\frac{1}{4}$ (4) 0 (5) $\frac{67}{12}$ (6) $\frac{3}{4}$
- (7) $\frac{13}{6}$ (8) $\frac{18}{7}$ (9) $\frac{3}{2}$ (10) $\sqrt{3}$
- (11) (i) 30° (ii) 15° (iii) 30°

विविध प्रश्नमाला-6

- (1) क (2) ग (3) ख (4) ग (5) ख
- (14) $\frac{1}{4}$ (15) 0