سرگرمی

ہم نے دیکھا کہ مستوی اشکال کی مماثل کی جانچ کرنے کے لیے انطباق کا عمل بہت کارآمد ہے۔ ہم نے قطعات، زاویے اور مثلثوں کے لیے مماثلت کی شرائط پر بحث کی۔ اب آپ اسی تصور کو دوسری مستوی اشکال کے لیے بڑھانے کی کوشش کیجیے۔

1۔ مختلف سائزوں کے مربع کاٹ لیجیے۔ انطباق کے طریقے کا استعمال کر کے مربعوں کے مماثلت کی شرائط معلوم کیجیے۔ مماثلت کے تحت متناظر حصوں کے تصور کو کیسے استعمال کرتے ہیں؟ کیا ان میں متناظر اضلاع ہوتے ہیں؟ کیا ان میں متناظر وتر ہوتے ہیں؟

2۔ اگر آپ دائرے لیں تو کیا ہوگا؟ دو دائروں کی مماثلت کی کیا شرائط ہیں؟ ایک بار پھر آپ انطباق کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ جانچ کیجیے۔

3۔ دوسری مستوی اشکال جیسے منتظم چھ ضلعی وغیرہ میں اس تصور کو بڑھانے کی کوشش کیجیے۔

4۔ ایک مثلث کی دو مماثل نقلیں لیجیے۔ کاغذ کو موڑ کر، جانچ کیجیے کہ کیا ان کے ارتفاع برابر ہیں؟ کیا ان کے وسطانیہ برابر ہیں؟ آپ ان کے احاطوں اور رقبوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ مماثل چیزیں ایک دوسرے کی ہو بہو نقل ہوتی ہیں۔

2۔ مستوی اشکال کی مماثلت کو انطباق کے طریقے سے جانچ بھی سکتے ہیں۔

3۔ دو سادہ اشکال جیسے F_1 اور F_2 مماثل ہوتی ہیں اگر F_1 کو چھاپ کر بنائی گئی نقل F_2 کو پوری طرح ڈھک لے۔ اس کو ہم $F_1 \cong F_2$ لکھتے ہیں۔

4۔ دو قطعات جیسے AB اور CD مماثل ہوتے ہیں اگر ان کی لمبائی برابر ہو۔ اس کو ہم $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ لکھتے ہیں۔ جب کہ اس کو ہم عام طور پر $AB = CD$ لکھتے ہیں۔

5۔ دو زاویے $\angle ABC$ اور $\angle PQR$ مماثل ہیں اگر ان کی پیائش برابر ہو۔ اس کو ہم $m\angle ABC = m\angle PQR$ یا لکھتے ہیں۔ جب کہ عام طور پر اس کو $\angle ABC = \angle PQR$ لکھتے ہیں۔

6۔ دو مثلثوں کی مماثلت کے لیے SSS کا اصول:

دی گئی مطابقت کے تحت دو مثلث مماثل ہوتے ہیں اگر ایک کے تین اضلاع دوسرے کے تین متناظر اضلاع کے برابر ہیں۔

7۔ دو مثلثوں کی مماثلت کے لیے SAS کا اصول:

دی گئی مطابقت کے تحت، دو مثلث مماثل ہوتے ہیں اگر ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کے درمیان کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے دو متناظر اضلاع اور ان کے درمیان کے زاویہ کے برابر ہو۔

8۔ دو مثلثوں کی مماثلت کے لیے ASA اصول:

دی گئی مطابقت کے تحت، دو مثلث مماثل ہیں اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کے درمیان کا ضلع دوسرے مثلث کے متناظر زاویوں اور ان کے درمیان کے ضلع کے برابر ہیں۔

9۔ دو مثلثوں کی مماثلت کے لیے RHS اصول:

دی گئی مطابقت کے تحت دو قائمہ زاوی مثلث مماثل ہیں اگر ایک مثلث کا وتر اور کوئی ایک ضلع دوسرے مثلث کے وتر اور متناظر ضلع کے برابر ہوں۔

10۔ دو مثلثوں کی مماثلت کے لیے AAA جیسا کوئی اصول نہیں ہے:

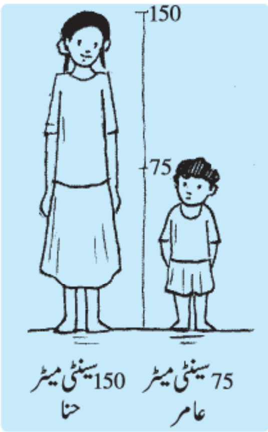
دو مثلث جن کے متناظر زاویے برابر ہوں ضروری نہیں ہے کہ وہ مماثل ہوں۔ اسی مطابقت میں ایک مثلث کی بڑی نقل ہو سکتے ہیں۔ وہ صرف اسی وقت مماثل ہوتے ہیں جب ایک دوسرے کی ہو بہو نقل ہوں۔

باب 8

مقداروں کا موازنہ

4714CH08

8.1 تعارف (Introduction)



ہماری روزمرہ زندگی میں ایسے بہت سے مواقع آتے ہیں جب ہم دو مقداروں کا موازنہ کرتے ہیں۔ مان لیجیے ہم حنا اور عامر کی لمبائیوں کا موازنہ کر رہے ہیں۔ ہم نے معلوم کیا کہ

1۔ حنا عامر سے دوگنی لمبی ہے

یا

2۔ عامر کی لمبائی حنا کی لمبائی کی $\frac{1}{2}$ ہے۔

ایک اور مثال لیجیے، جہاں 20 ماربل کو ریتا اور اُمت کے درمیان اس طرح بانٹا گیا کہ ریتا کو 12 ماربل اور امت کو 8 ماربل ملے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ

1۔ ریتا کے پاس امت کے ماربلوں کے $\frac{3}{2}$ گنے ماربل ہیں۔

یا

2۔ امت کے پاس ریتا کے ماربلوں کا $\frac{2}{3}$ حصہ ہے۔

ایک اور مثال لیتے ہیں جہاں، ہم چیتے اور ایک آدمی کی رفتار کا موازنہ کرتے ہیں۔ چیتے کی رفتار، آدمی کی رفتار کی 6 گنی ہے۔

یا

آدمی کی رفتار، چیتے کی رفتار کی $\frac{1}{6}$ ہے۔

چیتے کی رفتار 120 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

آدمی کی رفتار 20 کلومیٹر فی گھنٹہ ہے۔

کیا آپ کو اس طرح موازنہ کرنا یاد ہے؟ VI کلاس میں، ہم نے اسی طرح موازنہ کرنا سیکھا تھا کہ ایک چیز دوسری کے کتنی گنی ہے۔ یہاں ہم نے دیکھا کہ اس کو الٹا بھی کیا جاسکتا ہے یعنی ایک چیز دوسری کا کتنا حصہ ہے۔

دی گئی مثالوں میں ہم لمبائیوں کی نسبت کو اس طرح لکھ سکتے ہیں:

حنا کی لمبائی: عامر کی لمبائی ہے 150:75 یا 2:1

کیا اب آپ دوسرے کیے گئے موازنوں کے لیے نسبت لکھ سکتے ہیں؟

یہ متعلقہ موازنے ہیں اور دو مختلف صورتِ حال کے لیے ایک سے بھی ہو سکتے ہیں۔

اگر حنا کی لمبائی 150 سینٹی میٹر اور عامر کی 100 سینٹی میٹر تھی تو اُن کی لمبائیوں کی نسبت ہوگی،

حنا کی لمبائی: عامر کی لمبائی =

$$150:100=\frac{150}{100}=\frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad 3:2$$

یہ بالکل اُتنی ہی ہے جتنی نسبت ریتا اور امت کے ماربلوں کی ہے۔ لہٰذا، ہم نے دیکھا کہ دو مختلف موازنوں کے لئے نسبت ایک ہی ہے۔ یاد رکھیے کہ دو چیزوں کا موازنہ کرنے کے لیے دونوں کی اکائیاں ایک سی ہونی چاہئیں۔

مثال 1 3 کلومیٹر سے 300 میٹر کی نسبت معلوم کیجیے۔

حل پہلے دونوں فاصلوں کی اکائی ایک کیجیے۔

اس لیے، 3 کلومیٹر = 3×1000 میٹر = 3000 میٹر

لہٰذا مطلوبہ نسبت ہے 3 کلومیٹر: 300 میٹر، 3000 میٹر: 300 میٹر = 10:1

8.2 معادل نسبتیں (Equivalent Ratios)

مختلف نسبتوں کا بھی ایک دوسرے سے موازنہ کیا جا سکتا ہے یہ جاننے کے لیے کہ کیا وہ معادل ہیں یا نہیں۔ ایسا کرنے کے لیے، ہم نسبتوں کو کسر کی شکل میں لکھتے ہیں اور پھر ان کا موازنہ ان کو یکساں کسروں میں بدل کر کرتے ہیں۔ اگر یہ یکساں کسریں برابر ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ نسبتیں معادل ہیں۔

مثال 2 کیا نسبتیں 1:2 اور 2:3 معادل ہیں۔

حل اس کی جانچ کرنے کے لیے، ہم کو یہ جاننے کی ضرورت ہے کہ کیا $\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

ہمارے پاس ہے $\frac{1}{2}=\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{3}{6}$ ؛ $\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6}$

ہم کو پتہ چلا کہ $\frac{4}{6}<\frac{3}{6}$ جس کا مطلب ہے کہ $\frac{2}{3}<\frac{1}{2}$

اس لیے، نسبت 1:2 نسبت 2:3 کے برابر نہیں ہے۔

مندرجہ ذیل مثالوں میں ہم اس طرح کے موازنوں کا استعمال دیکھ سکتے ہیں۔

مثال 3 ایک کرکٹ ٹیم کے ذریعے کھیلے گئے میچوں میں اُن کی کارکردگی نیچے دی گئی ہے۔

سال	جیتے	ہارے
پچھلے سال	8	2
اس سال	4	2

کون سے سال میں کارکردگی بہتر تھی
آپ یہ کیسے کہہ سکتے ہیں

حل پچھلے سال، جیتے: ہارے=8:2 =4:1

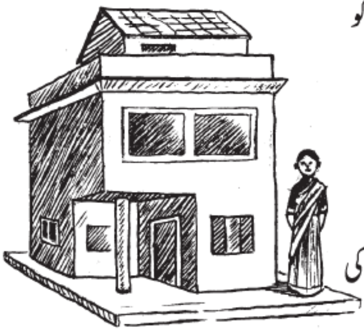
اس سال، جیتے: ہارے=4:2=2:1

یقیناً 2:1 < 4:1 (کسر کی شکل میں $\frac{4}{1} > \frac{2}{1}$)

لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ پچھلے سال ٹیم کی کارکردگی زیادہ اچھی تھی۔

چھٹی کلاس میں، ہم نے معادل کسروں کی اہمیت بھی دیکھی تھی۔ جو نسبتیں معادل وہ تناسب میں کہلاتی ہیں۔ آیئے اب ہم تناسب کے استعمال کو دہراتے ہیں۔

چیزوں کو تناسب میں رکھنا اور حل تک پہنچنا



ارونا جس بلڈنگ/عمارت میں رہتی تھی، اُس نے اُس کی ایک تصویر بنائی اور بلڈنگ کے برابر میں اُس نے اپنی امی کو کھڑے دیکھا۔

مونا نے کہا ''اس ڈرائنگ میں کچھ گڑبڑ ہے۔''

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اس میں کیا غلط ہے؟ آپ یہ کیسے کہہ سکتے ہیں؟

ایسی صورتِ حال میں، ڈرائنگ میں بنائی گئی چیزوں کی لمبائیوں کی نسبت اور ان اصلی چیزوں کی لمبائیوں کی نسبت ایک سی ہونی چاہیے۔یعنی

بلڈنگ کی اصلی اونچائی = ڈرائنگ میں بلڈنگ کی اونچائی

ماں کی اصلی اونچائی = ڈرائنگ میں ماں کی اونچائی

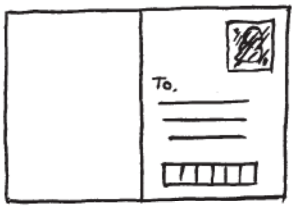
صرف تب ہی یہ تناسب میں ہوں گی۔ عام طور پر جب ڈرائنگ میں تناسب برقرار ہوتا ہے تبھی وہ دیکھنے میں اچھی لگتی ہیں۔

تناسب کے استعمال کی ایک اور مثال قومی جھنڈا بنانے میں ہے۔

کیا آپ جانتے ہیں کہ جھنڈے ہمیشہ لمبائی اور چوڑائی کے ایک خاص نسبت میں بنائے جاتے ہیں؟ مختلف ملکوں کے لیے یہ مختلف ہو سکتے ہیں لیکن زیادہ تر یہ 1.5:1 یا 1.7:1 کے آس پاس ہوتے ہیں۔

اس نسبت کی تقریباً درست قیمت 3:2 ہے۔ ہندوستانی پوسٹ کارڈ کی نسبت بھی تقریباً یہی ہے۔

اب آپ کہہ سکتے ہیں کہ ایک کارڈ جس کی لمبائی 4.5 سینٹی میٹر اور چوڑائی 3.0 ہو اُس کی نسبت اِس نسبت کے برابر ہے۔یعنی ہم کو



ضرورت ہے یہ دیکھنے کی کہ کیا 3.0 :4.5 اور 3:2 معادل ہیں۔

ہم نے نوٹ کیا کہ $4.5 = 3.0 = \frac{4.5}{3.0} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$

لہٰذا، ہم کہہ سکتے ہیں 4.5:3.0 اور 3:2 معادل ہیں۔

ہم اپنی اصلی زندگی میں بھی ایسے تناسب کا استعمال دیکھتے ہیں۔ کیا آپ کچھ اور ایسی صورتِ حال کے بارے میں سوچ سکتے ہیں؟

پچھلی کلاسوں میں ہم نے اکائی کا طریقہ بھی سیکھا تھا۔ جس میں ہم پہلے ایک اکائی کی قیمت نکالتے ہیں اور پھر مطلوبہ اکائیوں کی قیمت نکالتے ہیں۔

آیئے اب ہم دیکھتے ہیں کہ اوپر دیئے گئے دونوں طریقے ہم کو ایک ہی چیز حاصل کرنے کے لیے کیسے مددگار ہیں۔

مثال 4 ایک نقشہ میں پیمانہ 2 سینٹی میٹر = 1000 کلومیٹر دیا گیا ہے۔

دونوں جگہوں کے درمیان اصل فاصلہ، کلومیٹر میں، کتنا ہے۔ اگر نقشہ میں یہ 2.5 سینٹی میٹر ہے؟

حل

اَرون نے اس کو ایسے کیا

مان لیا فاصلہ = x کلومیٹر

اس لیے، $1000 : x = 2 : 2.5$

اس لیے، $\frac{1000}{x} = \frac{2}{2.5}$

$$\frac{1000 \times x \times 2.5}{x} = \frac{2}{2.5} \times x \times 2.5$$

$$1000 \times 2.5 = 2 \times 2$$

$$x = 1250$$

میرا نے اس کو ایسے کیا

2 سینٹی میٹر کا مطلب 1000 کلومیٹر

1 سینٹی میٹر کا مطلب $\frac{1000}{2}$ کلومیٹر

لہٰذا، 2.5 سینٹی میٹر کا مطلب $\frac{1000}{2} \times 2.5$ کلومیٹر

= 1250 کلومیٹر

اَرون نے ان نسبتوں کو برابر کر کے تناسب بنایا اور پھر مساوات کو حل کیا۔ میرا نے پہلے 1 سینٹی میٹر کا متناظر فاصلہ تیار کیا پھر اس کا استعمال 2.5 سینٹی میٹر فاصلے کے متناظر فاصلے نکالنے کے لیے کیا۔

آیئے اکائی کا طریقہ استعمال کرنے کی کچھ اور مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال 5 6 پیالوں کی قیمت ₹ 90 ہے۔ ایسے 10 پیالوں کی قیمت کیا ہوگی؟

حل 6 پیالوں کی قیمت = ₹ 90

اس لیے 1 پیالے کی قیمت = ₹ $\frac{90}{6}$

لہٰذا، 10 پیالوں کی قیمت = ₹ $\frac{90}{6} \times 10$ = ₹ 150

مثال 6 میری کار 25 لیٹر پیٹرول میں 150 کلومیٹر جاتی ہے۔ 30 لیٹر پیٹرول میں یہ کتنی دور جائے گی۔

حل 25 لیٹر پیٹرول میں کار جاتی ہے = 150 کلومیٹر

1 لیٹر پیٹرول میں کار جائے گی = $\frac{150}{25}$ کلومیٹر

لہٰذا، 30 لیٹر پیٹرول میں کار جائے گی = $30 \times \frac{150}{25}$ کلومیٹر = 180 کلومیٹر

اس طریقہ میں، ہم پہلے ایک اکائی کی قیمت یا اکائی شرح معلوم کرتے ہیں۔ یہ دو مختلف خصوصیات کا موازنہ کر کے کیا جاتا ہے مثال کے طور پر، جب آپ کو کل قیمت اور چیزوں کی تعداد کا موازنہ کرتے ہیں تو آپ کو قیمت فی عدد حاصل ہوتی ہے یا اگر آپ طے کیے گئے فاصلے اور اُس میں لیے گئے وقت کا موازنہ کرتے ہیں تو ہم کو فاصلہ فی اکائی وقت ملتا ہے۔ لہٰذا، آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہم اکثر 'فی' یا ہر ایک، کا استعمال کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر، کلومیٹر فی گھنٹہ، طلبہ فی ٹیچر وغیرہ کو اکائی شرح کے لیے استعمال کرتے ہیں۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے:

ایک چیونٹی اپنے وزن کا 50 گنا وزن اٹھا سکتی ہے۔ اگر ایک آدمی بھی ایسا کر سکتا ہے تو آپ کتنا وزن اٹھا سکتے ہیں؟

مشق 8.1

1۔ درج ذیل کی نسبت معلوم کیجیے۔

(a) 5 ₹ کی 50 پیسے سے — (b) 15 کلوگرام کی 210 گرام سے

(c) 9 میٹر کی 27 سینٹی میٹر سے — (d) 30 دنوں کی 36 گھنٹے سے

2۔ ایک کمپیوٹر لیب میں ہر 6 طلبہ کے لیے 3 کمپیوٹرس ہیں۔ 24 طلبہ کے لیے کتنے کمپیوٹروں کی ضرورت ہوگی؟

3۔ راجستھان کی آبادی = 570 لاکھ اور یو پی کی آبادی = 1660 لاکھ ہے

راجستھان کا رقبہ = 3 لاکھ مربع کلومیٹر اور یو پی کا رقبہ = 2 لاکھ مربع کلومیٹر

(i) دونوں صوبوں میں فی مربع کلومیٹر کتنے لوگ رہتے ہیں۔

(ii) کون سا صوبہ کم آباد ہے۔

8.3 فی صد — مقداروں کے موازنے کا ایک اور طریقہ:

(Percentage - Another way of Comparing Quantities)

انیتا کی رپورٹ
کل: $\frac{320}{400}$ فی صد: 83.3

ریتا کی رپورٹ
کل: $\frac{300}{360}$ فی صد: 80

انیتا نے کہا کہ اُس کے مارکس زیادہ اچھے ہیں کیونکہ اس کے 320 مارکس ہیں جب کہ ریتا کے صرف 300 ہیں۔ کیا آپ اس سے متفق ہیں؟ آپ کے خیال میں کس کے زیادہ اچھے ہیں؟

مانسی نے بتایا کہ کل حاصل شدہ مارکس کا موازنہ کر کے کچھ کہا نہیں جا سکتا کہ کس کے مارکس اچھے ہیں کیونکہ وہ مارکس جس میں

سے یہ مارکس آئے ہیں دونوں کے الگ الگ ہیں۔ اس نے کہا کہ رپورٹ کارڈ میں دیے گئے فی صد کو کیوں نہیں دیکھ لیتی ہو؟

انیتا کی فی صد 80 تھی اور ریتا کی 83۔ اس لیے اس سے پتہ چلتا ہے کہ ریتا نے زیادہ اچھا کیا ہے۔ کیا آپ اس سے متفق ہیں؟

فی صد ایسی کسر کا شمار کنندہ ہے جس کا نسب نما 100 ہو اور نتائج کا موازنہ کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے۔ آیئے اس کو تفصیل سے سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

8.3.1 فیصد کے معنی (Meaning of Percentage)

فی صد کو انگریزی میں Percent کہتے ہیں، جو کہ لاطینی زبان کے لفظ 'per—centum' سے نکلا ہے جس کے معنی ہیں Per hundred اسی طرح **فیصدی کا مطلب فی۔سیکٹرہ (100) ہے۔**

فیصد کی علامت % سے ظاہر کرتے ہیں جس کا مطلب سوواں بھی ہے یعنی 1% کا مطلب سو میں سے 1 یا ایک سوواں۔ اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

اس کو سمجھنے کے لیے مندرجہ ذیل مثال پر دھیان دیجیے۔

رینا نے ایک میز پوش بنایا جس میں اس نے مختلف رنگ کے 100 ٹائلوں کا استعمال کیا۔ اس نے پہلے ہرے، لال اور نیلے ٹائلوں کو الگ الگ گنا اور درج ذیل جدول میں بھرا۔ کیا اس جدول کو مکمل کرنے میں آپ اُس کی مدد کر سکتے ہیں؟

رنگ	ٹائلوں کی تعداد	شرح فی سیکڑہ	کسر	لکھتے ہیں	پڑھتے ہیں
پیلا	14	14	$\frac{14}{100}$	14%	14 فیصد
ہرا	26	26	$\frac{26}{100}$	26%	26 فیصد
لال	35	35	--	--	--
نیلا	25	—	--	--	--
کل	**100**				

کوشش کیجیے:

1۔ مندرجہ ذیل اعداد و شمار کے لیے بچوں کی مختلف لمبائیوں کا فیصد معلوم کیجیے۔

لمبائیاں	**بچوں کی تعداد**	**کسر میں**	**فیصد میں**
110 سینٹی میٹر	22		
120 سینٹی میٹر	25		
128 سینٹی میٹر	32		
130 سینٹی میٹر	21		
کل	100		

2۔ ایک دکان پر جوتوں کے مختلف سائز مندرجہ ذیل تعداد میں موجود تھے۔

سائز 2: 20 سائز 3: 30 سائز 4: 28

سائز 5: 14 سائز 6: 8

اس معلومات کو جدولی شکل میں لکھیے ۔جیسا کہ پہلے کیا جا چکا ہے، اور پھر جوتوں کے ہر سائز کا فیصد معلوم کیجیے۔

فیصد جب کل تعداد سو نہ ہو:

ان سبھی مثالوں میں چیزوں کی کل تعداد 100 ٹائل ہے۔مثال کے طور پر، رینا کے پاس کل 100 ٹائلس تھے، کل بچے 100 تھے اور کل جوتوں کی تعداد 100 تھی۔ اگر چیزوں کی کل تعداد سو نہ ہو تو ہم کسی چیز کا فیصد کیسے نکالیں گے؟ ایسے حالات میں، کسر کو ایک ایسی معادل کسر میں بدلنے کی ضرورت ہوتی ہے جس کا نسب نما 100 ہو۔درج ذیل مثال پر دھیان دیجیے۔آپ کے پاس ایک ہار ہے جس میں دو رنگ کے بیس موتی ہیں۔

رنگ	موتیوں کی تعداد	کسر	نسب نما سو	فیصد میں
لال	8	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20}\times\frac{100}{100}=\frac{40}{100}$	40%
نیلا	12	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{20}\times\frac{100}{100}=\frac{60}{100}$	60%
کل	20			

انور نے لال موتیوں کا فیصد ایسے نکالا

20 موتیوں میں سے لال موتیوں کی تعداد =8

لہٰذا، 100 میں لال موتیوں کی تعداد $\frac{8}{100}\times 100$ =40 (سو میں سے) =40%

آشا نے اس کو اس طرح کیا

$$\frac{8}{20}=\frac{8\times5}{20\times5}$$
$$=\frac{40}{100}=40\%$$

ہم نے دیکھا کہ اگر کل چیزوں کی تعداد 100 نہ ہو تو فیصد نکالنے کے لیے یہ تین طریقے استعمال کیے جا سکتے ہیں۔جدول میں دکھائے گئے طریقے میں ہم کسر کو $\frac{100}{100}$ سے ضرب کرتے ہیں۔اس سے کسر کی قیمت نہیں بدلتی ہے۔اس کے بعد نسب نما میں صرف 100 باقی بچ جاتا ہے۔

انور نے اکائی کا قاعدہ استعمال کیا۔آشا نے نسب نما میں 100 حاصل کرنے کے لیے $\frac{5}{5}$ سے ضرب کیا۔آپ کو جو طریقہ ٹھیک لگے آپ اس کا استعمال کر سکتے ہیں۔آپ اپنا بھی کوئی طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

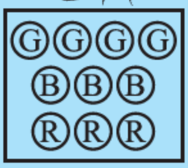
انور کے ذریعے استعمال کیا گیا طریقہ تمام نسبتوں کے لیے کام کر سکتا ہے۔کیا آشا کے ذریعے استعمال کیا گیا طریقہ بھی سبھی نسبتوں کے لیے کام کر سکتا ہے؟ انور نے کہا کہ آشا کا طریقہ صرف اُس وقت استعمال کیا جا سکتا ہے جب آپ کو کوئی ایسا فطری عدد مل سکے جس کو نسب نما سے ضرب کرنے پر آپ کو 100 حاصل ہو سکے۔کیونکہ نسب نما 20 تھا اس لیے اس کا 5 سے ضرب کر کے اس نے 100

حاصل کیا۔ اگر نسب نما 6 ہوتا تو وہ یہ طریقہ استعمال نہیں کر سکتی تھی۔ کیا آپ اس بات سے متفق ہیں؟

کوشش کیجیے:

1۔ مختلف رنگوں کے 10 چپس کا ایک مجموعہ دیا گیا ہے۔

رنگ	تعداد	کسر	نسب نما سو	فیصدی میں
ہرا				
نیلا				
لال				
کل				



جدول کو مکمل کیجیے اور ہر رنگ کے چپس کا فیصد معلوم کیجیے۔

2۔ مالا کے پاس چوڑیوں کا ایک مجموعہ ہے۔ اس کے پاس 20 سونے کی چوڑیاں اور 10 چاندی کی چوڑیاں ہیں۔ ہر قسم کی چوڑیوں کا فیصد کیا ہے؟ کیا آپ اس کو اوپر دی گئی مثال کی طرح جدول میں پڑھ سکتے ہیں؟

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے:

1۔ نیچے دی گئی مثالوں کو دیکھیے اور ان میں سے ہر ایک کے لیے بحث کیجیے کہ موازنہ کے لیے کون سا بہتر ہے۔ فضا میں، 1 گرام ہوا میں شامل ہیں:

78% نائٹروجن
21% آکسیجن
1% دوسری گیس

یا

.78 گرام نائٹروجن
.21 گرام آکسیجن
.01 گرام دوسری گیس

2۔ ایک قمیص میں ہے:

60% کاٹن
40% پالیسٹر

یا

$\frac{3}{5}$ کاٹن
$\frac{2}{5}$ پالیسٹر

8.3.2 کسری اعداد کو فیصد میں بدلنا (Converting Fractional Number of Percentage)

کسری اعداد کے مختلف نسب نما ہو سکتے ہیں۔ کسری اعداد کا موازنہ کرنے کے لیے ہمیں یکساں نسب نما کی ضرورت ہوتی ہے اور ہم نے دیکھا کہ موازنہ کرنے کے لیے اگر نسب نما 160 ہو تو یہ ہمارے لیے زیادہ آسان ہے۔ یعنی ہم کسر کو فیصد میں بدل رہے ہیں۔ آیئے مختلف کسری اعداد کو فیصد میں بدلنے کی کوشش کرتے ہیں۔

مثال 7 $\frac{1}{3}$ کو فیصد کی شکل میں لکھیے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{100}{100}=\frac{1}{3}\times100\%$$

$$=\frac{100}{3}\%=33\frac{1}{3}\%$$

مثال 8 ایک کلاس میں 25 طلبہ میں سے 15 لڑکیاں ہیں۔ لڑکیوں کا فیصد بتائیے؟

حل 25 طلبہ میں سے 15 لڑکیاں ہیں۔

اس لیے، لڑکیوں کا فیصد ہے

کلاس میں 60% لڑکیاں ہیں۔

مثال 9 $\frac{5}{4}$ کو فیصد میں بدلیے۔

حل ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{5}{4}=\frac{5}{4}\times100\%=125\%$$

ان مثالوں سے، ہم نے دیکھا کہ کسر واجب سے متعلق فیصد 100 سے کم ہے جب کہ کسر غیر واجب سے متعلق فیصد 100 سے زیادہ ہے۔

سوچیے اور بحث کیجیے۔

(i) کیا آپ کیک کا 50% حصہ کھا سکتے ہیں؟ کیا آپ کیک کا 100% حصہ کھا سکتے ہیں؟
کیا آپ کیک کا 150% حصہ کھا سکتے ہیں؟

(ii) کیا کسی چیز کی قیمت 50% بڑھ سکتی ہے؟ کیا کسی چیز کی قیمت 100% بڑھ سکتی ہے؟
کیا کسی چیز کی قیمت 150% بڑھ سکتی ہے؟

8.3.3 اعشاریہ کو فیصد میں بدلنا:

ہم نے دیکھا کہ کیسے کسری اعداد کو فیصد میں بدلا جا سکتا ہے۔ آئیے اب ہم معلوم کریں کہ کیسے اعشاریہ فیصد میں بدلا جا سکتا ہے۔

مثال 10 دیئے گئے اعشاریہ کو فیصد میں کیسے بدلا جا سکتا ہے۔

(a) 0.75 (b) 0.09 (c) 0.2

(a) $0.75 = 0.75 \times 100\%$

$= \frac{75}{100} \times 100 = 75\%$

(b) $0.09 = \frac{9}{100} = 9\%$

(c) $0.2 = \frac{2}{10} \times 100\% = 20\%$

کوشش کیجیے:

1۔ مندرجہ ذیل کو فیصد میں بدلیے۔

(a) $\frac{12}{16}$ (b) 3.5 (c) $\frac{49}{50}$ (d) $\frac{2}{2}$ (e) 0.05

2۔ (i) 32 طلبہ میں سے 8 غیر حاضر ہیں۔ کتنے فیصد طلبہ غیر حاضر ہیں؟

(ii) ایک دکان میں 500 اشیاء ہیں جن میں سے 5 خراب ہیں، کتنے فیصد خراب ہیں؟

(iv) 120 ووٹروں میں سے 90 نے ہاں میں ووٹ دیا۔ کتنے فیصد نے ہاں میں ووٹ دیا؟

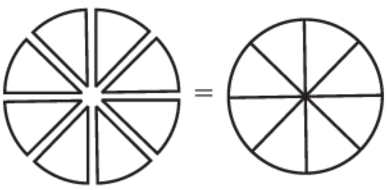
8.3.4 فیصد کو کسر یا اعشاریہ میں بدلنا:

اب تک ہم نے کسری اعداد اور اعشاریہ کو فیصد میں بدلا ہے۔ ہم اس کا الٹا بھی کر سکتے ہیں ۔یعنی دی گئی فیصد کو ہم اعشاریہ یا کسر میں بدل سکتے ہیں۔ جدول کو دیکھیے، مشاہدہ کیجیے اور اس کو مکمل کیجیے۔

فیصد	1%	10%	25%	50%	90%	125%	250%
کسر	$\frac{1}{100}$	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$					
اعشاریہ	0.10	0.10					

کچھ اور مثالیں بنائیے اور ان کو حل کیجیے

حصوں کو جوڑ کر ہمیشہ مکمل حاصل ہوتا ہے (Parts always add to give a whole)

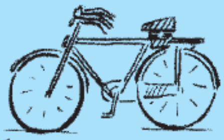


رنگین ٹائیلوں، طلبہ کی لمبائیوں اور ہوا میں گیسوں سے متعلق مثالوں میں ہم نے دیکھا کہ جب فیصد کو جوڑا گیا تو 100 حاصل ہوا۔ کسی مکمل کو بنانے والے سبھی حصوں کو جب جوڑا جاتا ہے تو حاصل ہوتا ہے مکمل یا 100%۔ اس لیے، اگر ہمیں ایک حصہ دیا گیا ہے تو ہم ہمیشہ دوسرا حصہ معلوم کر سکتے ہیں۔ مان لیجیے طلبہ کی دی گئی تعداد کا 30% لڑکے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ اگر کل طلبہ 100 ہیں تو ان میں سے 30 لڑکے ہیں اور باقی لڑکیاں ہوں گی۔

اس لیے، یقیناً لڑکیاں ہوں گی۔

(100-30)%=70%

کوشش کیجیے:



1 35%+______%=100%,　　　64%+20%+______%=100%

45%=100% - ______%,　　　70%=______%-30%

2۔ اگر کسی کلاس میں 65% طلبہ کے پاس سائیکل ہے۔ تو کتنے فیصد طلبہ کے پاس سائیکل نہیں ہوگی؟

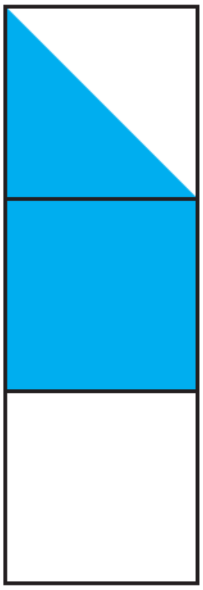
3۔ ہمارے پاس ایک ٹوکری سیب، سنترے اور آموں سے بھری ہوئی ہے۔ اگر 50% سیب، 30% سنترے ہیں تو آم کتنے فیصد ہوں گے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے:

ایک ڈریس پر ہوئے خرچے کو دیکھیے۔

کڑھائی پر 20%، کپڑے پر 50%، سلائی پر 30% کیا آپ ایسی کچھ اور مثالیں سوچ سکتے ہیں۔

8.3.5 اندازہ لگانے کا مزا (Fun with Estimation)



کسی رقبہ کے حصوں کا اندازہ لگانے میں فیصد ہماری مدد کرتا ہے۔

مثال 11 دی گئی تصویر کا کتنا حصہ رنگین ہے؟

حل ہم پہلے تصویر کے رنگ بھرے حصہ کی کسر معلوم کریں گے، پھر اس کسر سے رنگین حصے کا فیصد معلوم کریں گے۔

آپ دیکھیں گے کہ تصویر کا ادھا حصہ رنگین ہے۔ اور

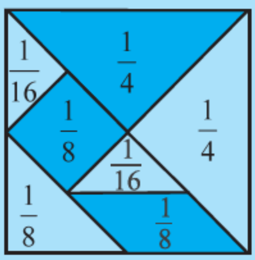
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100\% = 50\%$ اس طرح تصویر کا 50% رنگین ہے۔

کوشش کیجیے:

ان تصویروں کا کتنا فیصد رنگین ہے۔

(i)

(ii)



آپ خود بھی کچھ اور تصویریں بنا سکتے ہیں۔ اور اپنے دوستوں سے رنگین حصوں کا اندازہ لگانے کے لیے کہیے۔

8.4 فیصد کا استعمال (Use of Percentage)

8.4.1 فیصد کی وضاحت (Interpreting Percentages)

ہم نے دیکھا کہ موازنہ کرنے میں فیصد ہماری کیسی مدد کرتا ہے۔ ہم نے کسری اعداد اور اعشاریہ کو فیصد میں بدلنا بھی سیکھا۔ اب ہم سیکھیں گے کہ کیسے فیصد کا استعمال ہم روزمرہ کی زندگی میں کر سکتے ہیں۔

اس کے لیے ہم سب سے پہلے مندرجہ ذیل بیانات کی وضاحت کرتے ہیں۔

- روی اپنی کل آمدنی کا 5% بچاتا ہے۔
- میرا کے 20% ڈریس (کپڑے) نیلے رنگ کے ہیں۔
- ریکھا ہر کتاب کی فروخت پر 10% کماتی ہے۔

ان بیانات سے آپ کیا نتائج اخذ کرتے ہیں؟

5% سے ہمارا مطلب ہے 100 میں سے 5 حصے یا اسکو ہم $\frac{5}{100}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ اس کا مطلب ہے روی نے ہر 100 روپے میں سے ₹ 5 بچائے۔ اسی طریقے سے دوسرے بیانات کی بھی وضاحت کیجیے۔

8.4.2 فیصد کو 'کتنے' میں بدلنا (Converting Percentages to 'How many')

درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 12 40 بچوں پر کیے گئے ایک سروے میں دکھایا گیا کہ 25% کو فٹبال کھیلنا پسند ہے۔ کتنے بچوں کو فٹ بال کھیلنا پسند ہے؟

حل یہاں بچوں کی کل تعداد 40 ہے۔ اس میں سے 25% کو فٹ بال کھیلنا پسند ہے۔ مینا اور ارون نے مندرجہ ذیل طریقوں سے تعداد معلوم کیا۔ آپ کوئی سا بھی طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

ارون نے اس طرح کیا 100 میں سے 25 کو فٹ بال کھیلنا پسند ہے اس لیے، ان بچوں کی تعداد جن کو فٹ بال کھیلنا پسند ہے = $\frac{25}{100} \times 40 = 10$

میرا نے اس طرح کیا = 40 کا 25%

$$\frac{25}{100} \times 40 = 10$$

لہٰذا، 40 میں سے 10 بچوں کو فٹ بال کھیلنا پسند ہے۔

کوشش کیجیے:

1۔ معلوم کیجیے۔ (a) 164 کا 50% (b) 12 کا 75% (c) 64 کا $12\frac{1}{2}\%$

2۔ 25 طلبہ کی ایک کلاس میں 8% طلبہ کو بارش میں بھیگنا پسند ہے۔ کتنے طلبہ کو بارش میں بھیگنا پسند ہے۔

مثال 13 راہل نے ایک سوئیٹر خریدا جس پر اس کو 25% کی چھوٹ ملی اس لیے اس نے 20 ₹ بچائے۔ چھوٹ سے پہلے سوئیٹر کی قیمت کیا تھی۔

حل جب سوئیٹر کی قیمت 25% گھٹائی گئی تب راہل نے 20 ₹ بچائے۔ اس کا مطلب ہے کہ راہل نے کل قیمت کا 25% بچایا۔ آیئے دیکھتے ہیں کہ موہن اور عبدل نے سوئیٹر کی اصل قیمت کیسے معلوم کی۔

موہن کا حل	عبدل کا حل
اصل قیمت کا 25%=20 ₹	ہر 100 روپے پر 25 ₹ بچائے۔
مان لیجیے اصل قیمت (₹ میں) P ہے	اصل قیمت جس پر 20 ₹ بچائے گئے۔
اس لیے، P کا 25%=20 یا $\frac{25}{100} \times P = 20$	$= \frac{100}{25} \times 20 = ₹\ 80$
یا $\frac{P}{4} = 20$ یا P=20×4	
اس لیے P=80	

لہٰذا دونوں نے سوئیٹر کی اصل قیمت 80 ₹ نکالی۔

کوشش کیجیے:

1۔ 9 کس عدد کا 25% ہے؟

2۔ 15 کس عدد کا 75% ہے؟

مشق 8.2

1۔ دیے گئے کسری اعداد کو فیصد میں بدلیے۔

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{3}{40}$ (d) $\frac{2}{7}$

2۔ دیے گئے اعشاریہ کو فیصد میں بدلیے۔

(a) 0.65 (b) 2.1 (c) 0.02 (d) 12.35

3۔ اندازہ لگایئے کہ تصویر کا کون سا حصہ رنگین ہے اور پھر رنگین حصے کا فیصد بتایئے۔

(i) (ii) (iii)

4۔ معلوم کیجیے۔

(a)250 کا 15%(b) 1 گھنٹے کا 1% (c)2500روپے کا 20%(d)1 کلوگرام کا 75%

5۔ کل مقدار بتائیے اگر

(a)اس کا 5%، 600 ہے (b)اس کا 12%، 1080 روپے ہے (c)اس کا 40%، 500 کلومیٹر ہے

(d)اس کا 70%، 14 منٹ ہے (e)اس کا 8%، 40 لیٹر ہے۔

6۔ دیے گئے فیصد کو اعشاریائی اعداد اور کسر کی سادہ ترین شکل میں بدلیے۔

(a) 25% (b) 150% (c) 20% (d) 5%

7۔ ایک شہر میں 30% عورتیں، 40% مرد اور باقی بچے ہیں کتنے فیصد بچے ہیں؟

8۔ حلقہ رائے دہندگان کے 15,000 ووٹروں میں سے 60% نے ووٹ دیا۔ کتنے فیصد لوگوں نے ووٹ نہیں دیا۔ کیا آپ معلوم کر سکتے ہیں کہ اصل میں کتنے لوگوں نے ووٹ نہیں دیا؟

9۔ میتا نے اپنی تنخواہ میں سے 4000 روپے بچائے۔ اگر یہ اس کی تنخواہ کا 10% ہے تو اس کی تنخواہ کتنی ہے؟

10۔ ایک کرکٹ ٹیم نے ایک سیزن میں 20 میچ کھیلے۔ وہ ان میں سے 25% جیت گئی۔ اس نے کل کتنے میچ جیتے؟

8.4.3 نسبت سے فیصد (Ratios to Percents)

کبھی کبھی، نسبت کی شکل میں حصے دیے جاتے ہیں جن کو فیصد میں بدلنا ہوتا ہے، مندرجہ ذیل مثالوں پر دھیان دیجیے۔

مثال 14 رینا کی ماں نے کہا کہ اڈلی بنانے کے لیے تم کو دو حصے چاول اور ایک حصہ اڑد کی دال لینی چاہیے۔ اس مرکب کا کتنا فیصد حصہ چاول ہوگا اور کتنا فیصد اڑد کی دال ہوگا؟

حل نسبت کی شکل میں ہم اس کو دیکھیں گے

چاول : اڑد کی دال = 2:1

اب، کل حصے ہو گئے = 1+2 = 2۔ اس کا مطلب ہے $\frac{2}{3}$ حصہ چاول ہے اور $\frac{1}{3}$ حصہ اڑد کی دال ہے۔

اس لیے، چاول کا فیصد ہوگا =

$$=\frac{2}{3}\times 100\% = \frac{200}{3}\% = 66\frac{2}{3}\%$$

اڑد کی دال کا فیصد ہوگا

$$=\frac{1}{3}\times 100\% = \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$$

مثال 15 اگر 250 روپے کو روی، راجو اور رائے میں اس طرح بانٹنا ہے کہ روی کو دو حصے، راجو کو تین حصے اور رائے کو پانچ حصے

ملیں۔ان میں سے ہر ایک کو کتنے روپے ملیں گے؟ ان کا فیصد کیا ہوگا؟

حل تینوں لڑکوں کو ملنے والے روپیوں کو نسبت کی شکل میں اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔2:3:5— حصوں کی کل تعداد=2+3+5=10

ہر ایک کو ملی رقم	ہر ایک کے لیے رقم کا فیصد
250 روپے کا $\frac{2}{5} = ₹\ 50$	روی کو ملے = $\frac{2}{10} \times 100\% = 20\%$
250 روپے کا $\frac{3}{10} = ₹\ 75$	راجو کو ملے = $\frac{3}{10} \times 100\% = 30\%$
250 روپے کا $\frac{5}{10} = ₹\ 125$	رائے کو ملے = $\frac{5}{10} \times 100\% = 50\%$

کوشش کیجیے:

1۔ مانو اور سونو کو 15 ٹافیاں اس طرح بانٹیے کہ بالترتیب دونوں کو %20 اور %80 ٹافیاں ملیں۔

2۔ کسی مثلث کے زاویوں کی نسبت 2:3:4 ہے۔ ہر زاویہ کی قیمت معلوم کیجیے۔

8.4.4 فیصد کی شکل میں بڑھنا یا گھٹنا (Increase or Decrease as Percent)

کبھی کبھی کچھ حالات ایسے ہوتے ہیں جہاں ہم کو کسی خاص مقدار کی بڑھوتری یا گھٹاؤ، فیصد کی شکل میں جاننے کی ضرورت ہوتی ہے۔مثال کے طور پر، اگر کسی صوبے کی آبادی 5,50,000 سے بڑھ کر 6,05,000 ہوگئی تو اگر ہم یہ کہیں کہ آبادی %10 بڑھی تو بات زیادہ بہتر طریقے سے سمجھی جاتی ہے۔کسی مقدار کے گھٹنے یا بڑھنے کو اس کی ابتدائی مقدار کے فیصد کی شکل میں کیسے دکھایا جاسکتا ہے؟ مندرجہ ذیل مثالوں پر دھیان دیجیے۔

مثال 16 ایک اسکول کی ٹیم نے اس سال 6 میچ جیتے اور پچھلے سال اس نے 4 جیتے تھے۔کتنے فیصد اضافہ ہوا؟

حل جیت کی تعداد میں بڑھوتری (یا بدلاؤ کی مقدار)= 4-6=2

$$\text{فیصد بڑھوتری} = \frac{\text{بدلاؤ کی مقدار}}{\text{ابتدائی مقدار}} \times 100$$

$$\frac{\text{جیت کی تعداد میں اضافہ}}{\text{جیت کی تعداد میں اضافہ}} \times 100 = \frac{2}{4} \times 100 = 50$$

مثال 17 کسی ملک میں اَن پڑھ لوگوں کی تعداد 10 سالوں میں 150 لاکھ سے گھٹ کر 100 لاکھ رہ گئی۔گھٹنے کا فیصد کیا ہے؟

حل ابتدائی مقدار=شروع میں اَن پڑھ لوگوں کی تعداد=150 لاکھ

بدلاؤ کی مقدار=اَن پڑھ لوگوں کی تعداد میں کمی=100-150=50 لاکھ

اس لیے گھٹنے کا فیصد $= \frac{\text{بدلاؤ کی مقدار}\times 100}{\text{ابتدائی مقدار}} = \frac{50}{150}\times 100 = 33\frac{1}{3}$

چنانچہ یہاں فیصد میں $33\frac{1}{4}$ کی کمی نظر آتی ہے۔

کوشش کیجیے:

1۔ بڑھوتری یا گھٹاؤ کا فیصد معلوم کیجیے:

–ایک قمیص کی قیمت 80 ₹ سے گھٹ کر 60₹ ہوگئی۔

–ایک جانچ میں مارکس 20 سے بڑھ کر 30 ہوگئے۔

2۔ میری ماں نے کہا کہ اُن کے بچپن میں ایک لیٹر پیٹرول کی قیمت 10₹ تھی۔ آج پیٹرول کی قیمت 70 ₹ فی لیٹر ہے۔ قیمت کتنے فیصد بڑھ گئی۔

8.5: خرید وفروخت یا چیز سے متعلقہ قیمتیں

کسی چیز کی وہ قیمت جس پر اس کو خریدا جاتا ہے اس کی قیمت خرید کہلاتی ہے۔ اس کی مخفف CP ہے۔

وہ قیمت جس پر اس کو بیچا جاتا ہے قیمت فروخت (Selling Price) کہلاتی ہے۔ اس کا مخفف SP ہے۔

آپ کی رائے میں کون سا بہتر ہے۔ آپ کی قیمت خرید سے کم قیمت پر بیچنا، برابر قیمت پر بیچنا یا زیادہ قیمت پر بیچنا؟ آپ CP اور SP دیکھتے ہوئے بتا سکتے ہیں کہ بکری فائدہ مند تھی یا نہیں۔

اگر $CP < SP$ تو آپ کو نفع ہوگا۔

نفع $= SP - CP$

اگر CP=SP تو آپ کو نہ نفع ہوگا اور نہ ہی نقصان۔ اگر SP<CP تو آپ کو نقصان ہوگا۔

نقصان $= CP - SP$

مختلف چیزوں کی قیمتوں سے جڑے بیانات کی وضاحت کرنے کی کوشش کیجیے۔

- ایک کھلونا 72 ₹ کا خریدا اور 80 ₹ کا بیچا گیا۔
- ایک ٹی شرٹ 120₹ کی خریدی اور 100 ₹ کی بیچی گئی۔

- ایک سائیکل 800₹ کی خرید کر 940₹ میں بیچی گئی۔

پہلے بیان کو دیکھیے

قیمت خرید (یاCP) 72₹ ہے اور قیمت فروخت (یاSP) 80₹ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ SP، CP سے زیادہ ہے۔ لہٰذا، یہاں منافع ہوگا۔

نفع = SP–CP $₹80 - ₹72 = ₹8$

بالکل اسی طریقے سے باقی بیانات کی وضاحت کرنے کی کوشش کیجیے۔

8.5.1 فیصد کی شکل میں نفع یا نقصان (Profit or Loss as a Percentage)

نفع یا نقصان کو فیصد میں بدلا جا سکتا ہے۔ یہ ہمیشہ CP کی مدد سے نکالا جاتا ہے۔ اوپر دی گئی مثالوں میں ہم نفع% (Profit%) یا نقصان% (Loss%) معلوم کر سکتے ہیں۔

کھلونے والی مثال کو دیکھیے۔ اس میں دیا گیا ہے

CP=72 روپے، SP=80 روپے، نفع = 8 روپے

نفع کا فیصد نکالنے کے لیے نیہا اور شیکھر نے مندرجہ ذیل طریقہ استعمال کیے۔

نیہا نے اس طریقہ سے کیا

نفع% $= \frac{\text{نفع}}{CP} \times 100 = \frac{8}{72} \times 100$

$= \frac{1}{9} \times 100 = 11\frac{1}{9}$

شیکھر نے اس طریقے سے کیا

72₹ پر نفع ہوا 8₹

100 روپے پر نفع ہوگا، نفع $= \frac{8}{72} \times 100$

$= 11\frac{1}{9}$ لہٰذا، نفع $= 11\frac{1}{9}$

اس طرح نفع ہے 8₹ اور نفع% ہے $11\frac{1}{9}$

اسی طرح دوسری مثال میں آپ نقصان کا فیصد نکال سکتے ہیں۔ یہاں پر دیا گیا ہے

CP=120₹، SP=100₹

اس لیے، نقصان = 120–100=20

120₹ پر نقصان ہے 20₹

اس لیے 100 روپے پر نقصان ہوا

نقصان فیصد $= \frac{\text{نقصان}}{CP} \times 100$

$= \frac{20}{120} \times 100$

$= \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$

نفع یا نقصان، فیصدی ہمیشہ CP پر

$= \frac{20}{120} \times 100 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$

اس طرح، نقصان% $= 16\frac{2}{3}$

آخری کیس کے لیے بھی کوشش کیجیے

اب ہم دیکھتے ہیں کہ اگر تین چیزوں یعنی SP، CP، نفع/نقصان کی مقدار یا ان کی فیصد میں سے اگر کوئی بھی دو ہم کو معلوم ہوں تو ہم تیسرا معلوم کرسکتے ہیں۔

مثال 18 ایک پھول دان کی قیمت ₹120 ہے۔ اگر ایک دوکاندار اس کو 10% نقصان پر بیچتا ہے تو قیمت فروخت بتائیے۔

حل ہم کو دیا گیا ہے کہ CP=₹120 اور نقصان 10%۔ ہم کو SP معلوم کرنی ہے۔

سوہن نے اس طرح کیا

10% نقصان کا مطلب ہے کہ اگر CP، ₹100 ہے تو نقصان ₹10 ہوگا۔ اس لیے SP ہوگی

$₹(100-10)=90$

جب CP، ₹100 ہے تو SP ہوئی 90 روپے۔

اس لیے اگر CP، ₹120 ہے تو

$SP=\frac{90}{100}\times 120=₹108$

آنندی نے اس طرح کیا

نقصان ہے CP کا 10% یعنی ₹120 کا 10%

$=\frac{10}{100}\times 120=₹12$

SP=CP−نقصان

$=₹120-₹12=₹108$

لہٰذا، دونوں ہی طریقوں سے SP، ₹108 ہوئی۔

مثال 19 ایک کھلونا کار کی قیمت فروخت ₹540 ہے۔ اگر دوکاندار اس پر 20% نفع کماتا ہے تو کھلونے کی قیمت خرید بتائیے؟

حل ہم کو دیا گیا ہے کہ SP=₹540 اور نفع=20%

امینہ نے اس طریقہ سے کیا

20% نفع کا مطلب ہے اگر CP، ₹100 ہے تو نفع ہوا 20 روپے

اس لیے، SP=100+20=120

اب جب SP، ₹120 ہے تو CP ہے 100 روپے۔

اس لیے جب SP، ₹540 ہوگی تو

$CP=\frac{100}{120}\times 540=₹450$

ارون نے اس طریقہ سے کیا

نفع ہے CP کا 20% اور

SP=CP+نفع

اس لیے، CP + 20% کا CP = 540

$CP+\frac{20}{100}\times CP=\left[1+\frac{1}{5}\right]CP$

$=\frac{6}{5}CP$ اس لیے، $540\times\frac{5}{6}=CP$

یا ₹450=CP

اس لیے، دونوں ہی طریقوں سے قیمت خرید (CP) 450 روپے آئی۔

کوشش کیجیے:

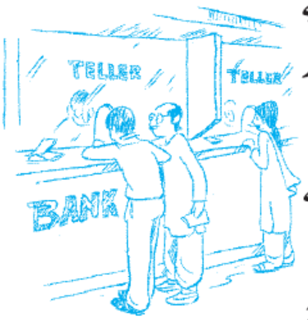
1۔ ایک دوکاندار نے ایک کرسی ₹375 کی خریدی اور اس کو ₹400 میں بیچ دیا۔ نفع کا فیصد بتائیے۔

2۔ کسی چیز کی قیمت خرید 50 ₹ ہے۔ یہ 12% نفع پر بیچی گئی۔ قیمت فروخت معلوم کیجیے۔

3۔ کوئی چیز 250 ₹ کی بیچی گئی جس پر 5% نفع ہوا۔ قیمت خرید بتائیے؟

4۔ کوئی چیز 540 ₹ کی بیچی گئی اور 5% کا نقصان ہو۔ اس کی قیمت خرید کیا تھی؟

8.6 ادھار لی گئی رقم کا کرایہ یا سادہ سود (Charge Given On Borrowed Money Or Simple Interest)



سوہنی نے بتایا کہ وہ لوگ ایک اسکوٹر خریدنے جا رہے ہیں۔ موہن نے اس سے پوچھا کہ کیا تم لوگوں کے پاس اتنے پیسے ہیں کہ اسکوٹر خرید سکو۔ سوہنی نے بتایا کہ اس کے ابا بینک سے ادھار لے رہے ہیں۔ جو رقم آپ ادھار لیتے ہیں اس کو اصل زر (Principal) کہتے ہیں۔

یہ رقم ادھار لینے والا شخص واپس کرنے سے پہلے کچھ وقت (مدت) کے لیے اس کو استعمال کرتا ہے۔ رقم اپنے پاس رکھنے اور استعمال کرنے کی وجہ سے ادھار لینے والا کچھ زائد رقم بینک کو واپس کرتا ہے۔ یہ رقم 'سود' (Interest) کہلاتی ہے۔

مدت ختم ہونے کے بعد واپس کی جانے والی رقم کل زر (Amount) کا حساب آپ ادھار لی گئی رقم میں سود کو جوڑ کر لگا سکتے ہیں۔ **یعنی سود+اصل زر=رقم**

سود عام طور پر ایک سال کے وقفہ کے لیے فیصد کی شکل میں دیا جاتا ہے۔ اس کو اس طرح لکھتے ہیں۔ مثلاً 10% سالانہ Per 10% Year یا 10% PerAnnum یا چھوٹا کر کے 10% P.a(Per annum) لکھتے ہیں۔

10% p.a کا مطلب ہے ہر 100 ₹ پر ایک سال میں آپ کو 10 ₹ سود کے دینے ہیں۔ ایک مثال لے کر دیکھتے ہیں۔

مثال 20 انیتا نے 5,000 روپے، 15% سالانہ سود کی شرح سے ایک سال کے لیے ادھار لیے۔ سال کے آخر میں وہ کتنا سود دے گی؟

حل ادھار لی گئی رقم=5,000 روپے، سود کی شرح=15% فی سال۔ اس کا مطلب ہے اگر 100 روپے ادھار لیے گئے تو اس کو ایک سال میں 15 روپے سود کے دینے ہوں گے۔ اگر اس نے 5,000 ₹ ادھار لیے تو ایک سال کا سود ہوگا

$$=\frac{15}{100}\times 5000 = 750$$

اس لیے، سال کے آخر میں اس کو جو کل زر واپس کرنی ہوگی وہ ہے 5,000+750=5,750

ہم ایک سال کا سود نکالنے کے لیے ایک فارمولا لکھ سکتے ہیں۔ اصل زر یا Principal کو P لیجیے اور سالانہ شرح فیصد (Rate per cent per annum) کو R% سے ظاہر کریں تو ہر ادھار لیے گئے 100 ₹ پر سود R ₹ دینا ہوگا۔

اس لیے، ادھار لیے گئے P روپے پر دیا گیا سود ہوگا $\frac{R\times P}{100} = \frac{R\times P}{100}$

8.6.1 زیادہ سالوں کے لیے سود (Interest for Multiple Years)

اگر ایک سال سے زیادہ مدت کے لیے رقم ادھار لی گئی تو سود بھی اس مدت کے لیے نکالنا ہوگا جتنی مدت کے لیے رقم لی گئی۔ مثال کے

طور پر اگر انیتا دو سال کے بعد رقم واپس کرے اور سود کی شرح وہی ہو تو اس کو دوگنا سود ادا کرنا ہوگا، یعنی 750 روپے پہلے سال کے لیے اور 750 ₹ دوسرے سال کے لیے بھی۔ سود نکالنے کا ایسا طریقہ جس میں اصل زر تبدیل نہ ہو سادہ سود (Simple interest) کہلاتا ہے۔ جیسے جیسے برسوں کی تعداد بڑھتی جاتی ہے تو سود بھی بڑھتا جائے گا۔ 18% شرح سے 3 سال کے لیے 100 ₹ پر 3 برسوں کے آخر میں سود ادا کرنا پڑتا ہے

$$18+18+18=3\times18= ₹\,54$$

ایک سال سے زیادہ مدت کے لیے سادہ سود نکالنے کے لیے ہم ایک فارمولا معلوم کر سکتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ اصل زر P روپے پر R% سود کی سالانہ شرح پر ایک سال کے لیے دیا جانے والا سود ہے $\frac{R\times P}{100}$۔ اس لیے T سال کے لیے سود I ہوگا۔

$$\frac{P\times R\times T}{100}=\frac{T\times R\times P}{100} \text{ یا } \frac{PRT}{100}$$

اور T سال کے آخر میں دیا جانے والا اصل زر ہوگا $A = P + I$

کوشش کیجیے:

1۔ 5% سود کی سالانہ شرح پر 10,000 ₹ کی سرمایہ کاری کی گئی۔ ایک سال بعد دیا گیا سود معلوم کیجیے۔

2۔ 7% سود کی سالانہ شرح پر 3,500 ₹ دیے گئے۔ 2 سال بعد حاصل ہونے والا سود معلوم کیجیے۔

3۔ 6.5% سود کی سالانہ شرح سے 6,050 ₹ ادھار لیے گئے۔ 3 سال بعد ادا کیا جانے والا سود اور کل زر معلوم کیجیے۔

4۔ 3.5% سود کی سالانہ شرح سے 7,000 ₹ 2 سال کے لیے ادھار لیے گئے۔ دو سال بعد ادا کیے جانے والا کل زر معلوم کیجیے۔

چیزوں کی دی گئی قیمتوں والی صورت حال کی طرح یہاں بھی اگر $I=\frac{P\times R\times T}{100}$ میں تین میں سے کوئی دو مقداریں معلوم ہوں تو آپ تیسری مقدار معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 21 اگر منوہر 4,500 روپے پر 2 سال کے لیے 750 ₹ سود کے ادا کرتا ہے تو سود کی شرح معلوم کیجیے۔

حل 1

$$I=\frac{P\times R\times T}{100}$$

اس لیے، $750=\frac{4500\times2\times R}{100}$

یا $\frac{750}{45\times2}=R$

اس لیے، شرح ہوگئی $8\frac{1}{3}\%$

2 سال کے لیے سود دیا گیا 750

اس لیے 1 سال کے لیے سود ہوگا $375 = \frac{750}{2}$ ₹

4500 روپے پر ادا کیا گیا سود ہے 375 ₹

اس لیے 100 ₹ پر ادا کیے گئے سود کی شرح ہوگی

$$\frac{375\times100}{4500}=8\frac{1}{3}\%$$

کوشش کیجیے:

1۔ آپ کے اکاؤنٹ میں 2400 ₹ ہیں اور شرح سود 5% ہے۔ کتنے سال بعد آپ 240 ₹ سود کمائیں گے؟

2۔ کسی رقم پر 5% سود کی سالانہ شرح پر 3 سال کا سود 450 ₹ ہے۔ رقم بتائیے۔

مشق 8.3

1۔ مندرجہ ذیل لین دین کے بیانات میں بتائیے کہ کس میں نفع ہوگا اور کس میں نقصان۔ ہر صورت حال میں نفع % یا نقصان % بھی بتائیے۔

(a) باغبانی میں استعمال ہونے والی قینچی 250 ₹ میں خریدی اور 325 ₹ میں بیچی۔

(b) ایک فریج 12,000 ₹ میں خریدا اور 13,500 ₹ میں بیچا گیا۔

(c) ایک الماری 2,500 ₹ میں خریدی اور 3,000 ₹ میں بیچی گئی۔

(d) ایک اسکرٹ 250 ₹ میں خریدی اور 150 ₹ میں بیچی گئی۔

2۔ نسبت کا ہر حصہ فیصدی میں بدلیے:

(a) 3:1 (b) 2:3:5 (c) 1:4 (d) 1:2:5

3۔ ایک شہر کی آبادی 25,000 سے گھٹ کر 24,500 رہ گئی۔ گھٹاؤ کا فیصد بتائیے۔

4۔ ارون نے ایک کار 3,50,000 ₹ میں خریدی۔ اگلے سال اس کی قیمت بڑھ کر 3,70,000 ₹ ہوگئی۔ قیمت میں اضافہ کی فیصد بتائیے۔

5۔ میں نے ایک ٹی وی 10,000 کا خریدا اور 20% نفع پر بیچ دیا۔ مجھے کتنے پیسے ملیں گے؟

6۔ جوہی نے کپڑے دھونے کی مشین 13,500 ₹ میں بیچ دی۔ اس کو 20% کا نقصان ہوا۔ اس نے کتنے کی خریدی تھی۔

7۔ (i) چاک میں کیلشیم، کاربن اور آکسیجن 10:3:12 کی نسبت میں ہوتے ہیں۔ چاک میں کاربن کا فیصد بتائیے۔

(ii) اگر چاک کی ایک اسٹک میں کاربن 3 گرام ہے تو چاک اسٹک کا وزن بتائیے۔

8۔ امینا نے ایک کتاب 275 ₹ کی خریدی اور 15% نقصان پر بیچ دی۔ اس نے کتنے کی بیچی ہوگی؟

9۔ ہر ایک کے لیے 3 سال کے آخر میں ادا کیا جانے والا کل زر بتائیے:

(a) اصل زر = Rs 1,200 at 12% p.a. (b) اصل زر = Rs 7,500 at 5% p.a.

10۔ 56,000 روپے پر سود کی کس شرح پر 2 سال کا سود 280 ₹ ہوگا۔

11۔ اگر مینا 9% سود کی سالانہ شرح سے ایک سال میں 45 ₹ سود کے طور پر ادا کرتی ہے تو اس نے کتنی رقم ادھار لی ہوگی؟

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ اپنی روزمرہ کی زندگی میں اکثر دو مقداروں کا موازنہ کرتے ہیں۔ یہ لمبائیاں وزن، تنخواہیں، مارکس وغیرہ ہو سکتے ہیں۔

2۔ جب دو لوگوں کی لمبائیوں کا 150 سنٹی میٹر اور 75 سنٹی میٹر سے موازنہ کرنا ہو تو اس کو ہم نسبت کی شکل میں اس طرح لکھ سکتے ہیں

150:75 یا 2:1

3۔ دو نسبتوں کا موازنہ ان کو یکساں کسر میں بدل کر کیا جا سکتا ہے۔ اگر دو کسر برابر ہیں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں نسبتیں برابر ہوں گی۔

4۔ اگر دو نسبتیں معادل ہیں تو یہ چاروں مقداریں تناسب میں کہلاتی ہیں۔ مثلاً نسبت 8:2 اور 16:4 معاول ہیں، اس لیے 8، 2، 16 اور 4 تناسب میں ہوں گے۔

5۔ مقداروں کے موازنہ کرنے کا ایک طریقہ فیصد ہے۔ فیصد ایسے کسری اعداد کے شمار کنندہ ہوتے ہیں جن کے نسب نما 100 ہوں۔ فی صد معنی فی سو۔

مثال کے طور پر 82% مارکس کا مطلب ہے سو میں سے 82 مارکس۔

6۔ کسری اعداد کی فیصدی میں بدل سکتے ہیں اور اس کے الٹا بھی

مثال کے طور پر $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 100\%$ جب کہ، $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

7۔ اعشاریائی اعداد کو بھی فیصد میں بدلا جا سکتا ہے اور اس کا الٹا بھی مثال کے طور پر،

$0.25 = 0.25 \times 100\% = \ = 25\%$

8۔ ہماری روزمرہ زندگی میں فیصد کا بہت زیادہ استعمال ہے

(a) اگر کل مقدار کچھ فیصد دیا گیا ہے تو ہم اس کا درست عدد نکال سکتے ہیں۔

(b) اگر کسی مقدار کے حصے نسبت کی شکل میں دیے جاتے ہیں تو ہم نے سیکھا ہے کہ ان کو فیصد میں کیسے بدلتے ہیں۔

(c) مقدار کی بڑھوتری اور گھٹاؤ کو فیصد کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

(d) کسی لین دین میں ہونے والے نفع یا نقصان کو فیصد کی شکل میں دکھایا جا سکتا ہے۔

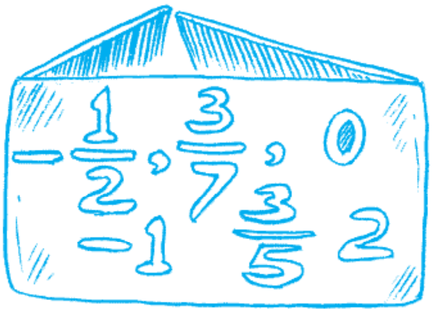
(e) جب کسی رقم پر سود نکالا جاتا ہے تو سود کی شرح کو فیصد میں دیا جاتا ہے۔

مثلاً ₹800، 3 سال کے لیے سالانہ 12% سود کی شرح پر اُدھار لیا۔

باب 9

ناطق اعداد

9.1 تعارف (Introduction)



آپ نے اپنے گرد پیش میں پائی جانے والے اشیا کو گننے کے مدد سے ''اعداد'' کے مطالعے کی ابتدا کی ہے۔ اس مقصد کے لیے استعمال کیے جانے والے اعداد کو گننے والے اعداد (Counting Numbers) یا فطری اعداد (Natural Numbers) کہتے ہیں۔ یہ ہیں. 1, 2, 3, 4, فطری اعداد میں O کو ملانے سے ہمیں مکمل اعداد (whole numbers) یعنی ... 0,1, 2, 3, حاصل ہوتے ہیں۔ پھر فطری اعداد کے منفی اعداد کو مکمل اعداد کے ساتھ یکجا کرنے سے صحیح اعداد حاصل ہوتے ہیں۔ صحیح اعداد ہیں ..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...۔ اس طرح ہم نے فطری اعداد سے مکمل اعداد اور مکمل اعداد سے صحیح اعداد تک اپنے عددی نظام کو بڑھایا۔

آپ کسر سے بھی واقف ہیں۔ یہ اعداد کی شکل کے ہوتے ہیں ہوتی ہے جہاں شمار کنندہ 0 یا کوئی بھی مثبت صحیح عدد ہوسکتا $\frac{\text{شمار کنندہ}}{\text{نسب نما}}$ ہے۔ اور نسب نما ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔ آپ نے دو کسروں کا موازنہ کیا۔ ان کی معادل کسریں معلوم کیں اور ان کے لیے چاروں ریاضیاتی بنیادی اعمال یعنی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم وغیرہ کیے ہیں۔

اس سبق میں، ہم عددی نظام کو اور آگے بڑھائیں گے۔ ہم ناطق اعداد کا تصور یہاں پیش کریں گے اور ان پر بنیادی اعمال یعنی جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کریں گے۔

9.2 ناطق اعداد (Rational Numbers) کی ضرورت

ہم نے پہلے دیکھا کہ اعداد سے متعلق متقابل صورت حالوں کے اظہار کے لیے ہم نے صحیح اعداد کو کیسے استعمال کیا تھا۔ مثال کے طور پر کسی مقام کے دائیں طرف کے 3 کلومیٹر فاصلے کو 3+ سے ظاہر کیا ہے تو بائیں طرف کے 5 کلومیٹر فاصلے کو 5– سے ظاہر کیا ہے۔ اگر ₹150 کے نفع کو ₹150 سے ظاہر کیا ہے تو ₹100 کے نقصان کو 100– سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اوپر جیسی صورت حال جیسی اور بھی بہت سی ایسی صورت حال ہوتی ہیں جہاں کسری اعداد کا استعمال ہوتا ہے۔ کیا ہم سطح سمندر سے 750 میٹر اوپر کے فاصلے کو $\frac{3}{4}$

کلومیٹر سے ظاہر کر سکتے ہیں اور سطح سمند سے نیچے $\frac{-3}{4}$ سے؟ ہم دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{-3}{4}$ نہ تو صحیح عدد ہے۔ اور نہ ہی یہ کسری عدد ہے۔

اب ہم کو ضرورت ہے اپنے عددی نظام کو بڑھانے کی تاکہ اس میں اعداد کی یہ قسم بھی آجائے۔

9.3 ناطق اعداد کیا ہیں؟ (What are Rational Numbers?)

ناطق اعداد کو انگریزی میں rational numbers کہتے ہیں۔ لفظ rational، لفظ ratio سے نکلا ہے۔ یعنی ناطق اعداد کا ناطق، نسبت سے نکلا ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ کسی نسبت جیسے 3:2 کو $\frac{3}{2}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔ یہاں 3 اور 2 فطری اعداد ہیں۔

اسی طرح دو صحیح اعداد p اور q $(q \neq 0)$ کی نسبت یعنی p:q کو $\frac{p}{q}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہ وہ شکل ہے جس میں ناطق اعداد کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

ناطق عدد وہ عدد ہے جس کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ جہاں p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$۔

اس لیے، $\frac{4}{5}$ ایک ناطق عدد ہے۔ یہاں p = 4 اور q = 5 ہے۔

کیا $\frac{-3}{4}$ بھی ایک ناطق عدد ہے؟ ہاں کیونکہ p = –3 اور q = 4 ہے اور دونوں صحیح اعداد ہیں۔

آپ نے بہت سے کسری اعداد دیکھے ہیں۔ جیسے $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, 1\frac{2}{3}$ وغیرہ۔

سبھی کسری اعداد ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کیوں؟

اعشاریائی اعداد جیسے 0.5, 2.3, وغیرہ کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ ان میں سے ہر عدد ایک کسر کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔ اور اس لیے یہ ناطق اعداد بھی ہیں۔ مثال کے طور پر $0.5 = \frac{5}{10}$ ، $0.333 = \frac{333}{1000}$ وغیرہ۔

کوشش کیجیے:

1۔ کیا عدد $\frac{2}{-3}$ ناطق ہے؟ اس کے بارے میں سوچیے 2۔ دس ناطق اعداد کی فہرست بنائیے۔

شمار کنندہ اور نسب نما

$\frac{p}{q}$ میں صحیح عدد p شمار کنندہ اور صحیح عدد $q\ (\neq 0)$ نسب نما ہے۔ لہٰذا $\frac{-3}{7}$ میں 3– شمار کنندہ اور 7 نسب نما ہے۔

پانچ ایسے ناطق اعداد بتائیے جن میں ہر ایک کا

(a) شمار کنندہ منفی صحیح عدد اور نسب نما مثبت صحیح عدد ہو

(b) شمار کنندہ مثبت صحیح عدد اور نسب نما منفی صحیح عدد ہو۔

(c) شمار کنندہ اور نسب نما دونوں ہی منفی صحیح اعداد ہوں۔

(d) شمار کنندہ اور نسب نما دونوں ہی مثبت صحیح اعداد ہوں۔

- کیا صحیح اعداد ناطق اعداد بھی ہوتے ہیں؟

ہر صحیح عدد ایک ناطق عدد بھی ہے۔ مثال کے طور پر صحیح عدد کو $\frac{-5}{1}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔ صحیح عدد 0 کو بھی لکھا جا سکتا ہے۔ $\frac{0}{7}$ یا 0 وغیرہ لہٰذا یہ بھی ایک ناطق عدد ہے۔

اس لیے ناطق اعداد میں صحیح اعداد اور کسری اعداد دونوں شامل ہیں۔

معاول ناطق اعداد (Equivalent rational numbers)

ایک ہی ناطق عدد کو مختلف شمار کنندہ اور نسب نما کے ساتھ رکھا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر ناطق عدد کو دیکھیے۔

$$\frac{-2}{3}=\frac{-2\times 2}{3\times 2}=\frac{-4}{6}$$

ہم نے دیکھا کہ $\frac{-2}{3}$ اور $\frac{-4}{6}$ دونوں ایک جیسے ہیں۔

اسی طرح

$$\frac{-2}{3}=\frac{(-2)\times(-5)}{3\times(-5)}=\frac{10}{-15}$$

اس لیے، $\frac{-2}{3}$ اور $\frac{10}{-15}$ ایک جیسے ہیں۔

لہٰذا $\frac{-2}{3}=\frac{-4}{6}=\frac{10}{-15}$ ایسے ناطق اعداد جو ایک دوسرے کے برابر ہوتے ہیں ان کو ایک دوسرے کا معادل کہتے ہیں۔

پھر سے $\frac{10}{-15}=\frac{-10}{15}$ (کیسے؟)

کسی ناطق عدد کے شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی صحیح عدد سے ضرب کرنے پر، ہم کو ایک اور ناطق عدد ملتا ہے جو کہ دیے گئے ناطق عدد کا معادل ہے۔ یہ بالکل اسی طرح جس طرح معادل کسریں حاصل کی جاتی ہیں۔

بالکل ضرب کی طرح ہی، کسی ناطق عدد کے شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی صحیح عدد (0 نہ ہو) سے تقسیم کرنے پر بھی معادل ناطق عدد حاصل ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\frac{10}{-15}=\frac{10\div(-5)}{-15\div(-5)}=\frac{-2}{3}\ ،\ \frac{-12}{24}=\frac{-12\div 12}{24\div 12}=\frac{-1}{2}$$

کوشش کیجیے:

خالی باکسوں میں بھریں۔

(i) $\frac{5}{4}=\frac{\square}{16}=\frac{25}{\square}=\frac{-15}{\square}$

(ii) $\frac{-3}{7}=\frac{\square}{14}=\frac{9}{\square}=\frac{-6}{\square}$

ہم لکھ سکتے ہیں $\frac{-2}{3}$ کو $-\frac{2}{3}$، $\frac{-10}{3}$ کو $\frac{10}{-3}$ وغیرہ

9.4 مثبت اور منفی ناطق اعداد: (Positive and Negative Rational Numbers)

ناطق عدد $\frac{2}{3}$ کو دیکھیے۔ اس ناطق عدد کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں مثبت صحیح اعداد ہیں۔ ایسے ناطق اعداد کو **مثبت ناطق اعداد** کہتے ہیں۔ اس لیے $\frac{3}{8}$، $\frac{5}{7}$، $\frac{2}{9}$ وغیرہ مثبت ہیں۔ ناطق عدد $\frac{-3}{5}$ کا شمار کنندہ منفی صحیح عدد ہے جہاں نسب نما مثبت صحیح عدد ہے۔ ایسے ناطق اعداد کو **منفی ناطق اعداد** کہتے ہیں۔ اس لیے $\frac{-5}{7}$، $\frac{-3}{8}$، $\frac{-9}{5}$ وغیرہ ناطق اعداد ہیں۔

کوشش کیجیے:

1۔ کیا 5 ایک مثبت ناطق عدد ہے؟

2۔ پانچ اور مثبت ناطق اعداد کی فہرست بنائیے۔

- کیا $\frac{8}{-3}$ ایک منفی ناطق عدد ہے؟ ہم جانتے ہیں کہ $\frac{8}{-3} = \frac{8\times -1}{-3\times -1} = \frac{-8}{3}$ اور $\frac{-8}{3}$ ایک منفی ناطق عدد ہے۔ اس لیے $\frac{8}{-3}$ بھی ایک منفی ناطق عدد ہے۔ اسی طرح $\frac{5}{-7}$، $\frac{6}{-5}$، $\frac{2}{-9}$ وغیرہ منفی ناطق اعداد ہیں۔ نوٹ کیجیے ان کے شمار کنندہ مثبت اور نسب نما منفی صحیح اعداد ہیں۔
- 0 نا تو مثبت ناطق عدد ہے اور نہ ہی منفی۔
- $\frac{-3}{-5}$ کے بارے میں کیا خیال ہے؟

کوشش کیجیے:

1۔ کیا 8– ایک منفی ناطق عدد ہے؟

2۔ پانچ اور مثبت ناطق اعداد کی فہرست بنائیے۔

آپ دیکھیں گے کہ

اس لیے $\frac{-3}{-5} = \frac{-3\times(-1)}{-5\times(-1)} = \frac{3}{5}$

اس لئے $\frac{-3}{-5}$ ایک مثبت ناطق عدد ہے۔ اس طرح $\frac{-5}{-3}$, $\frac{-2}{-5}$ وغیرہ مثبت ناطق اعداد ہیں۔

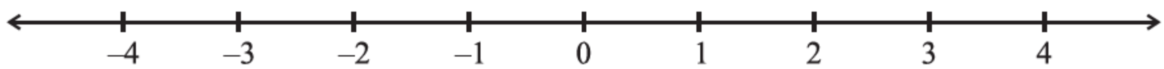
کوشش کیجیے:

1۔ مندرجہ ذیل میں سے کون سے منفی ناطق اعداد ہیں۔

(i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{-5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{-2}{-9}$

9.5 عددی خط پر ناطق اعداد (Rational Numbers on a Number Line)

آپ جانتے ہیں کہ عددی خط پر صحیح اعداد کو کیسے ظاہر کیا جاتا ہے۔ آئیے ہم ایک ایسا عددی خط بنائیں۔



0 کے دائیں طرف دکھائے جانے والے نقطوں کو علامت + سے ظاہر کرتے ہیں اور یہ مثبت صحیح اعداد ہیں۔ 0 کے بائیں طرف دکھائے جانے والے نقطوں کو علامت – سے ظاہر کرتے ہیں اور وہ منفی صحیح اعداد ہیں۔

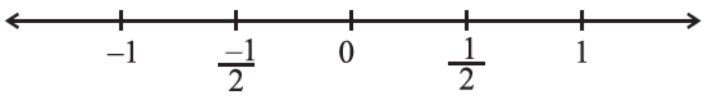
کسری اعداد کے عددی خط پر اظہار کے بارے میں بھی آپ جانتے ہیں۔ آیئے اب ہم دیکھتے ہیں کہ عددی خط پر ناطق اعداد کیسے ظاہر کیے جاتے ہیں۔

آیئے ذرا عدد $-\frac{1}{2}$ کو عددی خط پر ظاہر کرتے ہیں۔

مثبت صحیح اعداد کی طرح ہی، مثبت ناطق اعداد کو بھی 0 سے دائیں طرف ظاہر کرتے ہیں۔ اور منفی ناطق اعداد کو 0 کے بائیں طرف۔ آپ 0 کے کون طرف $-\frac{1}{2}$ کا نشان لگائیں گے؟ منفی ناطق عدد ہونے کی وجہ سے یہ 0 کے بائیں طرف ہونا چاہیے۔

آپ جانتے ہیں کہ جب صحیح اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرتے ہیں تو لگاتار آنے والے صحیح اعداد کو برابر دوری کے وقفہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اور 0 سے جوڑا 1 اور 1– برابری دوری پر ہوتا ہے۔ اسی طرح جوڑے 2 اور 2– و 3 اور 3– وغیرہ۔

بالکل اسی طرح ناطق اعداد $\frac{1}{2}$ اور $-\frac{1}{2}$ بھی 0 سے برابر دوری پر ہوں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ ناطق عدد $\frac{1}{2}$ کو کیسے دکھاتے ہیں۔ یہ ایک ایسے نقطے کو ظاہر کرتا ہے جو 0 اور 1 سے برابر دوری پر ہو۔ اس لیے $\frac{-1}{2}$ ایک ایسے نقطہ پر ہوگا جو 0 اور 1– سے برابر دوری پر ہو۔

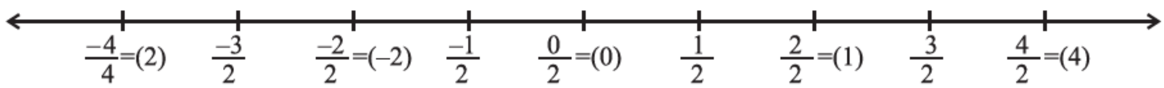


ہم نے دیکھا کہ عددی خط پر $\frac{3}{2}$ کی نشاندہی کیسے ہوتی ہے۔ یہ 0 کے دائیں جانب اور 1 اور 2 کے درمیان ہے۔ آیئے اب ہم عددی خط پر $\frac{-3}{2}$ کی نشاندہی کرتے ہیں یہ 0 کے بائیں طرف ہوگا اور اور اتنی ہی دوری پر ہوگا جتنا 0 سے $\frac{3}{2}$۔

گھٹتی ترتیب میں، ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}(=-1), \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2}(=-2)$$

یہ ظاہر کرتا ہے کہ $\frac{-3}{2}$، 1– اور 2– کے درمیان میں ہے۔ اس لیے 1– اور 2– کے بالکل نصف بیچ میں ہے۔



$\frac{-5}{2}$ اور $\frac{-7}{2}$ کو بھی اسی طریقے سے ظاہر کیجیے۔

اسی طرح، $-\frac{1}{3}$ صفر کے بائیں جانب ہوگا اور اتنی ہی دوری پر ہوگا جتنی پر دائیں جانب $\frac{1}{3}$ ہے۔ اس لیے جیسا کہ اوپر کیا ہے۔

$-\frac{1}{3}$ کو بھی عددی خط پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ایک بار اگر ہم سمجھ جائیں کہ $-\frac{1}{3}$ کو عددی خط پر کیسے ظاہر کیا جائے تو پھر ہم آسانی سے $\frac{-2}{3}$ ، $\frac{-5}{3}$ وغیرہ کو بھی ظاہر کر سکتے ہیں۔

تمام دوسرے ناطق اعداد جن کے نسب نما مختلف ہوتے ہیں۔کو بھی اسی طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

9.6 ناطق اعداد کی معیاری شکل (Rational Numbers In Standard Form)

$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$ ناطق اعداد کا مشاہدہ کیجیے۔

ان ناطق اعداد کے نسب نما مثبت صحیح اعداد ہیں۔اور شمار کنندہ اور نسب نما کا مشترک جزو ضربی 1 ہے۔اور منفی نشانات صرف شمار کنندہ میں ہیں۔ایسے ناطق اعداد **معیاری شکل** میں کہلاتے ہیں۔

ایک ناطق عدد، معیاری شکل میں کہلاتا ہے اگر اس کا نسب نما مثبت صحیح عدد ہو اور شمار کنندہ اور نسب نما کے درمیان 1 کے علاوہ کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہو۔

اگر ایک ناطق عدد معیاری شکل میں نہیں ہے تو اس کو مشترک جزو ضربی سے تقسیم کر کے معیاری شکل میں بدلا جا سکتا ہے۔

یاد کیجیے کہ کسری اعداد کو کمترین شکل میں لانے کے لئے، ہم شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی مثبت صحیح عدد (0 کے علاوہ) تقسیم کرتے ہیں۔یہی طریقہ ہم ناطق اعداد کی معیاری شکل حاصل کرنے کے لیے اختیار کرتے ہیں۔

مثال 1. $\frac{-45}{30}$ کو معیاری شکل میں تبدیل کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 3}{30 \div 3} = \frac{-15}{10} = \frac{-15 \div 5}{10 \div 5} = \frac{-3}{2}$

ہم نے دو بار تقسیم کیا ہے۔پہلے 3 سے اور پھر 5 سے۔اس کو ایسے بھی کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 15}{30 \div 15} = \frac{-3}{2}$$

اس مثال میں، نوٹ کیجیے کہ 45 اور 30 کا HCF 15 ہے۔

لہٰذا، ناطق عدد کو معیاری شکل میں تبدیل کرنے کے لیے، ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو ان کے HCF سے تقسیم کرتے ہیں، HCF معلوم کرتے وقت منفی علامت، اگر کوئی ہے تو، کوئی دھیان نہیں دیتے ہیں، (منفی علامت پر دھیان نہ دینے کی وجہ آپ بڑی کلاسوں میں پڑھیں گے۔)

اگر نسب نما میں منفی علامت ہے تو ہم '–HCF' سے تقسیم کرتے ہیں۔

مثال 2 معیاری شکل میں لائیے۔

(i) $\frac{36}{-24}$ (ii) $\frac{-3}{-5}$

حل

(i) 36 اور 24 کا HCF 12 ہے۔

اس لیے، 12– سے تقسیم کرنے سے معیاری شکل حاصل ہوگی۔

(ii) 3 اور 15 کا HCF 3 ہے۔

اس لیے $\frac{-3}{-15} = \frac{-3 \div (-3)}{-15 \div (-3)} = \frac{1}{5}$

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل کی معیاری شکل معلوم کیجیے۔

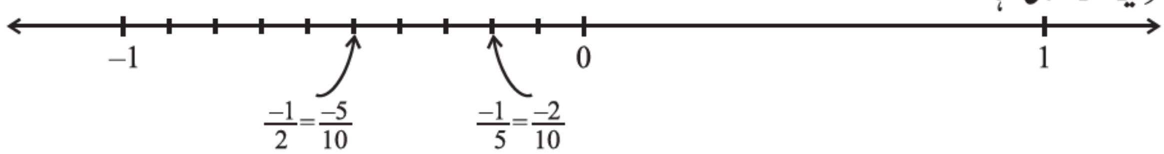
(i) $\frac{-18}{45}$ (ii) $\frac{-12}{18}$

9.7 ناطق اعداد کا موازنہ (Comparison of Rational Numbers)

ہم دو صحیح اعداد یا دو کسری اعداد کا موازنہ کرنا جانتے ہیں اور بتا سکتے ہیں کہ ان میں کون چھوٹا ہے یا کون بڑا ہے۔ آیئے اب ہم دیکھتے ہیں کہ ہم دو ناطق اعداد کا موازنہ کیسے کر سکتے ہیں۔

- دو ناطق اعداد جیسے $\frac{2}{3}$ اور $\frac{5}{7}$ کا موازنہ ہم پہلے سیکھے گئے کسری اعداد کے موازنے کی طرح کرتے ہیں۔
- میری نے دو منفی ناطق اعداد $\frac{-1}{2}$ اور $\frac{-1}{5}$ کا موازنہ عددی خط کا استعمال کر کے کیا ہے۔ وہ جانتی تھی کہ وہ صحیح عدد جو دوسرے صحیح عدد کے دائیں جانب ہوتا ہے بڑا ہوتا ہے۔

مثلاً 5 عددی خط پر 2 کے دائیں جانب ہے اور 2<5 عددی خط پر صحیح عدد 2– کے دائیں جانب ہے اور 5<2–۔ وہ اس طریقہ کو ناطق اعداد کے لیے بھی استعمال کر سکتی ہے۔ وہ جانتی ہے کہ عددی خط پر ناطق اعداد کو کیسے دکھایا جاتا ہے۔ وہ $\frac{-1}{2}$ اور $\frac{1}{5}$ کو مندرجہ ذیل طریقے سے دکھاتی ہے۔

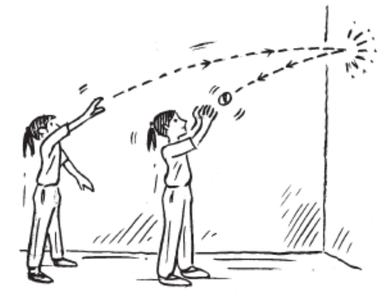


کیا اس نے دونوں نقطے صحیح دکھائے ہیں؟ کیسے اور کیوں اس نے $\frac{-1}{2}$ کو $\frac{-5}{10}$ اور $\frac{-1}{5}$ کو $\frac{-2}{10}$ میں بدلا ہے؟ اس نے معلوم کیا کہ $-\frac{1}{5}$ ، $-\frac{1}{2}$ کی دائیں جانب ہے۔ اس طرح

$-\frac{1}{2} > -\frac{1}{5}$ یا $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$

کیا آپ موازنہ کر سکتے ہیں $-\frac{2}{3}$ اور $-\frac{3}{4}$ ؟ **نیز** $-\frac{1}{3}$ اور $-\frac{1}{5}$ ؟

ہم نے کسری اعداد کے لیے بھی سیکھا تھا کہ $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ = اور میری کو $-\frac{1}{2}$ اور



$-\frac{1}{5}$ کے لیے کیا ملا؟ کیا یہ ایک دم الٹا نہیں ہے؟

آپ نے معلوم کیا کہ، $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$

لیکن $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$

کیا آپ یہی بات $-\frac{2}{3}$، $-\frac{3}{4}$ اور $-\frac{1}{5}$، $-\frac{1}{3}$ کے لیے بھی دیکھتے ہیں؟ میری کو یاد ہے کہ اس نے صحیح اعداد کے لیے پڑھا تھا کہ

$4>3$ لیکن $-4<-3$، $5>2$ لیکن $-5<-2$ وغیرہ۔

- منفی ناطق اعداد کے جوڑوں میں بھی بالکل ایسے ہی ہوتا ہے دو منفی ناطق اعداد موازنہ کرنے کے لیے، ہم پہلے ان کی منفی علامت کو بنا ہی ان کا موازنہ کرتے ہیں اور پھر اس ترتیب کو الٹا کر دیتے ہیں۔

مثال کے طور پر، $-\frac{7}{5}$ اور $-\frac{5}{3}$ کا موازنہ کرنے کے لیے پہلے $\frac{7}{5}$ اور $\frac{5}{3}$ کا موازنہ کرتے ہیں۔

ہم کو حاصل ہوا ہے، $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ اور ہم نے نتیجہ نکالا $\frac{-7}{3} > \frac{-5}{3}$ – ایسے ہی پانچ اور جوڑ لیجیے اور ان کا موازنہ کیجیے۔

کون بڑا ہے۔ $-\frac{3}{8}$ یا $-\frac{2}{7}$ ؟ $-\frac{4}{3}$ یا $-\frac{3}{2}$ ؟

- ایک منفی ناطق عدد اور مثبت ناطق عدد کا موازنہ بہت واضح ہے۔ عددی خط پر ایک منفی ناطق عدد صفر کے بائیں جانب ہوتا ہے جب کہ ایک مثبت ناطق عدد صرف کے دائیں جانب ہوتا ہے۔ اس لیے ایک منفی ناطق عدد ہمیشہ ہی ایک مثبت ناطق عدد سے چھوٹا ہوگا۔

اس لیے $-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$

- ناطق اعداد $\frac{-3}{-5}$ اور $\frac{-2}{-7}$ کا موازنہ کرنے کے لیے پہلے ان کو اس کی معیاری شکل میں بدلیے۔ اور پھر ان کا موازنہ کیجیے۔

مثال کیا $\frac{4}{-9}$ اور $\frac{-16}{36}$ ایک ہی ناطق عدد کو ظاہر کر رہے ہیں؟

حل ہاں، کیونکہ

$$\frac{4}{-9} = \frac{4\times(-4)}{-9\times(-4)} = \frac{-16}{36}$$ یا

$$\frac{-16}{36} = \frac{-16 \div -4}{36 \div -4} = \frac{4}{-9}$$

9.8 دو ناطق اعداد کے درمیان کے ناطق اعداد
(Rational Numbers Between Two Rational Numbers)

ریشما 3 اور 10 کے درمیان پائے جانے والے مکمل اعداد گننا چاہتی تھی۔ اپنی پچھلی کلاسوں سے وہ جانتی تھی کہ 3 اور 10 کے درمیان کل 6 مکمل اعداد ہیں۔ اسی طرح وہ 3– اور 3 کے درمیان پائے جانے والے صحیح اعداد گننا چاہتی تھی۔ 3– اور 3 کے درمیان صحیح اعداد ہیں $-2, -1, 0, 1, 2$ لہٰذا 3– اور 3 کے درمیان کل 5 صحیح اعداد ہیں۔

کیا 3– اور 2– کے درمیان کوئی صحیح عدد ہے؟ نہیں، 3– اور 2– کے درمیان کوئی صحیح عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ دو لگاتار صحیح اعداد کے درمیان کوئی صحیح عدد نہیں ہوتا ہے۔

اس طرح دو صحیح اعداد کے درمیان پائے جانے والے صحیح اعداد محدود ہیں۔

کیا ایسا ہی ناطق اعداد کے لیے بھی ہے؟

ریشما نے دو ناطق اعداد $-\frac{3}{5}$ اور $-\frac{1}{3}$ لیے

اس نے ان کو یکساں نسب نما والے ناطق اعداد میں تبدیل کر لیا

اس لیے $-\frac{3}{5} = -\frac{9}{15}$ اور $-\frac{1}{3} = \frac{-5}{15}$

ہمارے پاس ہے

$$\frac{-3}{5} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3} \quad \text{یا} \quad \frac{-9}{15} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-5}{15}$$

اس نے $\frac{-1}{3}$ اور $\frac{-3}{5}$ کے درمیان ناطق اعداد $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ حاصل کیے۔

کیا $\frac{-3}{5}$ اور $-\frac{1}{3}$ کے درمیان صرف $\frac{-8}{15}, \frac{-7}{15}, \frac{-6}{15}$ – اعداد ہی ہیں؟

ہمارے پاس ہے $\frac{-8}{15} = \frac{-16}{30}$ اور $\frac{-3}{5} = \frac{-18}{30}$

اور $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15}$ یعنی $\frac{-18}{30} < \frac{-17}{30} < \frac{-16}{30}$

لہٰذا $\frac{-3}{5} < \frac{-17}{30} < \frac{-8}{15} < \frac{-7}{15} < \frac{-6}{15} < \frac{-1}{3}$

تو ہم نے $\frac{-3}{5}$ اور $\frac{-1}{3}$ کے درمیان ایک اور ناطق عدد معلوم کر لیا۔

اس طریقے کا استعمال کر کے آپ دو مختلف ناطق اعداد کے درمیان جتنے دل چاہے اتنے ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\frac{-3}{5}=\frac{-3\times30}{5\times30}=\frac{-90}{150}$ اور $\frac{-1}{3}=\frac{-1\times50}{3\times50}=\frac{-50}{150}$

ہم نے $\frac{-90}{150}$ اور $\frac{-50}{150}$ یعنی $\frac{-5}{3}$ اور $\frac{-1}{3}$ کے درمیان 39 ناطق اعداد $\left(\frac{-89}{150},\ldots,\frac{-51}{150}\right)$ معلوم کر لیے۔ آپ دیکھیں گے کہ فہرست کا کوئی اختتام نہیں ہے۔

کیا آپ $\frac{-5}{3}$ اور $\frac{-8}{7}$ کے درمیان پانچ ناطق اعداد کی ایک فہرست تیار کر سکتے ہیں؟

ہم کسی بھی دو ناطق اعداد کے درمیان لامحدود ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

کوشش کیجیے:

$\frac{-5}{7}$ اور $\frac{-3}{8}$ کے درمیان پانچ ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

مثال 4 2– اور 1– کے درمیان تین ناطق اعداد کی فہرست بنائیے۔

حل 1– اور 2– کو نسب نما 5 کے ناطق اعداد میں لکھیے۔ (کیوں؟)

ہمارے پاس ہے $-2=\frac{-10}{5}$ اور $-1=\frac{-15}{5}$

اس لیے $-2<\frac{-9}{5}<\frac{-8}{5}<\frac{-7}{5}<\frac{-6}{5}<-1$ یا $\frac{-10}{5}<\frac{-9}{5}<\frac{-8}{5}<\frac{-7}{5}<\frac{-6}{5}<\frac{-5}{5}$

2– اور 1– کے درمیان تین ناطق اعداد ہوں گے۔ $\frac{-9}{5},\frac{-8}{5},\frac{-7}{5}$

ہم $\frac{-9}{5},\frac{-8}{5},\frac{-7}{5},\frac{-6}{5}$ میں سے کوئی سے تین لے سکتے ہیں۔

مثال 5 مندرجہ ذیل پیٹرن میں 4 اور اعداد لکھیے۔

$$\frac{-1}{3},\frac{-2}{6},\frac{-3}{9},\frac{-4}{12},\ldots$$

حل ہمارے پاس ہے

$$\frac{-2}{6}=\frac{-1\times2}{3\times2},\ \frac{-3}{9}=\frac{-1\times3}{3\times3},\ \frac{-4}{12}=\frac{-1\times4}{3\times4}$$

یا $\frac{-1\times1}{3\times1}=\frac{-1}{3},\ \frac{-1\times2}{3\times2}=\frac{-2}{6},\ \frac{-1\times3}{3\times3}=\frac{-3}{9},\ \frac{-1\times4}{3\times4}=\frac{-4}{12}$

لہٰذا ہم نے ان اعداد میں پیٹرن دیکھا۔

دوسری اعداد ہونگے $\frac{-1\times5}{3\times5}=\frac{-5}{15},\ \frac{-1\times6}{3\times6}=\frac{-6}{18},\ \frac{-1\times7}{3\times7}=\frac{-7}{21}$

مشق 9.1

1۔ مندرجہ ذیل کے درمیان پانچ ناطق اعداد کی فہرست بنائیے۔

(i) 1– اور 0 (ii) 2– اور 1– (iii) $\frac{-4}{5}$ اور $\frac{-2}{3}$ (vi) $\frac{1}{2}$ اور $\frac{2}{3}$

2۔ مندرجہ ذیل پیٹرن میں ہر ایک کے لیے چار اور ناطق اعداد لکھیے۔

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \ldots\ldots$ (ii) $\frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \ldots\ldots$

(iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{4}{-24}, \ldots\ldots$ (iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \ldots\ldots$

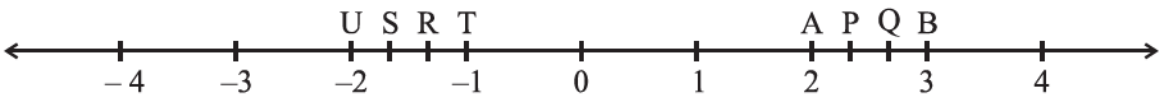
3۔ مندرجہ ذیل اعداد کے 4 معاول ناطق اعداد لکھیے۔

(i) $\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{5}{-3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

4۔ عددی خط بنائیے اور مندرجہ ذیل اعداد ان پر دکھائیے۔

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5۔ عددی خط پر نقطے P, Q, R, S, T, U, A اور B اس طرح دکھائیے کہ TR = RS = SU اور AP = PQ = QB۔ P, Q, R اور S کے ذریعے دکھائے گئے ناطق اعداد بتائیے۔



6۔ مندرجہ ذیل میں کون سے جوڑے ایک ہی ناطق عدد کو ظاہر کر رہے ہیں۔

(i) $\frac{-7}{21}$ اور $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{-16}{20}$ اور $\frac{-20}{25}$ (iii) $\frac{-2}{3}$ اور $\frac{2}{3}$

(iv) $\frac{-3}{5}$ اور $\frac{-12}{50}$ (v) $\frac{8}{-5}$ اور $\frac{24}{15}$ (vi) $\frac{1}{3}$ اور $\frac{-1}{9}$

(vii) $\frac{-5}{-9}$ اور $\frac{5}{-9}$

7۔ مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو آسان ترین شکل میں دوبارہ لکھیے۔

(i) $\frac{-8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{44}{72}$ (iv) $\frac{-8}{10}$

8۔ باکس میں دوبارہ لکھیے <, > اور = میں صحیح علامت بھریے۔

(i) $\frac{-5}{7} \square \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5} \square \frac{-5}{7}$ (iii) $\frac{-7}{8} \square \frac{14}{-16}$

(iv) $\frac{-8}{5} \square \frac{-7}{4}$ (v) $\frac{1}{-3} \square \frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{5}{-11} \square \frac{-5}{11}$

(vii) $0 \square \frac{-7}{6}$

9۔ مندرجہ ذیل ہر ایک میں بڑا کون ہے۔

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10۔ مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو بڑھتی ترتیب میں لکھیے۔

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

9.9 ناطق اعداد پر اعمال (Operations on Rational Numbers)

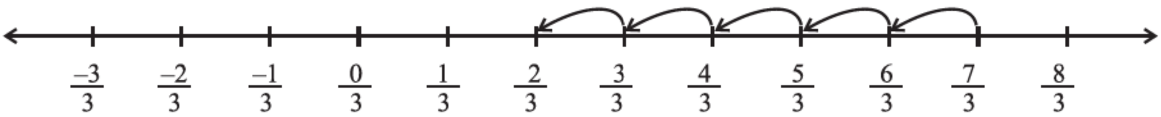
آپ جانتے ہیں کہ صحیح اعداد اور کسری اعداد پر بھی جمع تفریق، ضرب اور تقسیم کیسے کیا جاتا ہے۔

9.9.1 جمع (Addition)

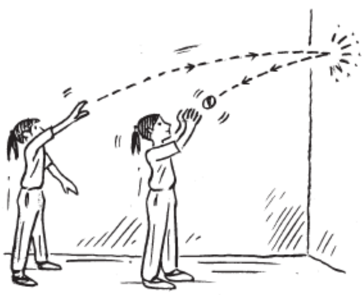
- دو ناطق اعداد جن کے نسب نما ایک جیسے ہوں، کو جمع کیجیے۔ $\frac{7}{3}$ اور $-\frac{5}{3}$ ۔

ہم نے پایا $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)$

عمودی خط پر، ہم نے دیکھا



دو سلسلہ وار نقطوں کے درمیان کا فاصلہ $\frac{1}{3}$ ہے۔ اس لیے $-\frac{5}{3}$ کو جمع کرنے کا مطلب ہے $\frac{7}{3}$ کے بائیں جانب 5 بار کود کر جانا۔ ہم کہاں پہنچیں گے؟ ہم $\frac{2}{5}$ پر پہنچیں گے۔



اس لیے $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{2}{3}$

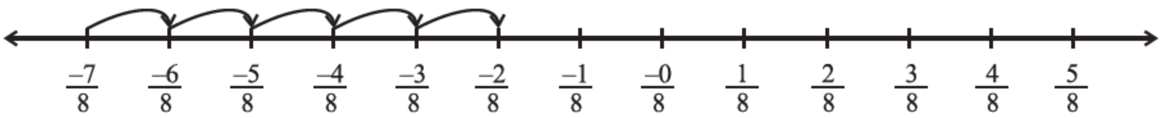
آیئے اس کو اس طرح کر کے دیکھتے ہیں

$$\frac{7}{3}+\frac{(-5)}{3}=\frac{7+(-5)}{3}=\frac{2}{3}$$

ہم کو وہی جواب حاصل ہوا۔

معلوم کیجیے۔ $\frac{6}{5}+\frac{(-2)}{5}, \frac{3}{7}+\frac{(-5)}{7}$ دونوں طریقوں سے اور جانچ کیجیے کہ کیا آپ کے جواب ایک سے آئے۔

اسی طرح $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}$ ہوگا



آپ کو کیا حاصل ہوا؟ $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}=\frac{-7+5}{8}=?$ کیا دونوں جوابات ایک سے ہیں؟

کوشش کیجیے:

معلوم کیجیے $\frac{19}{5}+\left(\frac{-7}{5}\right)$، $\frac{-13}{7}-\frac{6}{7}$

اس لیے، ہم نے معلوم کیا کہ ایک سے نسب نما والے ناطق اعداد کو جوڑنے کے لیے ہم شمار کنندہ کو جوڑ دیتے ہیں اور نسب نما وہی رکھتے ہیں۔

لٰہذا $\frac{-11}{5}+\frac{7}{5}=\frac{-11+7}{5}=\frac{-4}{5}$

- ہم مختلف نسب نما والے ناطق اعداد کو کیسے جوڑیں گے؟ کسری اعداد کی طرح ہم، پہلے دونوں نسب نماؤں کا عاد اعظم مشترک معلوم کریں گے اور پھر ان دونوں ناطق اعداد کے ایسے متبادل ناطق اعداد معلوم کرتے ہیں جن کے نسب نما اس عاد اعظم مشترک کے برابر ہوں اور دونوں ناطق اعداد کو جوڑ دیتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\frac{-7}{5}$ اور $\frac{-2}{5}$ کو جمع کیجیے۔

3 اور 5 کا عاد اعظم مشترک ہے 15

اس لیے $\frac{-7}{5}=\frac{-21}{15}$، $\frac{-2}{3}=\frac{-10}{15}$

لٰہذا $\frac{-7}{5}+\frac{(-2)}{3}=\frac{-21}{15}+\frac{(-10)}{15}=\frac{-31}{15}$

کوشش کیجیے:

(i) $\frac{-3}{7}+\frac{2}{3}$

(ii) $\frac{-5}{6}+\frac{-3}{11}$

جمعی معکوس (Additive Inverse)

کیا ہوگا $\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}=?$

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{-4+4}{7}=0$ اور $\frac{4}{7}+\left(\frac{-4}{7}\right)=0$

اسی طرح $\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0=\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)$

صحیح اعداد کے کیس میں 2– کو 2 کا جمعی معکوس اور 2 کو 2– کا جمعی معکوس کہتے ہیں۔

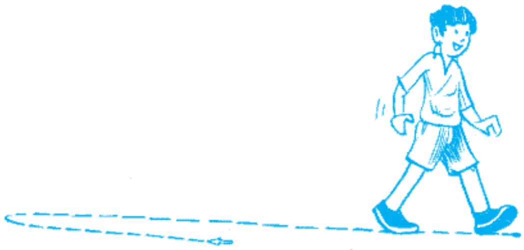
ناطق اعداد کے لیے بھی، ہم $\frac{-4}{7}$ کو $\frac{4}{7}$ کا جمعی معکوس کہتے ہیں اور $\frac{4}{7}$ کو $\frac{-4}{7}$ کا جمعی معکوس کہتے ہیں۔ اسی طرح، $\frac{-2}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ کا جمعی معکوس ہے اور $\frac{2}{3}$ ، $\frac{-2}{3}$ کا جمعی معکوس ہے۔

کوشش کیجیے:

$\frac{-3}{9}$ ، $\frac{-9}{11}$ ، $\frac{5}{7}$ کے جمعی معکوس کیا ہوں گے؟

مثال 6 ست پال ایک مقام P سے $\frac{2}{3}$ کلومیٹر مشرق کی جانب گیا اور پھر وہاں سے مغرب کی جانب $1\frac{5}{7}$ کلومیٹر گیا۔ اب وہ P سے کہاں ہوگا؟

حل مشرق کی جانب طے کیے گئے فاصلے کو مثبت علامت سے ظاہر کریں گے۔ اس لیے مغرب کی جانب طے کیے جانے والے فاصلے کو منفی علامت سے ظاہر کریں گے۔



لہٰذا، ست پال کی مقام P سے دوری ہوگی۔

$$= \frac{2}{3} + \frac{(-12)}{7} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{(-12) \times 3}{7 \times 3}$$

$$= \frac{14 - 36}{21} = \frac{-22}{21}$$

کیونکہ یہ منفی ہے۔ اس لیے اس کا مطلب ہے کہ ست پال مقام P سے مغرب کی جانب $1\frac{1}{21}$ کلومیٹر کی دوری پر ہے۔

9.9.2 تفریق (Subtraction)

سویتا نے دو ناطق اعداد کے $\frac{5}{7}$ اور $\frac{3}{8}$ کے درمیان کا فرق اس طریقہ سے حاصل کیا۔

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{40 - 21}{56} = \frac{19}{56}$$

فریدہ جانتی ہے کہ دو صحیح اعداد a اور b کے لیے وہ لکھ سکتی ہے $a - b = a + (-b)$

اس نے اس کو ناطق اعداد کے لیے بھی آزمایا۔ اور اس نے پایا

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{5}{7} + \frac{(-3)}{8} = \frac{19}{56}$$

دونوں کا جواب ایک ہی آیا۔

$\frac{7}{8} - \frac{5}{9}$, $\frac{3}{11} - \frac{8}{7}$ کو دونوں طریقوں سے معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔

کیا آپ کو ایک ہی جواب ملا؟

اس لیے، ہم کہتے ہیں کہ جب دو ناطق اعداد کو گھٹاتے ہیں تو جس ناطق عدد کو گھٹانا ہے، اس کے جمعی معکوس کو دوسرے ناطق عدد میں جوڑ دیتے ہیں۔

لہٰذا $1\frac{2}{3}-2\frac{4}{5}=\frac{5}{3}-\frac{14}{5}=\frac{5}{3}+$ $\frac{14}{5}$ کا جمعی معکوس $=\frac{5}{3}+\frac{(-14)}{5}$

$=\frac{-17}{15}=-1\frac{2}{15}$

$\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)$? کیا ہوگا؟

$\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{2}{7}+$ $\left(\frac{-5}{6}\right)$ کا جمعی معکوس $=\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{47}{42}=1\frac{5}{42}$

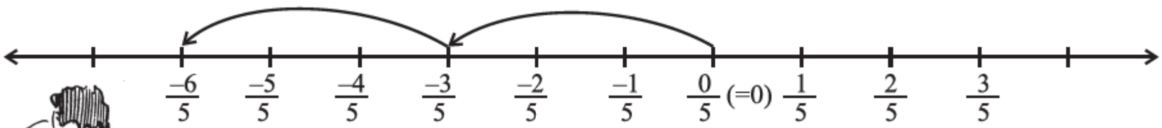
کوشش کیجیے:

(i) $\frac{7}{9}-\frac{2}{5}$ (ii) $2\frac{1}{5}-\frac{(-1)}{3}$

9.9.3 ضرب (Multiplication)

ناطق عدد $\frac{-3}{5}$ کو 2 سے ضرب کیجیے یعنی ہم کو معلوم کرنا ہے $2\times\frac{-3}{5}$۔

عددی خط پر، اس کا مطلب ہے۔ $\frac{3}{5}$ کی بائیں جانب دو جست۔



ہم کہاں پہنچے؟ ہم پہنچے $\frac{-6}{5}$ پر۔ اب ہم اس کو اسی طریقہ سے معلوم کرتے ہیں جیسا کہ ہم نے کسری اعداد میں کیا تھا۔

$$\frac{-3}{5}\times 2=\frac{-3\times 2}{5}=\frac{-6}{5}$$

ہم اسی ناطق عدد پر پہنچ گئے۔

$\frac{-4}{7}\times 3, \frac{-6}{5}\times 4$ کو دونوں طریقوں سے معلوم کیجیے۔ آپ کا کیا مشاہدہ رہا؟

اس لیے ہم نے معلوم کیا کہ جب ہم ایک ناطق عدد کو کسی مثبت صحیح عدد سے ضرب کرتے ہیں تو ہم شمار کنندہ کو اس صحیح عدد سے ضرب کرتے ہیں اور نسب نما کو بنا بدلے رکھتے ہیں۔

آیئے اب ایک ناطق عدد کو ایک منفی صحیح عدد سے ضرب کرتے ہیں۔

$$\frac{-2}{9}\times(-5)=\frac{-2\times(-5)}{9}=\frac{10}{9}$$

یاد رکھیے -5 کو $\frac{-5}{1}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔

اس لیے $\frac{-2}{9}\times\frac{-5}{1}=\frac{10}{9}=\frac{-2\times(-5)}{9\times 1}$

اسی طرح $\frac{3}{11}\times(-2)==\frac{3\times(-2)}{11\times 1}=\frac{-6}{11}$

کوشش کیجیے:

(i) $\frac{-3}{5}\times 7$? (ii) $\frac{-6}{5}\times(-2)$?

ان مشاہدات کی بنیاد پر، ہم نے معلوم کیا کہ

$$\frac{-3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{-3\times 5}{8\times 7}=\frac{-15}{56}$$

اس لیے جیسا کہ ہم نے کسری اعداد کے لیے کیا تھا، ہم دو ناطق اعداد کو مندرجہ ذیل طریقے سے ضرب کریں گے۔

قدم 1 دو ناطق اعداد کے شمار کنندوں کو ضرب کیجیے۔

قدم 2 دونوں ناطق اعداد کے نسب نماؤں کو ضرب کیجیے۔

قدم 3 حاصل ضرب کو اس طرح لکھیے۔ $\frac{\text{قدم 1 کا نتیجہ}}{\text{قدم 2 کا نتیجہ}}$

کوشش کیجیے:

(i) $\frac{-3}{4}\times\frac{1}{7}$

(i) $\frac{2}{3}\times\frac{-5}{9}$

اس لیے $\frac{-3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{-3\times 2}{5\times 7}=\frac{-6}{35}$

اور $\frac{-5}{8}\times\frac{-9}{7}=\frac{-5\times(-9)}{8\times 7}=\frac{45}{56}$

9.9.4 تقسیم (Division)

ہم نے کسری اعداد کے مقلوب کے بارے میں پہلے ہی پڑھ رکھا ہے۔ $\frac{2}{7}$ کا مقلوب کیا ہے؟ یہ $\frac{7}{2}$ ہوگا۔ ہم مقلوب کے اس تصور کو ناطق اعداد تک بڑھاتے ہیں۔

$\frac{-7}{2}$ کا مقلوب $\frac{7}{-2}$ ہوگا یعنی $\frac{-7}{2}$ ، $\frac{-3}{5}$ کا ہوگا $\frac{-5}{3}$ ۔

کوشش کیجیے:

$\frac{-6}{11}$ کا مقلوب کیا ہوگا؟ اور $\frac{-8}{5}$ کا؟

مقلوب کی ضرب

ایک ناطق عدد اور اس کے مقلوب کا حاصل ضرب ہمیشہ 1 ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر ($\frac{-4}{9}$ کا مقلوب) $\times\frac{4}{9}-$

$$= \frac{-4}{9} \times \frac{-9}{4} = 1$$

اسی طرح $\frac{-6}{13} \times \frac{-13}{6} = 1$

کچھ اور مثالوں کے لیے کوشش کیجیے اور اس مشاہدہ کی تصدیق کیجیے

سویتا ایک ناطق عدد $\frac{4}{9}$ کو ایک دوسرے ناطق عدد $\frac{-5}{7}$ سے تقسیم کرتی ہے۔ تقسیم کرتی ہے اس طرح

$$\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}$$

اس نے مقلوب کے تصور کا استعمال کیا جیسا کہ کسروں میں ارپت نے پہلے تقسیم کیا $\frac{4}{9}$ کو $\frac{5}{7}$ سے اور حاصل کیا $\frac{28}{45}$ اور آخر میں کہا

$\frac{4}{9} \div \frac{-5}{7} = \frac{-28}{45}$ ۔ اسے یہ کیسے حاصل ہوا؟

اس نے کسری اعداد کی طرح تقسیم کی منفی علامت کو نظر انداز کرتے ہوئے پھر حاصل کردہ قیمت میں منفی علامت شامل کر دی۔

ان دونوں کا جواب ایک ہی تھا $\frac{-28}{45}$ ۔ $\frac{2}{3}$ کو $\frac{-5}{7}$ سے دونوں طریقوں سے تقسیم کرنے کی کوشش کیجیے اور دیکھیے، کیا آپ کو ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

اس سے ظاہر ہوتا ہے: ایک ناطق عدد کو دوسرے ناطق عدد سے تقسیم کرنے کے لیے ہم ناطق عدد کو دوسرے ناطق عدد کے مقلوب سے ضرب کر دیتے ہیں۔

لہٰذا $\frac{6}{-5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times$ کا مقلوب $\left(\frac{-2}{3}\right)$

$$\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$$

کوشش کیجیے:

معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{2}{3} \times \frac{-7}{8}$ (ii) $\frac{-6}{7} \times \frac{5}{7}$

مشق 9.2

1۔ حاصل جمع معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{5}{4} + \left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{5}{3} + \frac{3}{5}$ (iii) $\frac{-9}{10} + \frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{-11} + \frac{5}{9}$ (v) $\frac{-8}{19} + \frac{(-2)}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3} + 0$

(vii) $-2\frac{1}{3}+4\frac{3}{5}$

2۔ معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{7}{24}-\frac{17}{36}$ (ii) $\frac{5}{63}-\left(\frac{-6}{21}\right)$ (iii) $\frac{-6}{13}-\left(\frac{-7}{15}\right)$

(iv) $\frac{-3}{8}-\frac{7}{11}$ (v) $-2\frac{1}{9}-6$

3۔ حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{9}{2}\times\left(\frac{-7}{4}\right)$ (ii) $\frac{3}{10}\times(-9)$ (iii) $\frac{-6}{5}\times\frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right)$ (v) $\frac{3}{11}\times\frac{2}{5}$ (vi) $\frac{3}{-5}\times\frac{-5}{3}$

4۔ درج ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $(-4)\div\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-3}{5}\div 2$ (iii) $\frac{-4}{5}\div(-3)$

(iv) $\frac{-1}{8}\div\frac{3}{4}$ (v) $\frac{-2}{13}\div\frac{1}{7}$ (vi) $\frac{-7}{12}\div\left(\frac{-2}{13}\right)$

(vii) $\frac{3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right)$

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ ایک عدد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$ ناطق عدد کہلاتا ہے، اعداد $\frac{-2}{7}$ ، $\frac{3}{8}$ ، 3 وغیرہ ناطق اعداد ہیں۔

2۔ تمام صحیح اعداد اور کسری اعداد ناطق اعداد ہیں۔

3۔ اگر کسی ناطق عدد کے شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک ہی صحیح عدد (0 نہ ہو) سے ضرب یا تقسیم کیا جاتا ہے۔ تو ہمیں ایک ایسا ناطق عدد حاصل ہوتا ہے جو دیے گئے ناطق عدد کا معادل ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر $\frac{-3}{7}=\frac{-3\times 2}{7\times 2}=\frac{-6}{14}$ اس لیے ہم کہتے کہ $\frac{-6}{14}$ ، $\frac{-3}{7}$ کی معادل شکل ہے۔

نوٹ کیجیے $\frac{-6}{14}=\frac{-6\div 2}{14\div 2}=\frac{-3}{7}$

4۔ ناطق اعداد کی درجہ بندی مثبت اور منفی ناطق اعداد کے طور پر کی گئی ہے۔ جب شمار کنندہ اور نسب نما دونوں مثبت صحیح اعداد ہوتے

ہیں تو یہ مثبت ناطق عدد ہوتا ہے۔ جب شمار کنندہ یا نسب نما دونوں میں سے کوئی ایک منفی صحیح عدد ہو تو یہ منفی ناطق عدد ہوگا۔
مثال کے طور پر $\frac{3}{8}$ ایک مثبت ناطق عدد ہے جب کہ $\frac{-8}{9}$ ایک منفی ناطق عدد ہے۔

5۔ عدد 0 نہ تو مثبت ناطق عدد ہے نہ ہی منفی۔

6۔ ایک ناطق عدد معیاری شکل میں کہا جائے گا اگر اس کا نسب نما مثبت صحیح عدد ہو اور شمار کنندہ اور نسب نما میں 1 کے علاوہ کوئی مشترک جز وضربی نہ ہو۔ اعداد $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{7}$ وغیرہ معیاری شکل میں ہیں۔

7۔ دو ناطق اعداد کے درمیان لامتناہی اعداد ہوتے ہیں۔

8۔ دو ناطق اعداد جن کے نسب نما ایک سے ہوں کو جوڑا جاتا ہے ان کے شمار کنندہ کو جوڑ کر اور ان کے نسب نما ویسے ہی رکھ کر۔ دو ناطق اعداد جن کے نسب نما مختلف ہوں کو جوڑنے کے لیے پہلے دونوں کے نسب نماؤں کا LCM لیا جاتا ہے۔ اور پھر دونوں ناطق اعداد کو ایسے معادل ناطق اعداد میں بدلا جاتا ہے جن کے نسب نما LCM کے برابر ہوں، مثلاً
$\frac{-2}{3}+\frac{3}{8}=\frac{-16}{24}+\frac{9}{24}=\frac{-16+9}{24}=\frac{-7}{24}$ یہاں 3 اور 8 کا LCM 24 ہے۔

9۔ دو ناطق اعداد کا فرق نکالتے وقت جس عدد کو گھٹانا ہوتا ہے اس کے جمعی معکوس کو دوسرے عدد میں جوڑ دیتے ہیں۔
اس لئے $\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{7}{8}+$ $\frac{2}{3}$ کا معکوس $=\frac{7}{8}+\frac{(-2)}{3}=\frac{21+(-16)}{24}=\frac{5}{24}$

10۔ دو ناطق اعداد کو ضرب دینے کے لیے ہم ان کے شمار کنندہ کو شمار کنندہ سے اور نسب نما کو نسب نما سے ضرب دیتے ہیں اور حاصل ضرب کو $\frac{\text{شمار کنندوں کی حاصل ضرب}}{\text{نسب نماؤں کی حاصل ضرب}}$ کی طرح لکھتے ہیں

11۔ ایک ناطق عدد کو کسی دوسرے غیر صفری ناطق عدد سے تقسیم کرنے کے لئے قاسم کے مقلوب سے مقسوم کو ضرب کرتے ہیں جیسے
$\frac{-7}{2}\div\frac{4}{3}=\frac{-7}{2}\times$ $\frac{4}{3}$ کا مقلوب $=\frac{-7}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{-21}{8}$ ۔

باب 10

4714CH10

عملی جیومیٹری

10.1 تعارف (Introduction)

آپ بہت سی اشکال کے بارے میں جانتے ہیں۔ پچھلی جماعتوں میں آپ نے ان میں سے کچھ کو بنانا بھی سیکھا ہے۔ مثال کے طور پر، آپ دی گئی لمبائی کی قطعہ خط بنا سکتے ہیں، دی گئی قطعہ خط پر عمودی خط بنا سکتے ہیں، ایک زاویہ، زاویہ کا ناصف، دائرہ وغیرہ بنا سکتے ہیں۔

اب، آپ متوازی خطوط اور کچھ رقبوں کے مثلث کو بنانا سیکھیں گے۔

10.2 دیے گئے خط کے متوازی ایک ایسا خط بنانا جو کہ ایک ایسے نقطے سے گزرے جو خط پر نہ ہو

آیئے ایک سرگرمی سے شروع کرتے ہیں۔ (شکل 10.1)

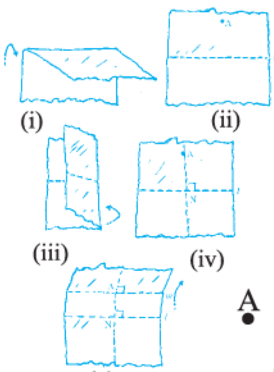
(i) ایک کاغذ لیجیے، اس کو موڑ کر ایک فولڈ بنائیے، یہ فولڈ خط 'l' کو ظاہر کر رہا ہے۔

(ii) کاغذ کو کھولیے، خط 'l' سے الگ ایک نقطہ A کا نشان لگائیے۔

(iii) اب کاغذ کو اس طرح موڑیے کہ فولڈ خط 'l' پر عمود بنائے اور یہ عمود نقطہ A سے گزرے۔ اس عمود کا نام AN رکھیے۔

(iv) اب پھر سے کاغذ کو اس طرح موڑیے کہ فولڈ نقطہ A سے گزرنے والے عمود پر بنے۔ اس نئے عمودی خط کا نام 'm' رکھیے۔ کیا آپ اب $l \parallel m$ دیکھ رہے ہیں کیوں؟

متوازی خطوط کی کون سی خصوصیت یا خصوصیات آپ کی یہاں یہ دیکھنے میں مدد کر رہی ہیں کہ l اور m متوازی ہیں۔



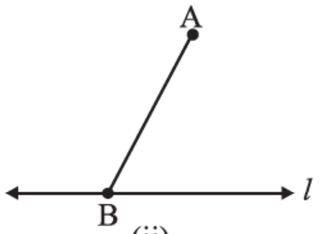
(شکل 10.1)

اس کو اسکیل اور پرکار کی مدد سے بنانے کے لیے آپ متوازی خطوط اور قاطع کی خصوصیات میں سے کوئی بھی ایک استعمال کر سکتے ہیں۔

مرحلہ 1 ایک خط 'l' لیجیے اور 'l' کے باہر ایک نقطہ 'A' لیجیے۔ (شکل 10.2(i))

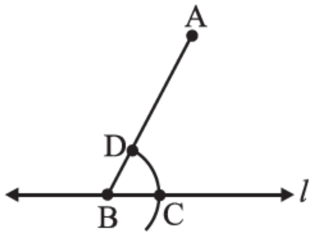
(i)

مرحلہ 2 'l' پر کوئی ایک نقطہ B لیجیے اور B کو A سے ملایئے۔ (شکل (10.2(ii)

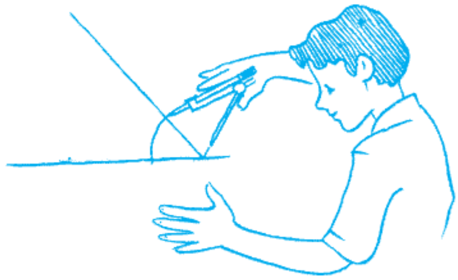


(ii)

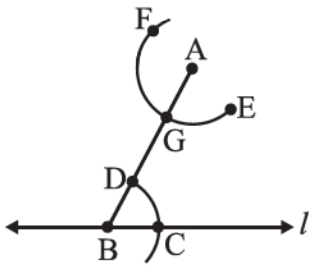
مرحلہ 3 B کو مرکز مان کر اور ایک آرام دہ نصف قطر سے l سے ایک قوس لگایئے جو l کو C اور BA کو D پر کاٹے۔ (شکل (10.2(iii)



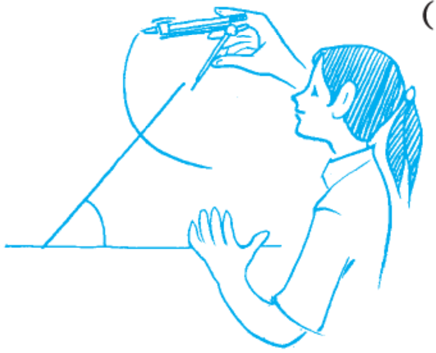
(iii)



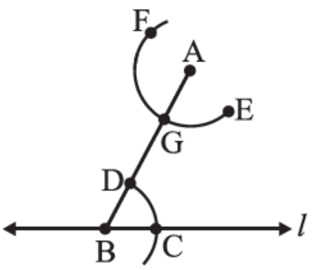
مرحلہ 4 مرحلہ 4: اب A کو مرکز مان کر اور مرحلہ # میں دیے گئے نصف قطر سے ایک قوس EF بنایئے جو AB کو G پر کاٹے۔ (شکل (10.2(iv)



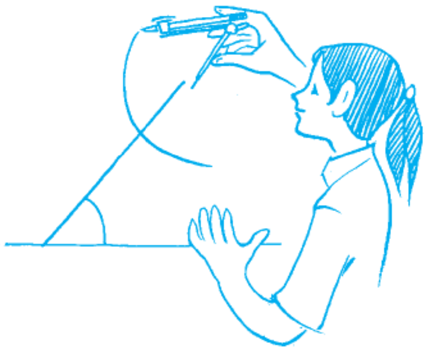
(iv)



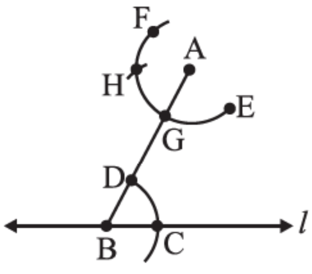
مرحلہ 5 پرکار کی نوک کو C پر رکھیے اور پرکار کو اتنا کھولیے کہ پنسل کی نوک D پر آ جائے۔ (شکل (10.2(v)



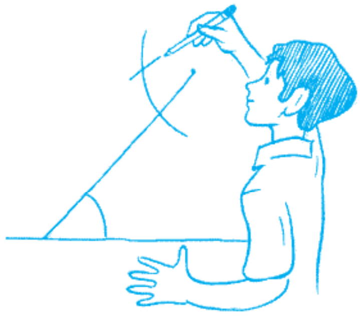
(v)



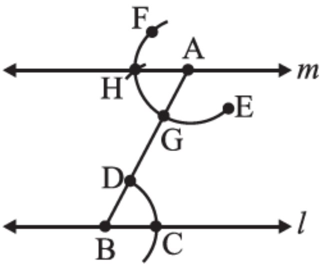
مرحلہ 6 مرحلہ 5 میں کھولے گئے پرکار کے فاصلہ سے G کو مرکز مان کر ایک قوس لگایئے جو قوس EF کو H پر کاٹے۔ (شکل (10.2(vi)



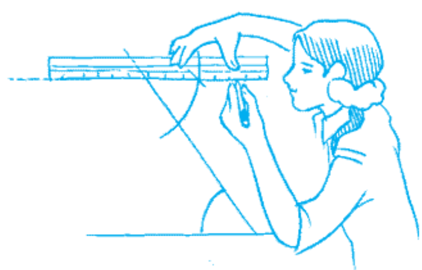
(vi)



مرحلہ 7 اب خط 'm' بنانے کے لیے AH کو ملائیے۔(شکل 10.2(vii))



(vii) (شکل 10.2(i))



نوٹ کیجیے کہ $\angle ABC$ اور $\angle BAH$ متبادل داخلی زاویے ہیں۔ اس لیے $m \parallel l$

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ اوپر دی گئی تشکیل میں، کیا آپ A سے گزرتا ہوا کوئی اور خط بنا سکتے ہیں جو خط l کے متوازی ہو؟

2۔ کیا آپ اوپر دی گئی تشکیل میں برابر متبادل داخلی زاویوں کی جگہ برابر نظیری زاویوں کا تصور استعمال کرنے کے لیے کچھ تبدیلی کر سکتے ہیں؟

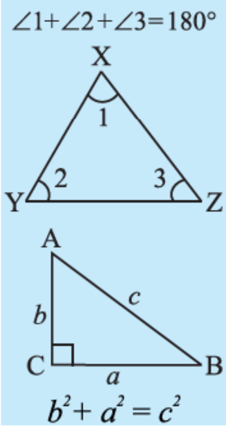
مشق 10.1

1۔ ایک خط بنائیے، جیسے AB، اس کے باہر ایک نقطہ C لیجیے۔ اسکیل اور پرکار کا استعمال کر کے C سے AB کے متوازی ایک خط بنائیے۔

2۔ ایک خط l بنائیے۔ l کے کسی بھی نقطے پر ایک عمود بنائیے۔ اس عمود پر l سے 4 سنٹی میٹر کی دوری پر ایک نقطہ X لیجیے۔ X سے ایک خط m لیجیے جو l کے متوازی ہو۔

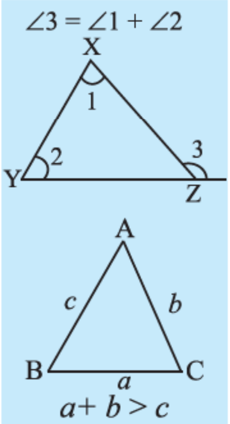
3۔ مان لیجیے l ایک خط ہے اور p ایک نقطہ ہے جو l پر نہیں ہے۔ p سے l کے متوازی ایک خط m بنائیے۔ اب p کو l کے کسی بھی نقطہ Q سے ملائیے۔ m پر کوئی دوسرا نقطہ R لیجیے۔ R سے PQ کے متوازی ایک خط بنائیے۔ مان لیجیے یہ l سے S پر ملے گا۔ متوازی خطوط کے یہ دونوں جوڑوں کے درمیان کون سی شکل بن رہی ہے۔

10.3 مثلثوں کی تشکیل



آپ کے لیے یہ بہتر ہوگا کہ آپ اس حصہ میں جانے سے پہلے مثلثوں کے تصورات کو دہرالیں، خاص طور پر مثلث کی خصوصیات اور مثلث کی مماثلت، کو دہرالیں۔

آپ جانتے ہیں کہ مثلثوں کی درجہ بندی اضلاع یا زاویوں کے اعتبار سے کیسے کی جاتی ہے اور مثلثوں کی مندرجہ ذیل اہم خصوصیات:



(i) ایک مثلث کا بیرونی زاویہ اس کے متقابل داخلی زاویوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔

(ii) ایک مثلث کے تینوں زاویوں کی کل پیائش 180° ہوتی ہے۔

(iii) کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔

(iv) کسی بھی قائمہ زاوی مثلث میں وتر کی لمبائی کا مربع باقی دونوں ضلعوں کی لمبائیوں کے مربعوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔

مثلثوں کے مماثلت کے باب میں ہم نے دیکھا تھا کہ ایک مثلث کو بنایا جا سکتا ہے اگر مندرجہ ذیل چیزوں کی پیائش دی جائے:

(i) تین اضلاع۔

(ii) دو اضلاع اور ان کے درمیان کا زاویہ۔

(iii) دو زاویے اور ان کے درمیان کا ضلع۔

(iv) قائمہ زاوی مثلث کے معاملے میں وتر اور ایک بازو کی لمبائی۔

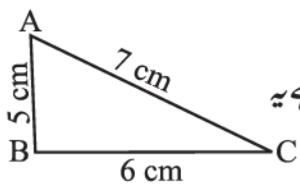
اب ہم ان تصورات کا استعمال مثلثوں کی تشکیل میں کریں گے۔

10.4 ایک ایسے مثلث کی تشکیل جس کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہوں (SSS معیار)

اس حصہ میں ہم ایسے مثلث کی تشکیل کریں گے جس کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہوں۔ پہلے ہم ایک رف اسکیچ بنائیں گے تاکہ ہمیں یہ اندازہ ہو سکے کہ اضلاع کہاں ہیں اور پھر تینوں میں سے کوئی بھی ایک ضلع بنا کر مثلث بنانا شروع کریں گے۔ مندرجہ ذیل مثالوں کو دیکھیے:

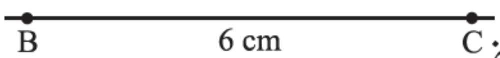
مثال 1 مثلث ABC بنائیے جس میں AB=5 سنٹی میٹر، BC=6 سنٹی میٹر اور AC=7 سنٹی میٹر دیے گئے ہیں۔

حل



(i)

مرحلہ 1 پہلے ہم دی گئی پیائش کی مدد سے ایک رف اسکیچ بنائیں گے۔ (یہ ہماری مدد کرتا ہے یہ جاننے میں کہ ہم آگے کیسے بڑھیں)۔ (شکل (10.3(i))

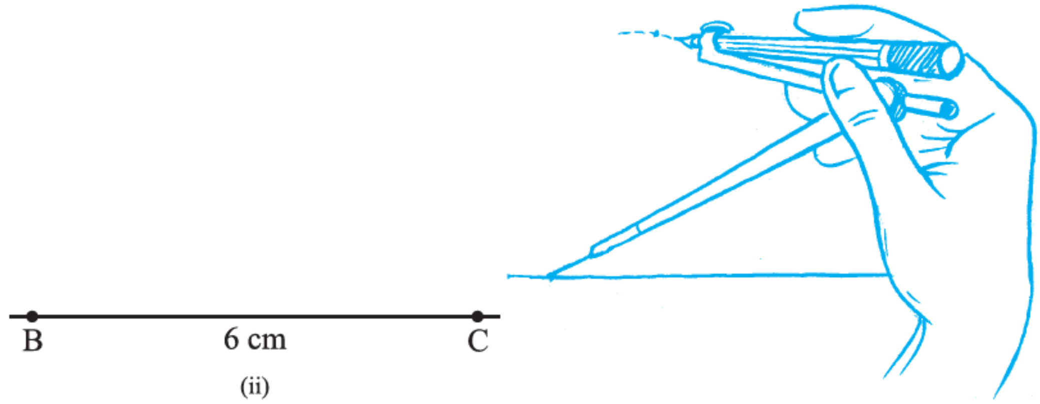


(ii)

مرحلہ 2 6 سنٹی میٹر لمبی ایک قطعہ خط BC بنائیے۔

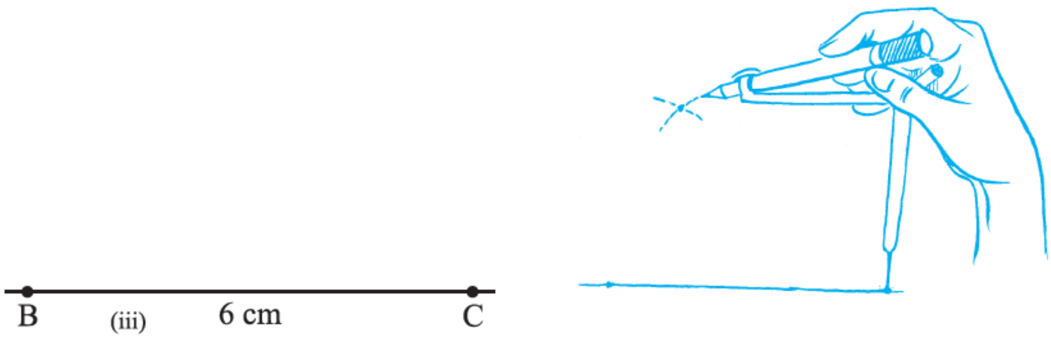
مرحلہ 3 B سے 5 سنٹی میٹر کی دوری پر نقطہ A ہے۔ اس لیے B کو مرکز

مان کر 5 سنٹی میٹر نصف قطر کی ایک قوس لگائیے۔ (اب اسی قوس پر کہیں A ہوگا۔ ہمارا کام یہ معلوم کرنا ہے کہ A دراصل ہے کہاں)۔ (شکل (10.3(iii)

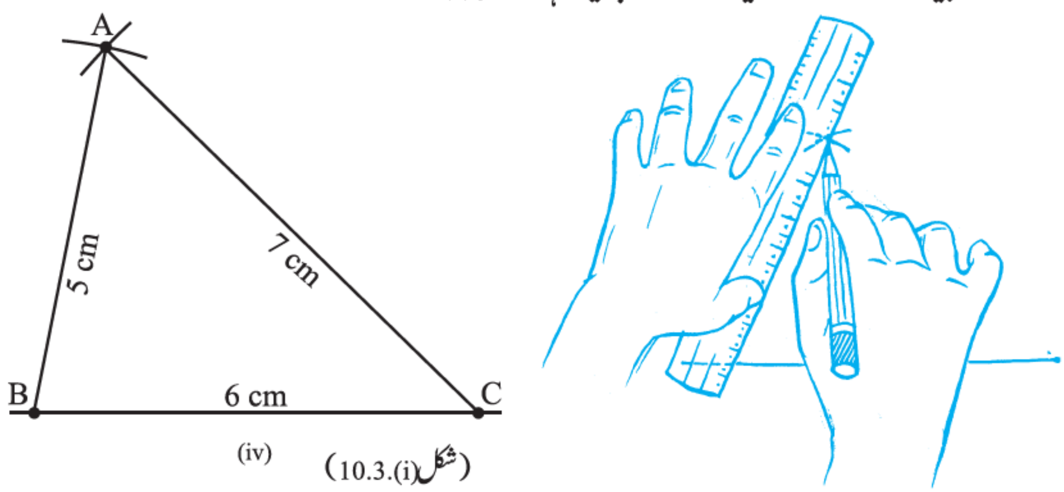


(ii)

مرحلہ 4 C سے 7 سنٹی میٹر کی دوری پر نقطہ A ہے۔ اس لیے C کو مرکز مان کر 7 سنٹی میٹر نصف قطر کی ایک قوس لگائیے۔ (اسی قوس پر کہیں نقطہ A ہوگا، ہم کو اس کو دکھانا ہے)۔ (شکل (10.3(iv)



مرحلہ 5 دونوں بنائی گئی قوسوں پر A ہونا چاہیے۔ اس لیے یہ ان دونوں قوسوں کا نقطہ تقاطع ہے۔ نقطہ تقاطع کی نشاندہی A سے کیجیے۔ AB اور AC کو ملائیے ΔABC اب تیار ہے۔ (شکل (10.3(v)



(iv) (شکل (10.3.(i)

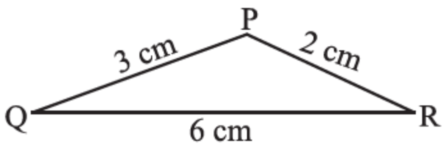
اسے کیجیے

اب ایک اور مثلث DEF بنائیے جس میں DE=5 سنٹی میٹر، EF=6 سنٹی میٹر اور FD=7 سنٹی میٹر ہیں۔ ΔDEF کی ایک نقل کاٹ لیجیے اور اس کی مثلث ΔABC پر رکھیے۔ آپ کا کیا مشاہدہ ہے؟

ہم نے مشاہدہ کیا کہ ΔDEF نے پوری طرح سے ΔABC کو ڈھک لیا۔ (نوٹ کیجیے کہ اگر مثلث کے تینوں اضلاع دیے گئے ہوں تو اس کو بنایا جاسکتا ہے)۔ لہٰذا، اگر ایک مثلث کے تین اضلاع دوسرے مثلث کے متناظر تینوں ضلعوں کے برابر ہوں تو دونوں مثلث مماثل ہوتے ہیں۔ یہ مماثلت کا SSS اصول ہے جو ہم پچھلے باب میں پڑھ چکے ہیں۔

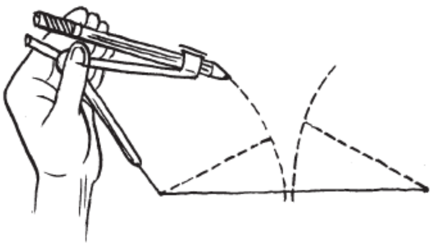
سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

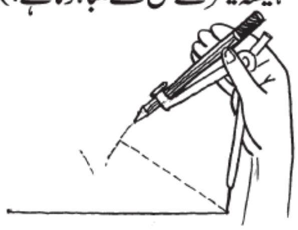
ایک طالب علم اس مثلث کو بنانے کی کوشش کر رہا تھا جس کی رف اسکیچ دی گئی ہے۔ اس نے پہلے QR بنایا۔ پھر Q کو مرکز مان کر اس نے 3 سنٹی میٹر کے فاصلے سے ایک قوس بنایا اور پھر R کو مرکز مان کر 2 سنٹی میٹر فاصلہ کا ایک قوس لگایا لیکن اس کو P نہیں ملا۔ کیا وجہ ہے؟ اس مسئلہ سے متعلق آپ مثلث کی کون سی خصوصیت جانتے ہیں۔



[شکل 10.4 سوچیے کیا یہ صحیح ہے]

کیا ایسا کوئی مثلث ہوسکتا ہے؟ (مثلث کی یہ خصوصیت یاد کیجیے کہ 'مثلث کے کوئی بھی دو اضلاع کا جوڑ ہمیشہ تیسرے ضلع سے لمبا ہوتا ہے'!)۔





مشق 10.2

1۔ D XYZ بنائیے جس میں XY=4.5 سینٹی میٹر، YZ=5 سینٹی میٹر اور ZX=6 سینٹی میٹر۔

2۔ ایک مساوی اضلاع مثلث بنائیے جس کے ایک ضلع کی لمبائی 5.5 سینٹی میٹر ہے۔

3۔ Δ PQR بنائیے جس میں PQ = 4 سینٹی میٹر، QR=3.5 سینٹی میٹر اور PR=4 سینٹی میٹر ہے۔ یہ کون سی رقم کا مثلث ہے۔

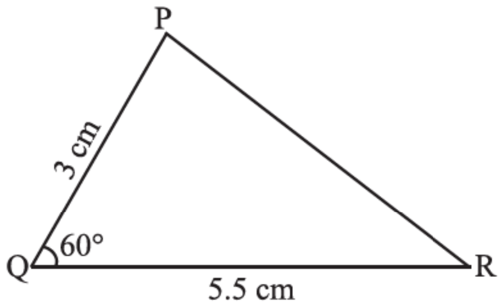
4۔ ΔABC بنائیے جس میں AB=2.5 سینٹی میٹر، BC=6 سینٹی میٹر اور AC=6.5 سینٹی میٹر دی گئی ہے۔ ∠B کی پیمائش کیجیے۔

10.5 ایک ایسے مثلث کی تشکیل جس کے کوئی دو اضلاع کی لمبائی اور ان کے درمیان کا زاویہ دیا گیا ہو۔ (SAS معیار)

یہاں ہمیں دو اضلاع اور ان کے درمیان کا ایک زاویہ دیا گیا ہے۔ ہم پہلے ایک رف اسکیچ بنائیں گے۔ پھر دی گئی قطعہ خط میں سے ایک

بناتے ہیں۔ ذیل میں دوسرے مرحلے دیے گئے ہیں۔ مثال 2 دیکھیے۔

(رف اسکیچ)

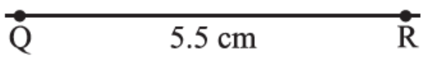


(i)

مثال 2 ایک مثلث PQR بنائیے، دیا گیا ہے کہ 3 سینٹی میٹر=PQ، 5.5 سینٹی میٹر=QR اور $\angle PQR=60°$

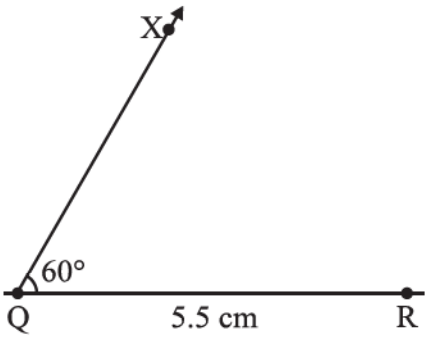
حل

مرحلہ 1 پہلے دی گئی پیائش کی مدد سے ایک رف اسکیچ بنائیے (یہ تشکیل میں استعمال ہونے والے طریقہ میں مددگار ثابت ہوگا)۔ (شکل (10.5(iii)



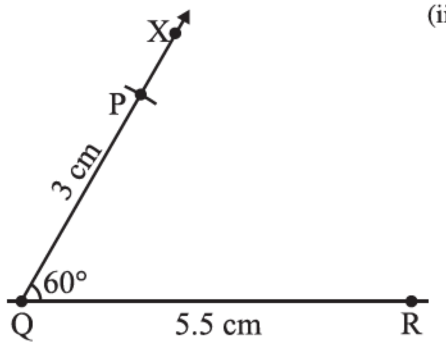
(ii)

مرحلہ 2 5.5 سنٹی میٹر لمبی قطعۂ خط QR بنائیے

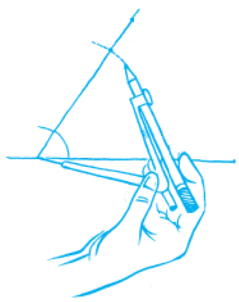


(iii)

مرحلہ 3 QR کے نقط Q پر 60° کا زاویہ بناتے ہوئے QX بنائیے۔ (یہ نقطۂ P زاویہ کی اس شعاع پر ہی کہیں ہوگا)۔ (شکل (10.5(iii)

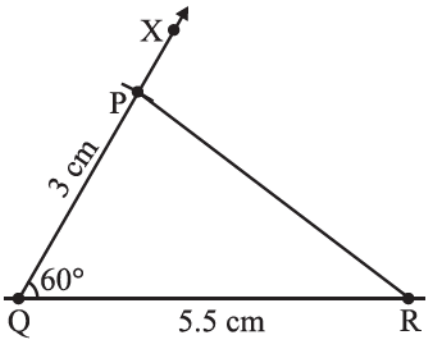


(iv)

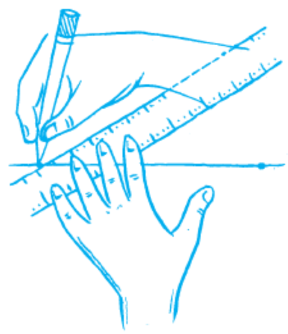


مرحلہ 4 (P کو فکس کرنے کے لیے فاصلہ Q P دیا گیا ہے) Q کو مرکز مان کر، 3 سنٹی میٹر نصف قطر کی ایک قوس نکالیے۔ یہ Q X کو نقطہ P پر کاٹتا ہے۔ (شکل (10.5(iv)

مرحلہ 5 PR کو ملایے ΔPQR اب حاضر ہے۔ (شکل (10.5(v)



(v)



شکل **10.5(i)-(v)**

اسے کیجیے

آ یئے اب ایک اور مثلث ABC بنایئے جس میں AB=3 سنٹی میٹر، BC=5.5 سنٹی میٹر اور $m\angle ABC=60^\circ$ دی گئی ہے۔ ΔABC بنا کر کاٹ لیجیے اور اس کو ΔPQR پر رکھیے۔ آپ کا مشاہدہ کیا ہے؟ ہم نے مشاہدہ کیا کہ ΔABC مکمل طور پر ΔPQR کو ڈھک لیتا ہے۔ اس طرح اگر کسی مثلث کے دو اضلاع اور ان کے درمیان کا زاویہ دوسرے مثلث کے متناظر دو اضلاع اور ان کے درمیان کے زاویہ کے برابر ہو تو وہ دونوں مثلث مماثل ہوں گے۔ یہ مماثلت کا **SAS** اصول ہے جو کہ ہم پچھلے سبق میں پڑھ چکے ہیں۔ (نوٹ کیجیے کہ مثلث کو بنایا جا سکتا ہے، اگر اس کے دو اضلاع اور ان کے درمیان کا زاویہ دیا گیا ہو)

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

اوپر دی گئی تشکیل میں دو اضلاع اور ایک زاویہ کی پیائش دی گئی تھی۔ اب مندرجہ ذیل مسئلہ کو پڑھیے:

D ABC میں اگر 3 سینٹی میٹر=AB، 5 سینٹی میٹر=AC، $m\angle C=30^\circ$ ہو۔ کیا ہم یہ مثلث بنا سکتے ہیں؟ ہم 5 سم=AC اور 30° پیمائش $\angle C$، CA $\angle C$ کا بازو یا ضلع ہے۔ نقطہ B، $\angle C$ کے دوسرے بازو پر ہونا چاہیے، لیکن مشاہدہ کیجیے کہ نقطہ B ایک ہی طرح سے نہیں دکھایا جا رہا ہے۔ اس کا مطلب ہے ΔABC بنانے کے لیے اعداد و شمار کافی نہیں ہے۔

اب ΔABC بنانے کی کوشش کیجیے اگر 3=AB سینٹی میٹر، 5=AC سینٹی میٹر اور $m\angle B=30^\circ$ ہو۔ آپ کا مشاہدہ کیا ہے؟ پھر سے ΔABC بننا ممکن نہیں ہے۔ لہٰذا، ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ مثلث کی تشکیل اسی وقت ہو سکتی ہے جب کہ اس کے دو اضلاع اور لمبائیاں اور ان کے درمیان کا زاویہ دیا گیا ہو۔

مشق 10.3

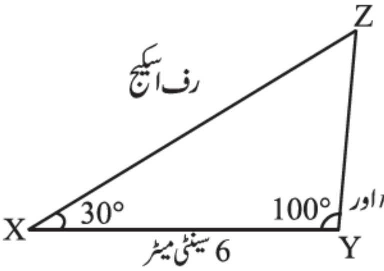
1۔ D DEF بنایئے جہاں 5 سینٹی میٹر=DE، 3 سینٹی میٹر=DF اور $m\angle DEF=90^\circ$

2۔ ایک مساوی الساقین مثلث بنایئے جس میں برابر اضلاع کی لمبائی 6.5 سنٹی میٹر ہو اور ان کے درمیان کا زاویہ 110° ہو۔

3۔ D ABC بنایئے جس میں 7.5 سینٹی میٹر=BC، 5 سینٹی میٹر=AC اور $m\angle C=60^\circ$ ہو۔

10.6 ایک ایسے مثلث کی تشکیل جس میں دو زاویوں کی پیائش اور ان کے درمیان کے ضلع کی لمبائی دی گئی ہو۔ (مماثلت کا ASA اصول)

جیسا کہ پہلے بھی کیا ہے، ایک رف اسکیچ بنایئے۔ اب دیا گیا قطعۂ خط بنایئے۔ دونوں سروں پر دونوں زاویے بنایئے۔ مثال 3 دیکھیے۔



(i)

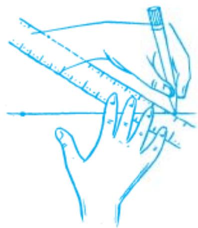
مثال 3 ΔXYZ بنایئے، اگر یہ دیا گیا ہے کہ XY=6 سینٹی میٹر، $m\angle ZXY=30^\circ$ اور $m\angle XYZ=100^\circ$

حل:

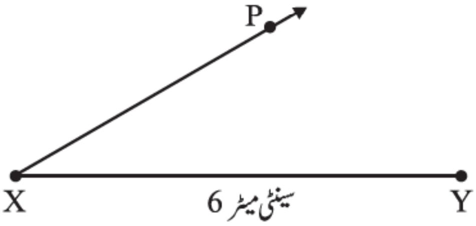
مرحلہ 1 اصل تشکیل سے پہلے ہم دی گئی پیمائشوں کی مدد سے ایک رف اسکیچ بنائیں گے (یہ صرف یہ دیکھنے کے لیے بناتے ہیں کہ ہم آگے کیسے بڑھیں)۔ (شکل (10.6(i)

مرحلہ 2 6 سینٹی میٹر لمبی XY بنائیے

(ii)

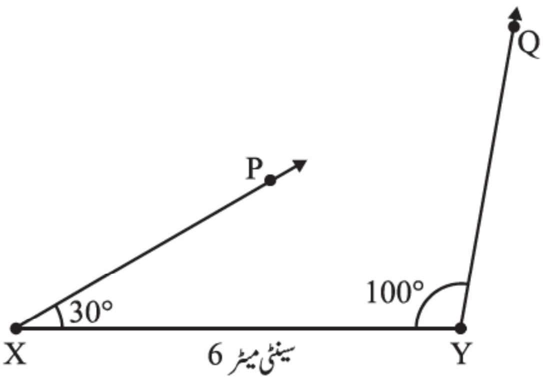


مرحلہ 3 X پر ایک ایسی شعاع XP بنائیے جو XY کے ساتھ 30° کا زاویہ بنائے۔ دی گئی شرط کے مطابق Z کو XP پر ہی کہیں ہونا چاہیے۔



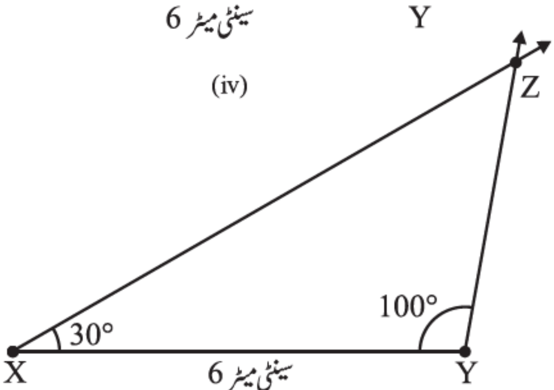
(iii)

مرحلہ 4 Y پر ایک ایسی شعاع YQ بنائیے جو YX کے ساتھ 100° کا زاویہ بنائے۔ دی گئی شرط کے مطابق Z کو YQ پر ہی کہیں ہونا چاہیے۔

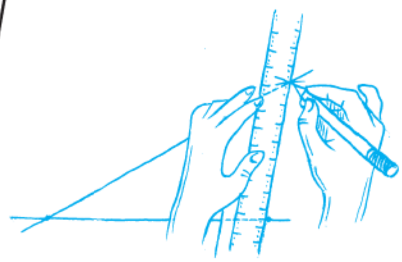


(iv)

مرحلہ 5 Z کو دونوں شعاعوں XP اور YQ پر ہی کہیں ہونا چاہیے۔ اس لیے دونوں شعاعوں کا نقطۂ تقاطع Z ہے۔ اب ΔXYZ پورا ہو گیا ہے۔



(v)



شکل (10.6(i)-(v)

اسے کیجیے

اب ایک اور ΔLMN بنائیے۔ جہاں $m\angle NLM = 30°$، LM=6 سنٹی میٹر اور $m\angle NML=100°$ ہو۔ ΔLMN کو کاٹ لیجیے اور اس کو ΔXYZ پر رکھیے۔ ہم دیکھیں گے کہ ΔLMN پوری طرح ΔXYZ کو ڈھک لیتا ہے۔ لہٰذا، اگر دو زاویے اور ان کے درمیان کا ضلع دوسرے مثلث کے متناظر دو زاویوں اور ان کے درمیان کے ضلع کے برابر ہوں تو دونوں مثلث مماثل ہوتے ہیں۔ یہ مماثلت کا ASA اصول ہے جو کہ آپ پچھلے باب میں پڑھ چکے ہیں۔ (نوٹ کیجیے کہ اگر کسی مثلث کے دو زاویے اور ان کے درمیان کا ضلع معلوم ہو تو مثلث کی تشکیل ہو سکتی ہے)

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

اوپر کی مثال میں ایک ضلع اور دو زاویوں کی پیمائش دی گئی ہے، اب مندرجہ ذیل مسئلہ کو دیکھیے:

ΔABC میں اگر AC=7 سینٹی میٹر، $m\angle A=60°$ اور $m\angle B=50°$ ہیں تو کیا آپ یہ مثلث بنا سکتے ہیں۔ (مثلث کے زاویوں کے جوڑ کی خصوصیت آپ کی یہاں مدد کرسکتی ہے)۔

مشق 10.4

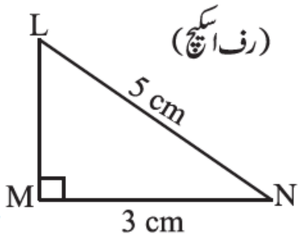
1۔ ΔABC بنائیے، دیا گیا ہے $m\angle C=60°$ ، $m\angle B=30°$ اور AB = 5.8 سینٹی میٹر

2۔ ΔPQR بنائیے، اگر PQ=5 سینٹی میٹر، $m\angle PQR = 105°$ اور $m\angle QRP = 40°$ ہو۔

(اشارہ: مثلث کے زاویوں کے جوڑ کی خصوصیت کو یاد کیجیے)

3۔ جانچ کیجیے کہ کیا آپ ΔDEF بنا سکتے ہیں جہاں EF=7.2 سینٹی میٹر، $m\angle E=110°$ اور $m\angle F=80°$ ۔ اپنے جواب کی تصدیق کیجیے۔

10.7 قائمہ زاوی مثلث کی تشکیل جب اس کے ایک بازو (ضلع) اور وتر کی لمبائی دی گئی ہو۔ (مماثلت کا RHS اصول)



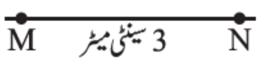
(رف اسکیچ)
(i)

یہاں رف اسکیچ بنانا آسان ہے۔ اب دی گئی لمبائی والا ضلع بنائیے۔ اس کے کسی ایک سرے والے نقطہ پر زاویہ قائمہ بنائیے۔ پرکار کی مدد سے مثلث کے ضلع اور وتر کی لمبائیوں کے نشانات لگائیے۔ مثلث کو پورا کیجیے۔ مندرجہ ذیل کو دیکھیے۔

مثال 4 ΔLMN بنائیے، جس میں زاویہ قائمہ M پر ہو۔ دیا گیا ہے LN=5 سینٹی میٹر اور MN=3 سینٹی میٹر۔

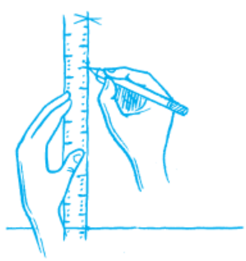
حل

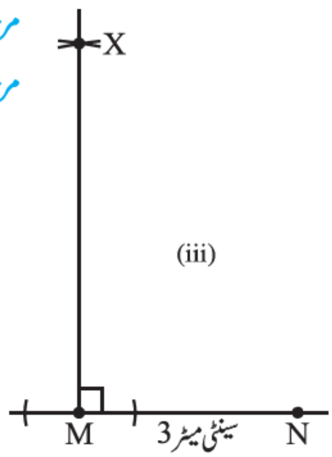
مرحلہ 1 ایک رف اسکیچ بنائیے اور پیمائش کو لکھیے۔ زاویہ قائمہ کا نشان لگانا یاد رکھیے۔ (شکل (10.7(i)



(ii)

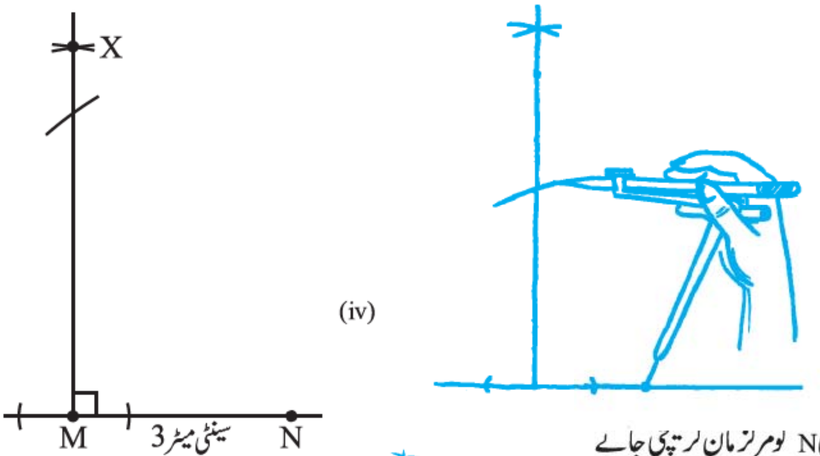
مرحلہ 2 3 سینٹی میٹر لمبائی کا MN بنائیے۔ (شکل (10.7.(ii)





مرحلہ 3 M پر $MX \perp MN$ بنائیے۔ (عمود پر ہی کہیں L ہونا چاہیے۔ (شکل (10.7(iii))

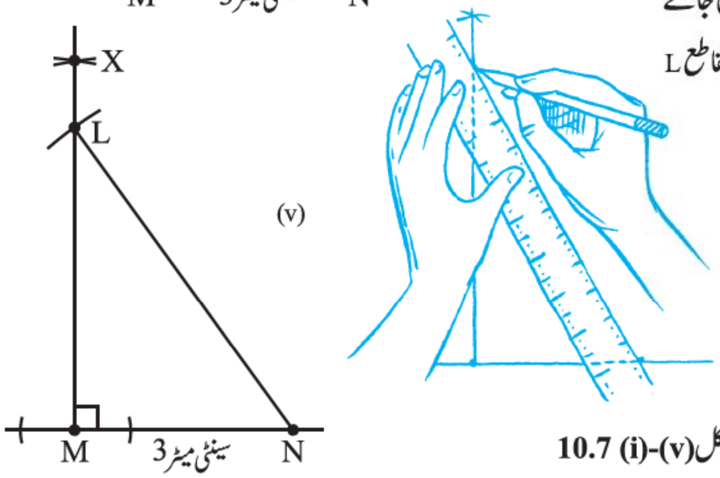
مرحلہ 4 N کو مرکز مان کر 5 سینٹی میٹر نصف قطر کا ایک قوس لگائیے۔ (اس قوس پر L ہوگا، کیونکہ یہ N سے 5 سینٹی میٹر دوری پر ہے)۔ (شکل (10.7(iv)



(iv)

مرحلہ 5 عمودی خط MX پر L ہوگا اور ساتھ ہی N کو مرکز مان کر تیار کی جانے والی قوس پر بھی L ہوگا۔ اس لیے L مان دونوں کا نقطۂ تقاطع L ہوگا۔

پ کو مل گیا ΔLMN ۔(شکل (10.7(v))



(v)

شکل (v)-(i) 10.7

مشق 10.5

1۔ قائمہ زاوی مثلث ΔPQR بنائیے جہاں $m\angle Q=90°$، QR=8 سینٹی میٹر اور PR=10 سینٹی میٹر۔

2۔ ایک قائمہ زاوی مثلث بنائیے جس کا وتر 6 سینٹی میٹر لمبا ہے اور اس کا ایک بازو (ضلع) 4 سینٹی میٹر ہے۔

3۔ ایک قائمہ زاوی مساوی الساقین مثلث ABC بنائیے جہاں $m\angle ACB=90°$ اور AC=6 سنٹی میٹر ہو۔

دیگر سوالات

نیچے مختلف مثلثوں کے زاویے اور کچھ اضلاع کی پیمائشیں دی گئی ہیں۔ ان مثلثوں کو پہچانیے جو نہیں بنائے جا سکتے ہیں۔ اور نہ بننے کی وجہ بھی بتائیے۔ باقی مثلثوں کو بنائیے۔

مثلث	دی گئی پیمائش		
1. ΔABC	$m\angle A = 85°$;	$m\angle B = 115°$;	AB = 5 cm.
2. ΔPQR	$m\angle Q = 30°$;	$m\angle R = 60°$;	QR = 4.7 cm.
3. ΔABC	$m\angle A = 70°$;	$m\angle B = 50°$;	AC = 3 cm.

4. ΔLMN	$m\angle L = 60°$;	$m\angle N = 120°$;	LM = 5 cm.
5. ΔABC	BC = 2 cm;	AB = 4 cm;	AC = 2 cm.
6. ΔPQR	PQ = 3.5 cm.;	QR = 4 cm.;	PR = 3.5 cm.
7. ΔXYZ	XY = 3 cm;	yz = 4 cm;	xz = 5 cm
8. ΔDEF	DE = 4.5cm;	EF = 5.5cm;	DF = 4 cm.

ہم نے کیا سیکھا؟

اس باب میں ہم نے اسکیل اور پرکار کی مدد سے تشکیل کے کچھ طریقے دیکھے۔

1۔ ایک خط اور ایک ایسا نقطہ جو کہ خط پر نہیں یہ ہے، دیا گیا ہے۔ قاطع کی ڈائیگرام میں ہم برابر متبادل زاویوں کا استعمال *l* کے متوازی خط کھینچنے میں کرتے ہیں۔
اس تشکیل میں ہم 'برابر نظیری زاویوں' کا استعمال بھی کر سکتے ہیں۔

2۔ ہم نے مثلث بنانے کے طریقوں کے بارے میں پڑھا، اس میں ہم نے مثلثوں کی مماثلت کے تصور کا بلا واسطہ استعمال دیکھا۔
مندرجہ ذیل طریقوں پر غور کیا:

(i) SSS: مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائی دی گئی تھی۔

(ii) SAS: مثلث کے دو اضلاع اور ان کے درمیان کے زاویہ کی پیمائش دی گئی تھی۔

(iii) ASA: مثلث کے دو زاویوں کی پیمائش اور ان کے درمیان کے ضلع کی لمبائی دی گئی تھی۔

(iv) RHS: قائمہ زاویہ مثلث کے وتر اور ایک بازو (ضلع) کی لمبائی دی گئی ہے۔

باب 11

4714CH11

احاطہ اور رقبہ

11.1 تعارف (Introduction)

VI کلاس میں آپ نے مستوی اشکال کے احاطہ اور مستطیل اور مربع کے رقبہ کے بارے میں پڑھا ہے۔ کسی بند شکل کو بنانے والے قطعہ کی لمبائی احاطہ ہے۔ جب کہ کسی بند شکل کے ذریعہ گھیرے گئے خطہ کی پیمائش رقبہ ہے۔

اس جماعت میں آپ چند اور مستوی اشکال کے احاطہ اور رقبہ کے بارے میں پڑھیں گے۔

11.2 مربع اور مستطیل (Squares and Rectangles)

آیوش اور دکشا نے تصویریں بنائیں۔ آیوش نے اپنی تصویر ایک مستطیل نما کاغذ پر بنائی جس کی لمبائی 60 سینٹی میٹر اور چوڑائی 20 سنٹی میٹر ہے۔ جب کہ دکشا نے اپنی تصویر مستطیل نما کاغذ پر بنائی جس کی لمبائی 40 سینٹی میٹر اور چوڑائی 35 سینٹی میٹر ہے۔ ان دونوں تصویروں کو الگ الگ فریم میں جڑوایا اور اس پر پلاسٹک کی تہہ چڑھوائی۔ اگر فریم چڑھوانے کی قیمت ₹ 3 فی سنٹی میٹر ہے تو کس نے فریم چڑھوانے کے لیے زیادہ پیسے ادا کیے؟

اگر پلاسٹک کی تہہ چڑھوانے کی قیمت ₹ 2 فی مربع سینٹی میٹر ہے تو کس نے زیادہ قیمت ادا کی؟

فریم چڑھوانے کی قیمت نکالنے کے لیے ہم کو پہلے احاطہ نکالنے کی ضرورت ہوگی اور پھر اس کو فریم کی قیمت سے ضرب کرنا ہوگا۔

پلاسٹک چڑھانے کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم کو پہلے رقبہ نکالنا ہوگا اور پھر اسے پلاسٹک چڑھانے کی قیمت سے ضرب کرنا ہوگا۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل کے جواب معلوم کرنے کے لیے آپ کو کیا معلوم کرنا ہوگا، احاطہ یا رقبہ؟

1۔ ایک تختہ سیاہ کتنی جگہ گھیرتا ہے؟

2۔ ایک مستطیل نما پھولوں کی کیاری کی باڑھ لگانے کے لیے کتنے تار کی ضرورت ہوگی؟

3۔ مثلث نما پارک کے چاروں طرف دو چکر لگانے میں آپ کتنا فاصلہ طے کریں گے؟

4۔ مستطیل نما سوئمنگ پول کو ڈھکنے کے لیے کتنی پلاسٹک شیٹ کی ضرورت ہوگی؟

کیا آپ کو یاد ہے۔

منظم کثیر ضلعی کا احاطہ = اضلاع کی تعداد × ایک ضلع کی لمبائی

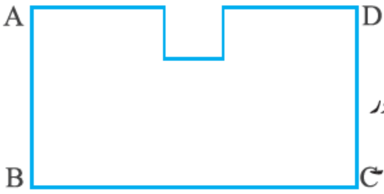
مربع کا احاطہ = 4 × ضلع

مستطیل کا احاطہ = $2\times(l+b)$

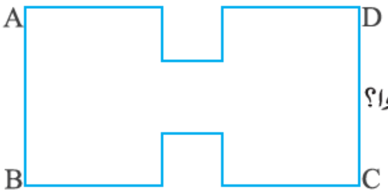
مستطیل کا رقبہ = $l\times b$

مربع کا رقبہ = ضلع × ضلع

شکل 11.1



شکل 11.2



شکل 11.3

تانیا کو ایک کولاژ مکمل کرنے کے لیے 4 سینٹی میٹر ضلع کے مربع کی ضرورت ہے۔ اس کے پاس 28 سینٹی میٹر لمبی اور 21 سنٹی میٹر چوڑا مستطیل نما کاغذ ہے۔ (شکل 11.1) اس نے مستطیل نما کاغذ سے 4 سینٹی میٹر ضلع کا مربع کاٹ لیا۔ اس کی درست کے باقی بچے کاغذ کو دیکھا (شکل 11.2) اور تانیا سے پوچھا ''کیا اب اس کاغذ کا احاطہ بڑھا یا گھٹا؟''

مربع کاٹنے کے بعد کیا AD ضلع کی کل لمبائی بڑھ گئی ہے؟ کیا اس کا رقبہ بڑھا ہے یا گھٹا ہے؟

تانیہ نے متقابل ضلع سے ایک اور مربع کاٹ لیا۔ (شکل 11.3) کیا باقی بچے کاغذ کے احاطہ میں اور زیادہ اضافہ ہوا؟

کیا رقبہ مزید بڑھا یا گھٹا ہے؟

تو ہم اس سے کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟ یہ واضح ہے کہ احاطہ کے بڑھنے کے لیے ضروری نہیں ہے کہ رقبہ بھی بڑھے؟

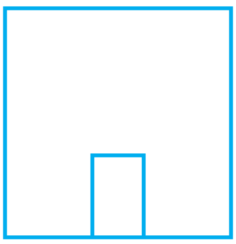
کوشش کیجیے:

1۔ اسی طرح کی بہت سی اشکال اور کٹ آؤٹ کے ساتھ تجربات کیجیے۔ مربع کاغذ یا گراف پیپر پر یہ اشکال بنانے اور ان کا رقبہ اور احاطہ نکالنے میں یہ زیادہ کارآمد ہوں گے۔ آپ دیکھیں گے کہ احاطہ بڑھنے کا یہ مطلب نہیں ہوتا ہے کہ رقبہ بھی بڑھے۔

2۔ ایسی دو مثالیں دیجیے جہاں احاطہ بڑھنے سے رقبہ بھی بڑھے۔

3۔ ایسی دو مثالیں دیجیے جہاں احاطہ بڑھنے سے رقبہ نہ بڑھے۔

مثال 1 ایک دروازے کا فریم جس کی ابعاد 3 میٹر × 2 میٹر ہیں۔ ایک دیوار جس کی ابعاد 10 میٹر × 10 میٹر ہیں۔ دیوار کی کل رنگائی اور پتائی کی کل اجرت معلوم کیجیے جب کہ پتائی کی اجرت 2.50 روپے فی مربع میٹر ہو۔



شکل 11.4

حل دیوار کی پتائی دروازے کو چھوڑ کر ہونی ہے۔

دروازے کا رقبہ = $l\times 2$

= 3×2 مربع میٹر

= 6 مربع میٹر

دروازے سمیت دیوار کا رقبہ = ضلع × ضلع = 10 میٹر × 10 میٹر = 100 مربع میٹر۔

دروازے کو چھوڑ کر دیوار کا رقبہ = (6 – 100) مربع میٹر = 94 مربع میٹر

دیوار کی پتائی کی کل اجرت = ₹2.50 × 94 = ₹235

مثال 2 مستطیل نما کاغذ کا رقبہ 500 مربع سنٹی میٹر ہے۔ اگر کاغذ کی لمبائی 25 سنٹی میٹر ہے تو اس کی چوڑائی کیا ہوگی؟ مستطیل نما کاغذ کا احاطہ بھی معلوم کیجیے۔

حل مستطیل نما کاغذ کا رقبہ = 500 مربع سینٹی میٹر

لمبائی = 23 سنٹی میٹر

مستطیل کا رقبہ = $l \times b$ (جہاں b = مستطیل کی چوڑائی)

اس لیے، چوڑائی b = $\frac{}{l}$ = $\frac{500}{25}$ = 20 سینٹی میٹر

کاغذ کا احاطہ = $2 \times (l+b) = 2 \times (25+20)$ سینٹی میٹر = 90 سینٹی میٹر

اس لیے، مستطیل نما کاغذ کی چوڑائی 20 سینٹی میٹر اور احاطہ 90 سینٹی میٹر ہے۔

شکل 11.5

مثال 3 انو اپنے گھر کے سامنے کے باغیچے کی باڑھ لگانا چاہتی ہے۔ (شکل 11.5) جس کی تین اضلاع کی لمبائی 20 میٹر، 12 میٹر اور 12 میٹر ہے۔ 150 روپے فی میٹر کے حساب سے باڑھ کی لاگت معلوم کیجیے۔

حل باڑھ کی مطلوبہ لمبائی باغیچہ کا احاطہ ہی ہے۔ (ایک ضلع چھوڑ کر) جو کہ برابر ہے 20 میٹر + 12 میٹر + 12 میٹر یعنی 44 میٹر۔

باڑھ کی قیمت = ₹150 × 44 = ₹6,600

مثال 4 ایک تار ایک مربع کی شکل میں ہے، جس کے ضلع کی لمبائی 10 میٹر ہے۔ اگر اس تار کی مدد سے ایک مستطیل بنایا جائے جس کی لمبائی 12 سینٹی میٹر ہو تو اس مستطیل کی چوڑائی معلوم کیجیے۔ کس کا رقبہ زیادہ ہوگا، مربع یا مستطیل کا؟

حل مربع کا ضلع = 10 سینٹی میٹر

تار کی لمبائی = مربع کا احاطہ = 4 × ضلع = 4 × 10 میٹر = 40 میٹر

مستطیل کی لمبائی، l = 12 سینٹی میٹر۔ مان لیجیے مستطیل کی چوڑائی b ہے

مستطیل کا احاطہ = تار کی لمبائی = 40 سینٹی میٹر

مستطیل کا احاطہ = $2(12+b)$

یا $12+b = \frac{40}{2}$

اس لیے $b = 20-12 = 8$ سینٹی میٹر

مربع کا رقبہ = (ضلع) × (ضلع)

= 10 سینٹی میٹر × 10 سینٹی میٹر

= 100 مربع سینٹی میٹر

مستطیل کا رقبہ = $l \times b$

= 12 سینٹی میٹر × 8 سینٹی میٹر

= 96 مربع سینٹی میٹر

اس لیے، مربع زیادہ رقبہ گھیر رہا ہے جب کہ اس کا احاطہ مستطیل کے احاطہ کے برابر ہے۔

مثال 5 مربع اور مستطیل کا رقبہ برابر ہے۔ اگر مربع کا ضلع 40 سینٹی میٹر اور مستطیل کی چوڑائی 25 سینٹی میٹر ہے تو مستطیل کی لمبائی معلوم کیجیے۔ مستطیل کا احاطہ بھی معلوم کیجیے۔

حل مربع کا رقبہ = ضلع × ضلع

= 40 سینٹی میٹر × 40 سینٹی میٹر

= 1600 مربع سینٹی میٹر

یہ دیا گیا ہے کہ،

مستطیل کا رقبہ = مربع کا رقبہ

مستطیل کا رقبہ = 1600 مربع سینٹی میٹر

مستطیل کی چوڑائی = 25 سینٹی میٹر

مستطیل کا رقبہ = $l \times b$

یا $1600 = l \times b$

یا $1600 = l \times 25$

یا $l = \frac{1600}{25} = 64$ سینٹی میٹر

اس لیے، مستطیل کی لمبائی 64 سینٹی میٹر ہے۔

مستطیل کا احاطہ = $2(l + b) = 2(64 + 25)$ سینٹی میٹر

= 2×89 سینٹی میٹر = 178 سینٹی میٹر

اس لیے، مستطیل کا احاطہ 178 سینٹی میٹر ہے حالانکہ اس کا رقبہ مربع کے رقبہ کے برابر ہے۔

مشق 11.1

1۔ ایک مستطیل نما زمین کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 500 میٹر اور 300 میٹر ہے۔ معلوم کیجیے

(i) اس کا رقبہ (ii) زمین کی قیمت، اگر 1 مربع میٹر زمین کی قیمت 10,000 روپے ہے۔

2۔ ایک مربع نما پارک کا رقبہ معلوم کیجیے جس کا احاطہ 320 میٹر ہے۔

3۔ ایک مستطیل نما زمین کے پلاٹ کی چوڑائی معلوم کیجیے اگر اس کا رقبہ 440 مربع میٹر اور لمبائی 22 میٹر ہو۔ اس کا احاطہ بھی معلوم کیجیے۔

4۔ ایک مستطیل نما کاغذ کا احاطہ 100 سینٹی میٹر ہے۔ اگر اس کی لمبائی 35 سینٹی میٹر ہے تو اس کی چوڑائی معلوم کیجیے۔ اس کا رقبہ بھی نکالیے۔

5۔ ایک مربع نما پارک کا رقبہ مستطیل نما پارک کے برابر ہے۔ اگر مربع نما پارک کے ضلع 60 میٹر لمبا ہے اور مستطیل نما پارک کی لمبائی 90 میٹر ہے تو مستطیل نما پارک کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

6۔ ایک تار مستطیل نما ہے جس کی لمبائی 40 سینٹی میٹر اور چوڑائی 22 سینٹی میٹر ہے۔ اگر اسی تار سے ایک مربع بنایا جائے تو اس کے ہر ضلع کی پیمائش کیا ہوگی؟ یہ بھی معلوم کیجیے کہ کون سی شکل زیادہ جگہ گھیرتی ہے۔

7۔ ایک مستطیل کا احاطہ 130 سنٹی میٹر ہے۔ ایک مستطیل کی چوڑائی 30 سنٹی میٹر ہے تو اس کی لمبائی معلوم کیجیے۔ مستطیل کا رقبہ بھی نکالیے۔

شکل 11.6

8۔ ایک دیوار میں ایک دروازہ لگایا گیا جس کی لمبائی 2 میٹر اور چوڑائی 1 میٹر ہے۔ دیوار کی لمبائی 4.5 میٹر ہے اور چوڑائی 3.6 میٹر ہے۔ (شکل 11.6) دیوار کی پتائی کا خرچہ معلوم کیجیے اگر دیوار کی سفیدی کا خرچہ 20₹ فی مربع میٹر ہو۔

11.2.1 مثلث، مستطیل کے حصے کی طرح (Triangles as Parts of Rectangles)

ایک مستطیل لیجیے جس کے اضلاع 8 سینٹی میٹر اور 5 سینٹی میٹر ہوں۔ اس مستطیل کو اس کے وتر کے ذریعے کاٹیے تا کہ آپ کو دو مثلث ملیں۔ (شکل 11.7)

ایک مثلث کو دوسرے پر منطبق کیجیے۔ کیا دونوں کا سائز بالکل ایک ہی ہے؟ کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ دونوں مثلثوں کا رقبہ برابر ہے؟

کیا دونوں مثلث مماثل ہیں؟

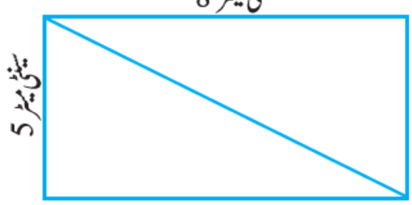
ان مثلثوں میں سے ہر ایک کا رقبہ بتائیے؟

آپ دیکھیں گے کہ دونوں مثلثوں کے رقبوں کا جوڑ مستطیل کے رقبہ کے برابر ہوتا ہے۔ دونوں مثلثوں کا رقبہ برابر ہے۔

ہر مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × (مستطیل کا رقبہ)

$= \frac{1}{2}\times(l\times b)$ $\quad = \frac{1}{2}\times(8\times 5)$

$= \frac{40}{2}$ $\quad$ = 20 مربع سنٹی میٹر



شکل 11.7

ایک مربع لیجیے جس کا ایک ضلع 5 سینٹی میٹر ہو، اور اس کو (شکل 11.8) میں دکھائے گئے طریقے سے 4 مثلث میں بانٹیے۔ کیا یہ چاروں مثلث رقبہ میں برابر ہیں؟ کیا یہ ایک دوسرے کے مماثل ہیں؟ (جانچنے کے لیے مثلثوں کو ایک دوسرے پر منطبق کیجیے)

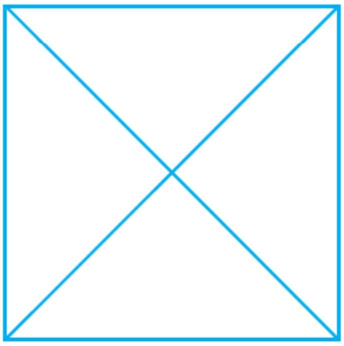
ہر مثلث کا رقبہ کیا ہے؟

ہر مثلث کا رقبہ $= \frac{1}{4}$ (مربع کا رقبہ)

$= \frac{1}{4}$ (ضلع × ضلع)

$= \frac{1}{4}\ (5\times5)$ مربع سنٹی میٹر

$= 6.25$ مربع سنٹی میٹر



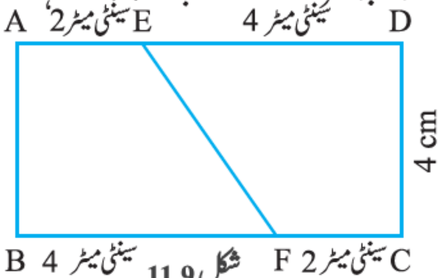
شکل 11.8

11.2.2 مستطیل کے دوسرے مماثل حصوں کی تقسیم کرنا

شکل (11.9) میں دکھائے گئے طریقے سے ایک مستطیل جس کی لمبائی 6 سینٹی میٹر اور چوڑائی 4 سینٹی میٹر ہے، کو دو حصوں میں بانٹیے۔ اس مستطیل کو چھاپ کر اس کی نقل دوسرے کاغذ پر بنائیے اور پھر اس مستطیل کو EF پر سے کاٹ لیجیے جو کہ اس کو دو حصوں میں بانٹ دے گا۔

ایک حصے کو دوسرے پر منطبق کیجیے، دیکھیے کیا وہ ایک دوسرے سے میل کھا رہے ہیں (آپ کو انھیں گھمانا ہے)

کیا یہ مماثل ہیں؟ دونوں حصے ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔ اس لیے ایک حصہ کا رقبہ دوسرے حصے کے رقبے کے برابر ہوتا ہے۔



شکل 11.9

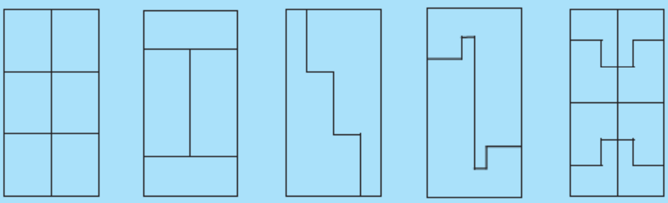
اس لیے، ہر مماثل حصہ کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ (مستطیل کا احاطہ)

$= \frac{1}{2}\times(6\times4)$ مربع سینٹی میٹر

$= 12$ مربع سینٹی میٹر

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل مستطیلوں میں ہر ایک کی لمبائی 6 سینٹی میٹر اور چوڑائی 4 سینٹی میٹر ہے اور یہ مماثل کثیر ضلعی سے بنائے گئے ہیں۔ ہر کثیر ضلعی کا رقبہ بتائیے۔



11.3 متوازی الاضلاع کا رقبہ (Area of Parallelogram)

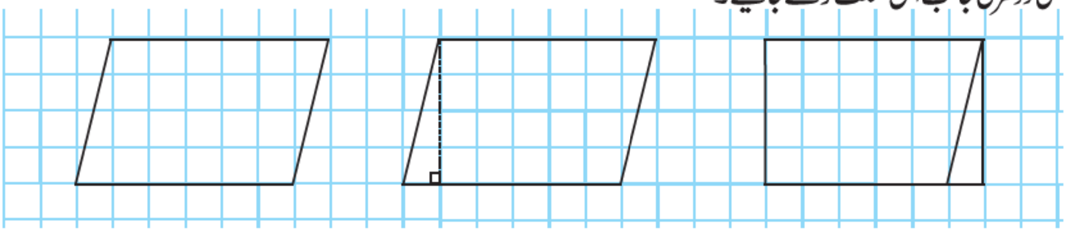
مربع اور مستطیل کے علاوہ بھی ہم بہت سی اشکال دیکھتے ہیں۔

ایک ایسے زمین کے ٹکڑے کا رقبہ آپ کیسے نکالیں گے جس کی شکل متوازی الاضلاع ہو؟

آ ئیے متوازی الاضلاع کا رقبہ نکالنے کا ایک طریقہ معلوم کرتے ہیں۔

کیا ایک متوازی الاضلاع کو ایک ایسے مستطیل میں بدل سکتے ہیں جس کا رقبہ متوازی الاضلاع کے رقبہ کے برابر ہو؟

گراف پیپر پر ایک متوازی الاضلاع بنائیے جیسا کہ تصویر (i)11.10 میں دکھایا گیا ہے۔ متوازی الاضلاع کو کاٹ لیجیے۔ متوازی الاضلاع کے ایک راس سے اس کے متقابل ضلع پر ایک عمودی خط کھینچیے (شکل (ii)11.10)۔ مثلث کو کاٹیے، متوازی الاضلاع کی دوسری جانب اس مثلث کو لے جائیے۔



(i) (ii) (iii)

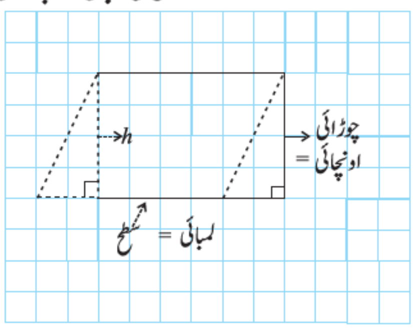
شکل 11.10

آپ کو کون سی شکل ملی؟..............................

کیا متوازی الاضلاع کا رقبہ مستطیل کے رقبہ کے برابر ہوگا؟

ہاں، متوازی الاضلاع کا رقبہ = بنے ہوئے مستطیل کا رقبہ

مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کیا ہے؟



شکل 11.11

ہم نے معلوم کیا کہ اس مستطیل کی لمبائی متوازی الاضلاع کے قاعدہ کے برابر ہے اور مستطیل کی چوڑائی متوازی الاضلاع کی اونچائی کے برابر ہے۔ (شکل 11.11)

اب، متوازی الاضلاع کا رقبہ = مستطیل کا رقبہ

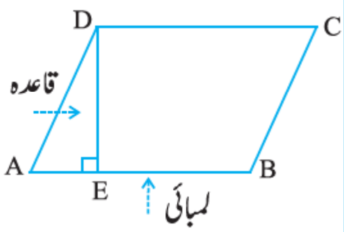
= لمبائی × چوڑائی

$= l \times b$

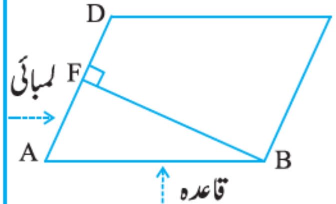
لیکن مستطیل کی لمبائی l اور اونچائی b کے برابر ہیں۔

اس لیے، متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ × اونچائی $= b \times h$

متوازی الاضلاع کا کوئی بھی ضلع قاعدہ (base) کے طور پر چنا جا سکتا ہے۔ اس ضلع پر متقابل راس سے کھینچا جانے والا عمود اس کی اونچائی (altitude, height) کہلاتا ہے۔

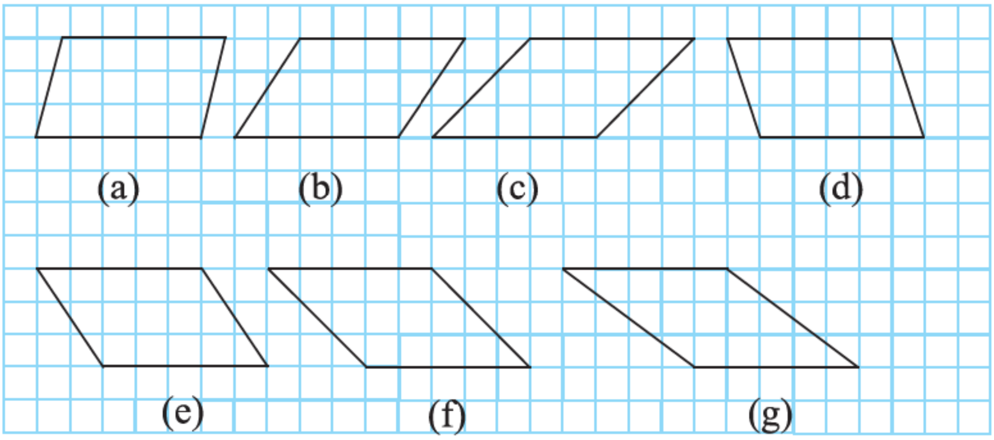


متوازی الاضلاع ABCD میں DE، AB پر عمود ہے۔ یہاں AB قاعدہ ہے اور DE متوازی الاضلاع کی اونچائی ہے۔



اس متوازی الاضلاع ABCD میں BF، متقابل ضلع AD پر عمود ہے۔ یہاں AD قاعدہ اور BF اونچائی ہے۔

مندرجہ ذیل متوازی الاضلاع پر دھیان دیجیے (شکل 11.12)



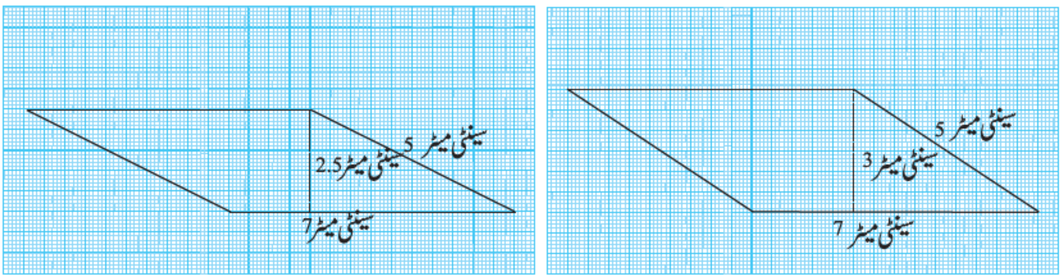
شکل 11.12

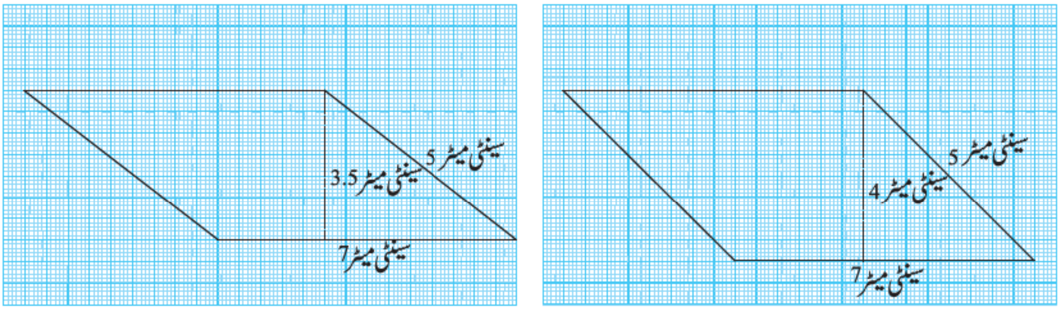
شکل میں گھیرے گئے مربعوں کو گن کر متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے اور اضلاع کو ناپ کر احاطہ معلوم کیجیے۔

مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجیے

متوازی الاضلاع	قاعدہ	اونچائی	رقبہ	احاطہ
(a)	5 اکائی	3 اکائی	مربع اکائی $5 \times 3 = 15$	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

آپ نے معلوم کیا کہ ان تمام متوازی اضلاع کے رقبے برابر ہیں مگر ان کے احاطے مختلف ہیں۔ اب مندرجہ ذیل متوازی الاضلاع کو دیکھیے جس کے اضلاع 7 سینٹی میٹر اور 5 سینٹی میٹر ہیں۔ (شکل 11.13)



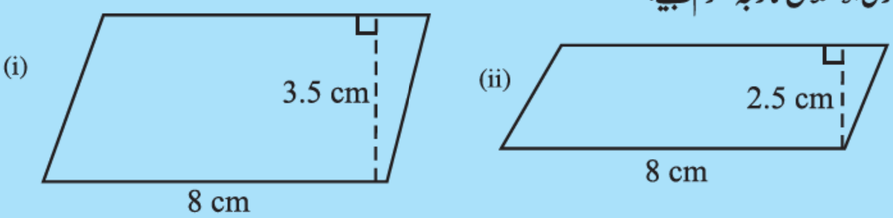


شکل 11.13

ان سبھی متوازی الاضلاع کا رقبہ اور احاطہ معلوم کیجیے۔ اپنے نتائج کا تجزیہ کیجیے۔
آپ جان پائیں گے کہ ان متوازی الاضلاع کے رقبے تو مختلف ہیں لیکن ان کے احاطے برابر ہیں۔
متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے آپ کو قاعدہ اور اس کی متناظر اونچائی معلوم ہونی چاہیے۔

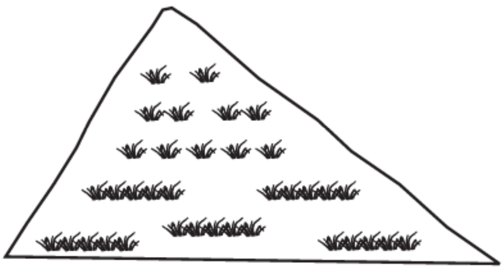
کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے:



(iii) متوازی اضلاع ABCD میں AB = 7.2 سینٹی میٹر اور C سے AB پر کھینچا گیا عمود 4.5 سینٹی میٹر ہے۔

11.4 مثلث کا رقبہ



ایک مالی یہ جاننا چاہتا ہے کہ مثلث نما باغیچہ میں گھاس لگانے کا کتنا خرچہ ہوگا۔
اس صورت حال میں ہم کو مثلث نما خطہ کے رقبہ کی ضرورت ہے۔
آیئے ایک مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا طریقہ معلوم کرتے ہیں۔

ایک کاغذ پر مختلف الاضلاع مثلث بنائیے۔ مثلث کو کاٹیے۔ اس مثلث کو ایک دوسرے کاغذ پر رکھیے اور اسی سائز کا ایک دوسرا مثلث بنائیے۔

اب آپ کے پاس ایک ہی سائز کے دو مختلف الاضلاع مثلث ہیں۔ کیا یہ دونوں مثلث مماثل ہیں؟ ایک مثلث کو دوسرے پر منطبق کیجیے تا کہ وہ ایک دوسرے سے میل کریں۔ آپ ان دونوں میں سے کسی ایک مثلث کو گھما بھی سکتے ہیں۔

اب ان دونوں مثلثوں کو اس طرح رکھیے کہ متناظر اضلاع کا ایک جوڑ مل جائے۔ (جیسا کہ شکل 11.14 میں دکھایا گیا ہے)

کیا اب بننے والی شکل متوازی الاضلاع کی ہے؟

مثلث کے قاعدہ اور اونچائی کا متوازی الاضلاع کے قاعدہ اور اونچائی سے موازنہ کیجیے۔

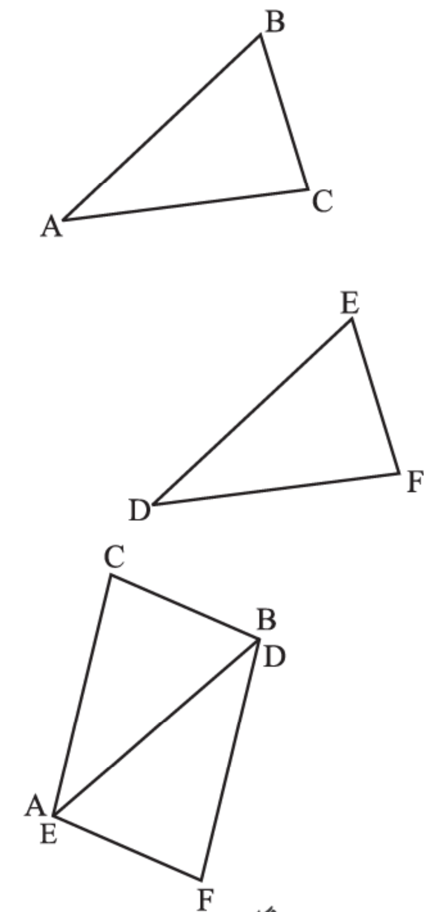
آپ پائیں گے کہ دونوں مثلثوں کے رقبوں کا جوڑ متوازی الاضلاع کے رقبے کے برابر ہے۔

مثلث کا قاعدہ اور اونچائی بالترتیب متوازی الاضلاع کے قاعدہ اور اونچائی پر کے برابر بھی ہے۔

ہر مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع کا رقبہ)

= $\frac{1}{2}$ (قاعدہ×اونچائی)، (کیونکہ متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ×اونچائی)

= $\frac{1}{2}(b \times h)$ (یا $\frac{1}{2}bh$، چھوٹا کر کے)



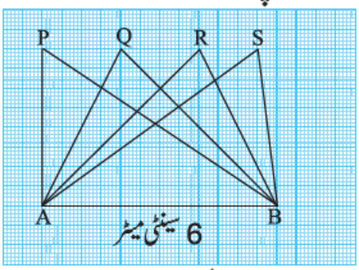
شکل 11.14

کوشش کیجیے:

1۔ اوپر دی گئی سرگرمی کو مختلف قسم کے مثلثوں کے ساتھ کرنے کی کوشش کیجیے۔

2۔ مختلف متوازی الاضلاع لیجیے۔ ان میں سے ہر ایک کو اس کے کسی بھی وتر کے سہارے دو مثلثوں میں بانٹیے۔ کیا یہ مثلث مماثل ہے؟

شکل (شکل 11.15) میں تمام مثلث قاعدہ AB=6 سینٹی میٹر پر بنے ہیں۔ آپ ان تمام قاعدہ AB کے متناظر مثلثوں کی اونچائی کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

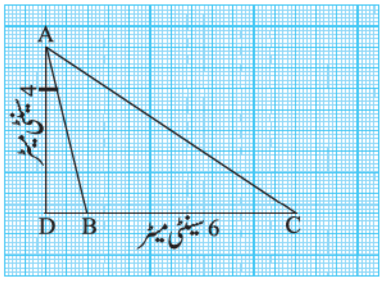


شکل 11.15

کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ تمام مثلثوں کے رقبے برابر ہیں؟ ہاں۔ کیا یہ مثلث مماثل بھی ہیں؟ نہیں۔

ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ تمام مماثل مثلث کے رقبے برابر ہوتے ہیں مگر تمام ایسے مماثل جن کے رقبے برابر ہوتے ہیں ضروری نہیں ہے کہ یہ مماثل بھی ہوں۔

منفرجہ زاوی مثلث ABC جس کا قاعدہ 6 سینٹی میٹر ہے پر، دھیان دیجیے (شکل 11.16)۔ اس کی اونچائی

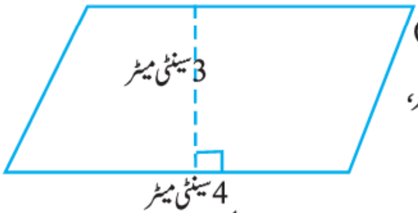


شکل 11.16

AD، جو کہ راس A سے عمود ہے، مثلث کے برابر ہے۔

کیا آپ مثلث کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں؟

مثال 6: ایک متوازی الاضلاع کا کوئی ایک ضلع اور اس کے متناظر اونچائی بالترتیب 4 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر ہے۔ متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے۔ (شکل 11.17)



شکل 11.17

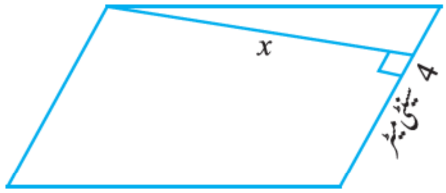
حل دیا گیا ہے کہ قاعدہ (b) کی لمبائی = 4 سنٹی میٹر،

اونچائی (h) = 3 سنٹی میٹر

متوازی الاضلاع کا رقبہ = b×h

= 3 سنٹی میٹر × 4 سنٹی میٹر = 12 مربع سنٹی میٹر

مثال 7 اگر متوازی الاضلاع کا رقبہ 24 سنٹی میٹر مربع اور قاعدہ کی لمبائی 4 سنٹی میٹر ہے تو اس کی اونچائی 'x' معلوم کیجیے۔



شکل 11.18

حل: متوازی الاضلاع کا رقبہ = $b \times h$

اس لیے، $24 = 4 \times x$ (شکل 11.18)

یا $\frac{24}{4} = x$ یا $x = 6$ سینٹی میٹر

اس لیے، متوازی الاضلاع کی اونچائی 6 سینٹی میٹر۔

مثال 8 ایک متوازی اضلاع ABCD کے دو اضلاع 6 سینٹی میٹر اور 4 سینٹی میٹر ہیں۔ قاعدہ CD کی متناظر اونچائی 3 سینٹی میٹر ہے۔ (شکل 11.19) معلوم کیجیے۔

(i) متوازی الاضلاع کا رقبہ (ii) قاعدہ AD کی متناظر اونچائی

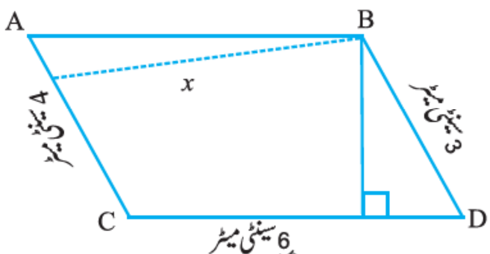
حل (i) متوازی الاضلاع کا رقبہ = b × h

= 3 سینٹی میٹر × 6 سینٹی میٹر

= 18 سینٹی میٹر مربع

(ii) قاعدہ 4=(b) سینٹی میٹر، اونچائی = x (جیسے)

رقبہ = 18 سینٹی میٹر مربع



شکل 11.19

متوازی الاضلاع کا رقبہ = $b \times x$

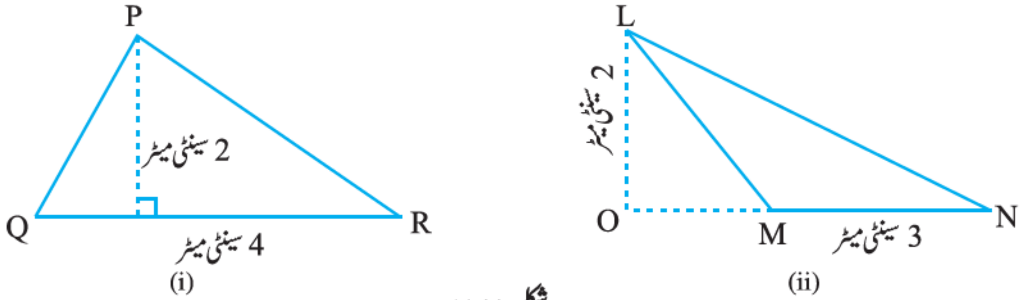
$18 = 4 \times x$

$\frac{18}{4} = x$

اس لیے، $x = 4.5$ سنٹی میٹر

لہٰذا، قاعدہ AD کی متناظر اونچائی 4.5 سنٹی میٹر ہے۔

مثال 9 مندرجہ ذیل مثلثوں کا رقبہ معلوم کیجیے (شکل 11.20)



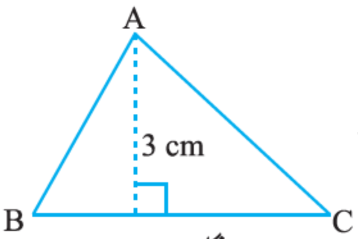
شکل 11.20

حل (i) مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}bh$ = $\frac{1}{2} \times QR \times PS$

= $\frac{1}{2} \times 4$ سینٹی میٹر × 2 سینٹی میٹر = 4 سینٹی میٹر مربع

(ii) مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}bh$ = $\frac{1}{2} \times MN \times LO$

= $\frac{1}{2} \times 3$ سینٹی میٹر × 2 سینٹی میٹر = 3 سینٹی میٹر مربع



شکل 11.21

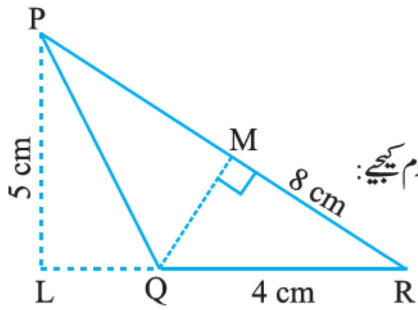
مثال 10 اگر مثلث ABC کا رقبہ 36 سینٹی میٹر مربع اور اس کی اونچائی AD، 3 سینٹی میٹر ہے تو BC معلوم کیجیے۔

حل اونچائی = 3 سینٹی میٹر، رقبہ = 36 سینٹی میٹر مربع

مثلث ABC کا رقبہ = $\frac{1}{2}bh$

یا $36 = \frac{1}{2} \times b \times 3$، $b = \frac{36 \times 2}{3} = 24$ سینٹی میٹر

اس لیے، BC = 24 سینٹی میٹر



شکل 11.22

مثال 11 ΔPQR میں PR=8 سینٹی میٹر، QR=4 سینٹی میٹر اور PL=5 سینٹی میٹر (شکل 11.22) معلوم کیجیے:

(i) ΔPQR کا رقبہ (ii) QM

حل

(i) QR = قاعدہ = 4 سینٹی میٹر، PL = اونچائی = 5 سینٹی میٹر

مثلث PQR کا رقبہ = $\frac{1}{2}bh$

= $\frac{1}{2} \times 4$ سینٹی میٹر × 5 سینٹی میٹر = 10 سینٹی میٹر مربع

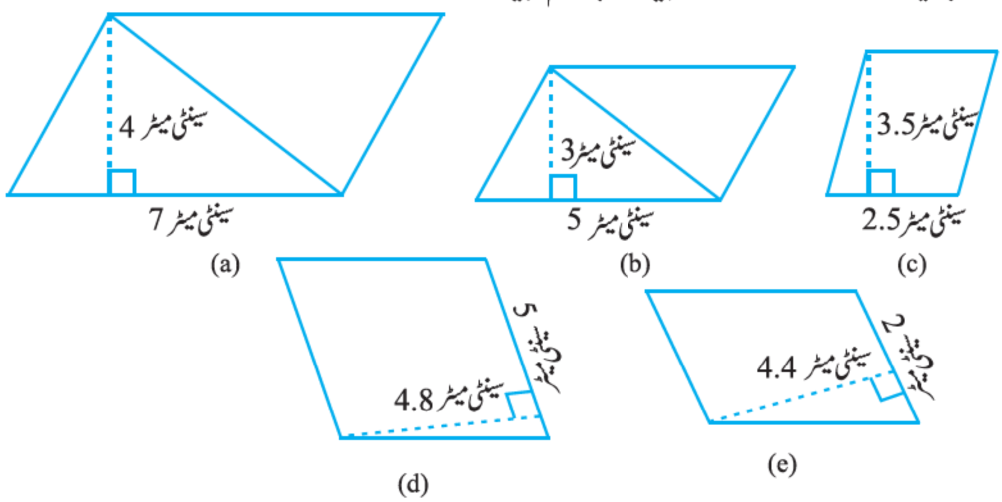
(ii) PR= قاعدہ= 8 سینٹی میٹر　　QM= اونچائی =؟　　رقبہ = 10 سینٹی میٹر مربع

مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2} \times b \times h$　　یعنی　　$10 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$

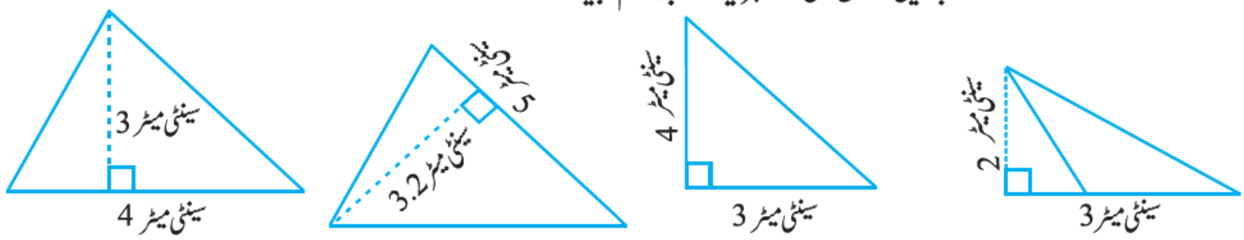
$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$　　اس لیے، QM=2.5 سینٹی میٹر

مشق 11.2

1۔ مندرجہ ذیل متوازی الاضلاع میں سے ہر ایک کا رقبہ معلوم کیجیے:



2۔ مندرجہ ذیل مثلثوں میں سے ہر ایک کا رقبہ معلوم کیجیے:



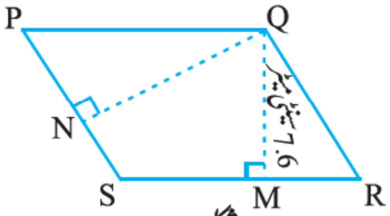
(a)　(b)　(c)　(d)

3۔ چھوٹ گئی قیمتیں لکھیے:

نمبر شمار	قاعدہ	اونچائی	متوازی الاضلاع کا رقبہ
a.	20 سینٹی میٹر		246 سینٹی میٹر مربع
b.		15 سینٹی میٹر	154.5 سینٹی میٹر مربع
c.		8.4 سینٹی میٹر	48.72 سینٹی میٹر مربع
d.	15.6 سینٹی میٹر		16.38 سینٹی میٹر مربع

4۔ چھوٹ گئی قیمتیں لکھیے:

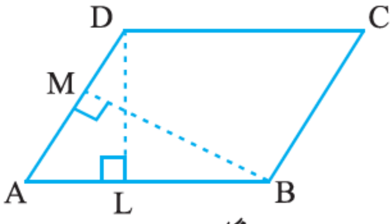
قاعدہ	اونچائی	مثلث کا رقبہ
15 سینٹی میٹر		87 سینٹی میٹر مربع
	31.4 ملی میٹر	1256 ملی میٹر مربع
22 سینٹی میٹر		170.5 سینٹی میٹر مربع



شکل 11.23

5۔ PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے (تصویر 11.23)۔ QM، Q سے پر کھینچی گئی اونچائی اور Q,QN سے PS پر کھینچی گئی اونچائی ہے۔ اگر SR=12 سم ہے اور QM=7.6 سم تو معلوم کیجیے۔

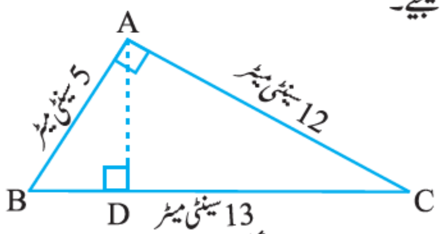
(a) PQRS متوازی الاضلاع کا رقبہ (b) QN، اگر PS=B سم



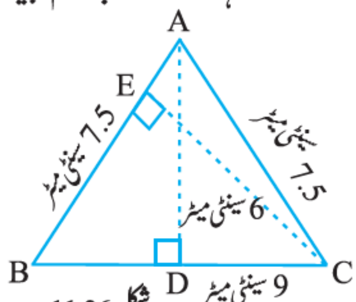
شکل 11.24

6۔ متوازی الاضلاع ABCD میں DL اور BM بالترتیب ضلع AB اور AD پر کھینچی جانے والے اونچائیاں۔ اگر متوازی الاضلاع کا رقبہ $1470 cm^2$ ہے۔ اور AB = 35 cm، AD=49c m ہے تو BM اور DL کی لمبائی معلوم کیجیے۔

7۔ ΔABC ایک قاعد زاوی مثلث ہے۔ جس کا زاویہ قائمہ A پر ہے۔ BC,AP پر عمود ہے۔ اگر AB=5cm، BC=13cm اور AC=12cm ہے ΔABC کا رقبہ معلوم کیجیے۔ AD کی لمبائی بھی معلوم کیجیے۔



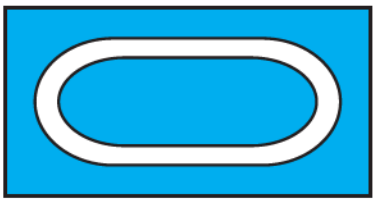
شکل 11.25



شکل 11.26

8۔ DABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ جس کی AB=AC=7.5cm اور BC=4 cm (تصویر 11.26)۔ BC پر A سے بننے والی اونچائی AD، 6cm ہے۔ ΔABC کا رقبہ بتائیے۔ AB پر C سے بننے والی اونچائی یعنی CF کیا ہوگی؟

11.5 دائرے (Circles)



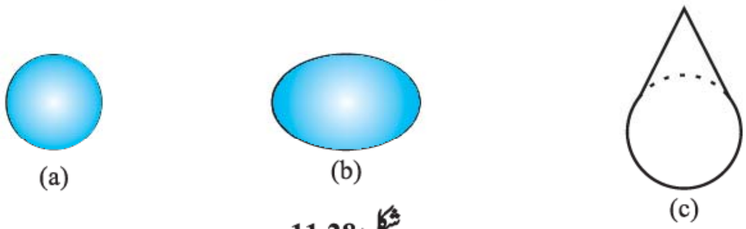
شکل 11.27

اگر کوئی ایتھلیٹ دوڑ کے نصف دائری ٹریک کے دو چکر کاٹتا ہے تو (شکل 11.27) کیا اس کے ذریعے طے کیا گیا فاصلہ بتا سکتے ہیں؟ ہم کو ایک ایسا طریقہ معلوم کرنے کی ضرورت ہے جو ایسی شکل کے چاروں طرف کے فاصلے بتا سکے جو گول ہو۔

11.5.1 دائرہ کا محیط (Circumference of a Circle)

تاینہ نے ایک گول گننے میں سے مختلف ایسے کارڈ کاٹے جن کی شکل منحنی ہے۔ وہ ان کو سجانے کے لیے ان کے چاروں طرف بیل لگانا

چاہتی ہے۔ ہر ایک کے لیے اس کو کتنی لمبی بیل چاہیے ہوگی۔ (تصویر 11.28)



شکل 11.28

شکل 11.29

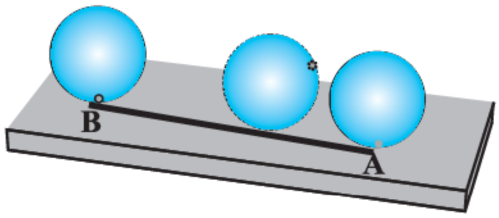
آپ اسکیل کی مدد سے منحنی کو نہیں ناپ سکتے ہیں کیونکہ اشکال، سیدھی نہیں ہیں۔ اب آپ کیا کریں گے؟ ایک طریقہ ہے جس کی مدد سے تصویر (a)11.28 میں دکھائی گئی ظاہریت کے لیے بیل کی لمبائی آپ معلوم کرسکتے ہیں۔ کارڈ کے کنارے پر ایک نشان لگائیے اور کارڈ کو میز پر رکھ دیجیے۔ نقطہ کی مقام کا نشان میز پر بھی لگائیے۔

اب اس گول کارڈ کو میز پر ایک سیدھے خط پر اس طرح گھمائیے کہ وہ اس نشان سے شروع ہو کر دوبارہ اسی نشان پر آ جائے۔

خط کے فاصلہ کو ناپیے۔ یہ بیل کی مطلوبہ لمبائی ہوگی۔ یہ ہی وہ فاصلہ بھی ہے جو کارڈ کے کنارے پر لگے نشان سے شروع ہو کر واپس اسی نشان تک کا ہے۔

آپ اس فاصلے کو ایک ڈوری کو گول چیز کے کنارے کنارے رکھ کر بھی معلوم کرسکتے ہیں۔

کسی گول خطہ کے چاروں طرف کا فاصلہ اس کا محیط (circumference) کہلاتا ہے۔



شکل 11.30

اسے کیجیے

بوتل کا ایک ڈھکن، چوڑی یا کوئی بھی ایک گول چیز لیجیے۔ اور اس کا محیط معلوم کیجیے۔ کیا آپ اس سے ایتھلیٹ کے ذریعے ٹریک پر طے کیا گیا فاصلہ معلوم کرسکتے ہیں؟

ابھی بھی یہ ایک بہت مشکل کام ہے کہ آپ ٹریک یا کسی دوسری گول چیز کے چاروں طرف کے فاصلے کو کسی ڈوری کی مدد سے ناپیں۔ اسی کے ساتھ اس طرح کی پیمائش بالکل درست بھی نہیں ہوگی۔ اس لیے ہم کو اس کے لیے ایک فارمولے کی ضرورت ہوگی۔ جیسا کہ ہمارے پاس مستقیم الاضلاع اشکال کے لیے ہیں۔

آیئے اب ہم دیکھتے ہیں کہ دائرہ کے قطر اور محیط میں کوئی تعلق ہے یا نہیں۔

مندرجہ ذیل جدول کو دیکھیے۔ مختلف نصف قطر کے چھ دائرے بنائیے، ڈوری کی مدد سے ان محیط معلوم کیجیے اور محیط کی نسبت معلوم کیجیے۔

دائرہ	نصف قطر	قطر	محیط	محیط اور قطر کی نسبت
1۔	3.5cm	7.0cm	22.0cm	$\frac{22}{7} = 3.14$

2۔	7.0 سینٹی میٹر	14.0 سینٹی میٹر	44.0 سینٹی میٹر	$\frac{44}{14} = 3.14$
3۔	10.5 سینٹی میٹر	21.0 سینٹی میٹر	66.0 سینٹی میٹر	$\frac{66}{21} = 3.14$
4۔	21.0 سینٹی میٹر	42.0 سینٹی میٹر	132.0 سینٹی میٹر	$\frac{132}{42} = 3.14$
5۔	5.0 سینٹی میٹر	10.0 سینٹی میٹر	32.0 سینٹی میٹر	$\frac{32}{10} = 3.2$
6۔	15.0 سینٹی میٹر	30.0 سینٹی میٹر	94.0 سینٹی میٹر	$\frac{94}{30} = 3.13$

اوپر دیے گئے جدول سے آپ نے کیا نتیجہ اخذ کیا؟ کیا یہ نسبت تقریباً برابر ہے؟ ہاں

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ کسی دائرہ کا محیط ہمیشہ اس کے قطر کے تین گنے کے برابر ہوتا ہے؟ ہاں

یہ نسبت طے شدہ (Constant) ہے اور اس کو π (pi) سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کی قیمت تقریباً $\frac{22}{7}$ یا 3.14 ہے۔

اس لیے، ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\pi = \frac{c}{q}$ جہاں 'C' دائرہ کا محیط اور d اس کا قطر ہے۔

یا $c = \pi d$

ہم جانتے ہیں کہ کسی دائرہ کا قطر (d) اس کے نصف قطر (r) کا دوگنا ہوتا ہے یعنی

d=2r اس لیے $C=\pi d=\pi \times 2r$

$C=2\pi r$

کوشش کیجیے:

شکل 11.31

شکل 11.31 میں

(a) کون سے مربع کا احاطہ زیادہ ہوگا؟

(b) کیا زیادہ ہے، چھوٹے مربع کا احاطہ یا دائرہ محیط؟

اسے کیجیے

ایک چھوٹی اور ایک بڑی پلیٹ لیجیے۔ دونوں کو ایک ایک بار میز کی سطح پر گھمائیے۔ (roll) ایک مکمل چکر میں کون سی پلیٹ زیادہ فاصلہ طے کرتی ہے؟ میز کی سطح کی لمبائی کو پورا کرنے کے لیے کس کے چکروں کی تعداد کم ہوگی؟

مثال 12 10 سم قطر کے دائرہ کا محیط کیا ہوگا۔ (π=3.14 لیجیے)

حل دائرہ قطر (d)=10 سم

دائرہ کا محیط $= \pi d$

$= 10 \times 3.14$ سم

$= 31.4$ سم

اس لیے 10 سم قطر کے دائرے کا محیط 31.4 سم ہے۔

مثال 13 14cm نصف قطر کی گول ڈسک کا محیط کیا ہے؟

($\pi = \frac{22}{7}$ استعمال کیجیے)

حل گول ڈسک کا نصف قطر (r) = 14 سم

ڈسک کا محیط $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$ سم

$= 88$ سم

اس لیے گول ڈسک کا محیط 88 سم ہے۔

مثال 14 ایک گول پائپ 10 سم ہے۔ اس پائپ کے چاروں طرف ایک بار ٹیپ لگانے میں کتنا پائپ چاہیے ہوگا۔ ($\pi = 3.14$)؟

حل پائپ کا نصف (r) = 10

ٹیپ کی لمبائی پائپ کے محیط کے برابر ہوگی۔

پائپ کا محیط $= 2\pi r$

$= 2 \times 3.14 + 10$ سم

$= 62.8$ سم

اس لیے، پائپ کے چاروں طرف ایک بار ٹیپ لگانے کے لیے 62.8 سم لمبا ٹیپ چاہیے۔

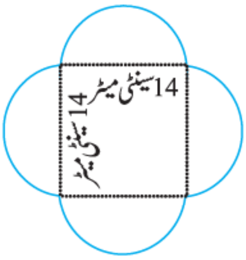
مثال 15 دی گئی شکل کا احاطہ بتائیے (شکل 11.32) ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

حل اس شکل میں مربع کے ہر ضلع پر بنے نصف دائرہ کا محیط معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔ کیا آپ کو مربع کا احاطہ نکالنے کی بھی ضرورت ہے؟ نہیں۔ اس شکل کی باہری باؤنڈری نصف دائروں سے ہی بنی ہوئی ہے۔ ہر نصف دائرہ کا قطر 14 سم ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ

دائرہ کا محیط $= \pi d$

نصف دائرے کا محیط $= \frac{1}{2}\pi d$



شکل 11.32

$14 \times \frac{22}{2} \times \frac{1}{2}$ سم

=22 سم

ہر نصف دائرہ کا محیط 22 سم ہے۔

اس لیے دی گئی شکل کا احاطہ = 4×22 سم = 88 سم

مثال 16 سود دھا کشن نے 7 سم نصف قطر کی ایک گول ڈسک کو دو برابر حصوں میں بانٹا۔ ہر نصف گول ڈسک کا احاطہ کیا ہوگا؟

($\pi = \frac{22}{2}$ لیجیے)

حل نصف گول ڈسک (شکل 11.33) کا احاطہ معلوم کرنے کے لیے ہم مندرجہ ذیل چیزیں معلوم کرنے کی ضرورت ہوگی۔

(i) نصف گول شکل کا محیط (ii) قطر

دیا گیا نصف قطر (r)=7 سم۔ ہم جانتے ہیں کہ دائرہ کا محیط اس لیے نصف دائرہ کا πr

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$

$= \frac{22}{7} \times 7 = 22$ سم

شکل 11.33

اس لیے، دائرہ کا قطر=20=2×7 سم=14 سم

لہٰذا، ہر نصف گول ڈسک کا احاطہ 22 سم+14 سم=36

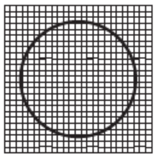
11.5.2 دائرہ کا رقبہ (Area of Circle)

مندرجہ ذیل کو دیکھیے:

- ایک کسان نے کھیت کے مرکز پر 7 میٹر نصف قطر کی ایک گول پھولوں کی کیاری کھودی۔ اس کو کھاد خریدنی ہے۔ اگر 1 کلوگرام کھاد 1 مربع میٹر جگہ کے لیے چاہیے تو کسان کو کتنی کھاد خریدنی ہوگی؟
- 2 میٹر نصف قطر کی گول میٹر کی اوپری سطح پر پالش کرنے کے لیے 10 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے کتنا خرچ آئے گا؟

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ اوپر جیسی صورت حال میں کس چیز کی ضرورت ہے۔ رقبہ یا احاطہ؟ ان صورت حال میں ہمیں گول خطوں کا رقبہ معلوم کرنا ہے۔ آیئے گراف پیپر کا استعمال کر کے دائرہ کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

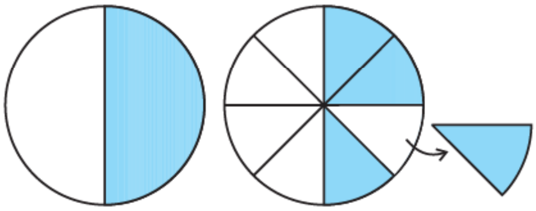
گراف پیپر تک 4a سم نصف قطر کا ایک دائرہ بنایئے۔ (شکل 11.34) دائرہ کے ذریعے گھیرے گئے مربعوں کو گن کر دائرہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔ کیونکہ اس کے کنارے سیدھے نہیں ہیں اس لیے ہم اس طریقے سے دائرہ کے رقبے کا صرف ایک رف اندازہ لگا سکتے ہیں۔



شکل 11.34

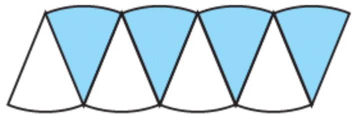
یہاں دائرے کے رقبہ نکالنے کا ایک اور طریقہ ہے۔

ایک دائرہ بنائیے دائرے کے آدھے حصے میں رنگ بھریے (شکل 11.35)۔ اب دائرہ کو آٹھویں حصوں میں بانٹتے ہوئے موڑیے۔ اور فولڈ کئے حصّوں کو کاٹ لیجیے (شکل (ii)11.35)



(i)

شکل 11.35

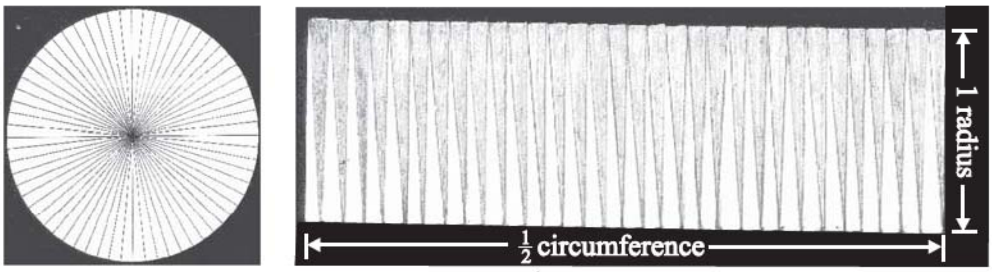


(ii)

شکل 11.36

الگ الگ ہوئے ٹکڑوں کو تصویر 11.36 میں دکھائے گئے طریقے سے ترتیب دیجیے جو کہ ایک رف سا متوازی الاضلاع ہے۔ جتنے زیادہ ہم اس کے ٹکڑے کریں گے اتنے ہی زیادہ ہم مناسب متوازی الاضلاع کے قریب پہنچیں گے۔ (شکل 11.37)

جیسا کہ اوپر کیا گیا ہے اگر ہم دائرہ کو 64 حصوں میں بانٹیں اور ان حصوں کو ترتیب سے لگائیں تو یہ ہمیں تقریباً ایک مستطیل دیتا ہے۔



شکل 11.37

اس مستطیل کی چوڑائی کیا ہے؟ اس مستطیل کی چوڑائی دائرہ کا نصف قطر ہے یعنی 'r'

ہم نے دائرہ کو 64 حصوں میں بانٹا اور ہر ضلع میں اس کے 32 حصے ہیں۔ مستطیل کی لمبائی ان 32 حصوں کی لمبائی ہے، جو کہ محیط کا آدھا ہے۔ (شکل 11.37)

دائرہ کا رقبہ = اب ہے مستطیل کا رقبہ $l \times b$

$$= r \times \left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right)$$

$$= \pi r^2$$

اس لیے اس کا دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2$

کوشش کیجیے:

ایک گراف پیپر پر مختلف نصف قطر کے دائرے بنائیے۔ مربعوں کو گن کر رقبہ معلوم کیجیے۔ فارمولے کا استعمال کر کے بھی رقبہ معلوم کیجیے۔ دونوں جوابات کا موازنہ کیجیے۔

مثال 17 30 سم نصف قطر کے دائرہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔ ($\pi=3.14$ لیجیے)

حل نصف قطر، r=30 سم

دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2{,}826 \text{ cm}^2$ مربع سم

مثال 18 ایک گول باغیچہ کا قطر 9.8 میٹر ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کیجیے

حل قطر d=9.8 میٹر۔ اس لیے، نصف قطر $r = 9.8 \div 2$

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2 \frac{22}{7} \times (4.9)^2 = m^2 = \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \text{ m}^2 = 75.46 \text{ m}^2$ مربع میٹر

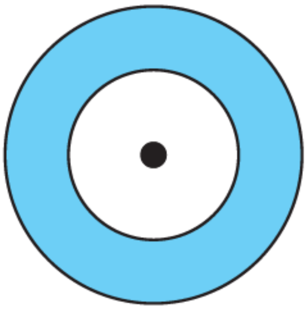
مثال 19 دی گئی شکل میں دو ایسے دائرے دکھائے گئے ہیں جن کا مرکز ایک ہی ہے۔ بڑے دائرے کا نصف قطر 10 سم اور چھوٹے دائرے کا نصف قطر 4 سم ہے۔

معلوم کیجیے۔ (a) بڑے دائرے کا رقبہ

(b) چھوٹے دائرے کا رقبہ

(c) دونوں دائروں کے درمیان کا رنگین حصہ ($\pi=3.14$)

حل



(a) بڑے دائرے کا نصف قطر = 10 سم

اس لیے بڑے دائرے کا رقبہ πr^2

$=3.14 \times 10 \times 10 = 314 \text{ cm}^2$ مربع سم

(b) چھوٹے دائرے کا نصف قطر = 4 سم

چھوٹے دائرے کا رقبہ = πr^2

$=3.14 \times 4 \times 4 = 50.24 \text{ cm}^2$ مربع سم

(c) رنگین خطہ کا رقبہ $=(314-50.24) \text{ cm}^2 = 263.76 \text{ cm}^2$ مربع سم

مشق 11.3

1۔ مندرجہ نصف قطر کے دائروں کا محیط معلوم کیجیے: ($\pi = \frac{22}{7}$)

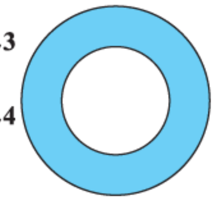
(a) 14 cm (b) 28 mm (c) 21 cm

2۔ مندرجہ ذیل دائروں کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(a) نصف قطر=14 ملی میٹر ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

(b) قطر=49 میٹر

(c) نصف قطر=5 میٹر



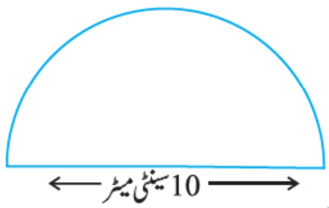
3۔ اگر ایک گول شیٹ کا محیط 154 میٹر ہے تو اس کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ شیٹ کا رقبہ بھی معلوم کیجیے۔($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

4۔ ایک مالی 21 میٹر قطر کے گول باغ میں باڑھ لگانا چاہتا ہے۔ وہ کتنی لمبی رسی خریدے گا اگر وہ باڑھ میں رسی کے دو چکر باندھے گا۔ رسی کی قیمت بھی بتائیے اگر اس کی قیمت 4₹ فی میٹر ہو۔

5۔ 4 سم نصف قطر کی گول شیٹ سے ایک ایک 3 سم نصف قطر کا دائرہ کاٹا گیا۔ باقی بچی شیٹ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

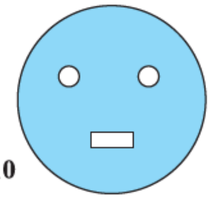
6۔ 1.5 میٹر قطر والے گول میز پوش پر سادھنا بیل لگانا چاہتی ہے۔ بتائیے آپ کو کتنی لمبی بیل چاہیے ہوگی اور اس کی قیمت بھی بتائیے اگر ایک میٹر بیل کی قیمت 15 روپے ہے۔(π=3.14 لیجیے)

7۔ دی گئی شکل کا احاطہ معلوم کیجیے۔ جس میں ایک نصف دائرہ اور اس کا قطر شامل ہیں۔



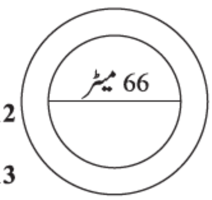
8۔ 1.6 میٹر قطر کی گول میز کی اوپری سطح پر پالش کرنے کا خرچہ بتائیے اگر پالش کرنے کی قیمت 15 روپے فی مربع میٹر ہو۔

9۔ شروتی نے 44 سم لمبا ایک تار لیا اور اس کو موڑ کر ایک دائرہ کی شکل بنائی۔ اس دائرہ کا نصف قطر بتائیے، اس کا رقبہ بھی معلوم کیجیے۔ اگر اسی تار کو موڑ کر ایک مربع نایا جائے تو اس کے ہر ضلع کی لمبائی کیا ہوگی؟ کون سی شکل زیادہ جگہ گھیرے گی، دائرہ یا مربع ؟



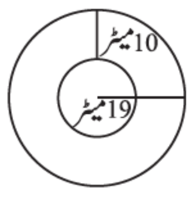
10۔ 14 سم نصف قطر کے گول کارڈ شیٹ سے 3.5 سم نصف قطر کے دو دائرے اور ایک مستطیل جس کی لمبائی 3 سم اور چوڑائی 1 سم ہو، کاٹ کر نکال لیے گئے۔(جیسا کہ ساتھ والی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ باقی بچی شیٹ کا رقبہ نکالیے۔($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)

11۔ 6 سم کے ضلع والے مربع نما المونیم شیٹ میں سے ایک 2 سم نصف قطر کا دائرہ کاٹا گیا۔ باقی بچ گئی المونیم شیٹ کا رقبہ کیا ہے؟ ($\pi = \frac{22}{7}$ لیجیے)



12۔ ایک دائرے کا محیط 3.14 سم ہے۔ دائرہ کا نصف قطر اور رقبہ معلوم کیجیے۔(π=3.14 لیجیے)

13۔ ایک گول پھولوں کی کیاری کے چاروں طرف 4 میٹر چوڑا ایک رستہ بنایا گیا ہے۔ پھولوں کی کیاری کا قطر 66 میٹر ہے۔ اس راستے کا رقبہ بتائیے؟(π=3.14)



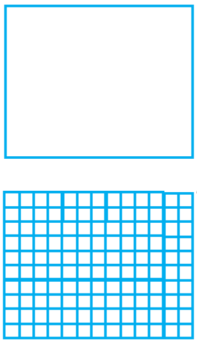
14۔ ایک پھولوں کے گول باغیچہ کا رقبہ 314 مربع میٹر ہے۔ باغ کے مرکز پر ایک پانی چھڑکنے کا چھڑکوار کھا ہوا ہے جو 12 میٹر نصف قطر کے رقبے میں پانی چھڑکتا ہے۔ کیا یہ چھڑکوا پورے باغیچہ میں پانی دے دے گا؟(π=3.14 لیجیے)

15۔ دی گئی تصویر میں اندر اور باہر دونوں دائروں کا محیط معلوم کیجیے۔(π=3.14 لیجیے)

16۔ 28 سم نصف قطر والے پہیا 352 میٹر جانے کے لیے کتنے چکر کاٹے گا؟

17۔ ایک گول گھڑی کے منٹ کی سوئی 15 سم لمبی ہے۔ ایک گھنٹہ میں منٹ کی سوئی کی اوپری نوک کتنی دور گئی؟ (π=3.14 لیجیے)

11.6 اکائیوں کی تقلیب (Conversion of Units)



شکل 11.38

ہم جانتے ہیں کہ سم 1 = 10 ملی میٹر۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ 1 مربع سم میں کتنے مربع ملی میٹر آئیں گے؟ آیئے سوالات کے جواب ڈھونڈھتے ہیں۔ اور معلوم کرتے ہیں کہ دوسری اکائیوں میں رقبے کی پیمائش کرتے وقت اکائیوں کی تقلیب کیسے کرتے ہیں۔

ایک گراف پیپر پر 1 سم ضلع مربع بنایئے۔(π=3.14)

آپ پائیں گے کہ اس 1 سم ضلع والے مربع کو 100 مربعوں میں بانٹا گیا ہے جس میں ہر مربع کا ضلع 1 ملی میٹر ہے۔

1 سم ضلع والے مربع کا رقبہ = 1 ملی ضلع والے 100 مربعوں کا رقبہ۔

اس لیے $1 cm^2 = 100 \times 1\ mm^2$

$1 cm^2 = 100\ mm^2$

اس طرح $1 m^2 = 1m \times 1m$

$= 100\ cm \times 100\ cm$ (As 1 m = 100 cm)

$= 10000\ cm^2$

اب آپ کیا $1 km^2 =$ کو m^2 میں بدل سکتے ہیں؟

میٹرک سسٹم (اعشاری نظام جس کی بنیادی اکائیاں میٹر، لیٹر اور گرام میں زمین کا رقبہ ہیکٹیر (hactares) جس کو چھوٹا کر کے "ha" لکھے ہیں۔) میں بھی ناپا جاتا ہے۔

100 میٹر ضلع کے مربع کا رقبہ 1 ہیکٹیر ہے۔

اس لیے $1\ hectare = 100 \times 100\ m^2$

$= 10{,}000\ m^2$

اگر ہم رقبہ کی ایک اکائی کو چھوٹی اکائی میں بدلتے ہیں تو، جواب زیادہ ہوگا۔

مثال کے طور پر $1000\ cm^2 = 1000 \times 100\ mm^2$

$= 100000\ mm^2$

لیکن جب ایک اکائی بڑی اکائی میں بدلتے ہیں تو جواب چھوٹا ہوتا ہے۔

مثال $1000\ cm^2 = \frac{1000}{10000} m^2 = 0.1\ m^2$

کوشش کیجیے:

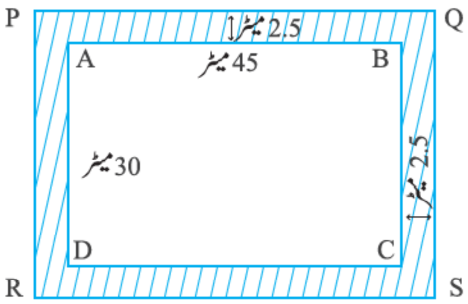
مندرجہ ذیل کو بدلیے۔

(i) 50 cm^2 in mm^2 (ii) 2 ha in m^2 (iii) 10 m^2 in cm^2 (iv) 1000 cm^2 in m^2

11.7 اطلاق/استعمال (Applications)

آپ نے اکثر دیکھا ہوگا کہ باغوں یا پارکوں میں راستے کے لیے کچھ جگہ چاروں طرف یا بیچ میں کراس کرتے راستوں کی طرح چھوڑی جاتی ہے۔ ایک تصویر کے فریم میں بھی چاروں طرف کچھ جگہ چھوڑی جاتی ہے۔

ہم کو ان راستوں یا بارڈر کا رقبہ نکالنے کی ضرورت ہوتی ہے جب ہمیں کو ان کو بنانے کا خرچہ نکالنا ہوتا ہے۔



مثال 20 ایک مستطیل نما پارک کی لمبائی 45 میٹر اور چوڑائی 30 میٹر ہے۔ پارک کے چاروں طرف 25 میٹر چوڑا ایک راستہ بنایا گیا ہے۔ راستے کا رقبہ نکالیے۔

حل مان لیجیے ABCD مستطیل نما پارک کو ظاہر کر رہا ہے اور رنگین خطہ 2.5 میٹر چوڑا راستے کو ظاہر کر رہا ہے۔ راستے کا رقبہ نکالنے کے لیے ہم کو ضرورت ہے نکالنے کی (مستطیل PQRS کا رقبہ ـ مستطیل ABCD کا رقبہ)

ہم جانتے ہیں۔

PQ = (45 + 2.5 + 2.5) میٹر = 50 میٹر

PS = (30 + 2.5 + 2.5) میٹر = 35 میٹر

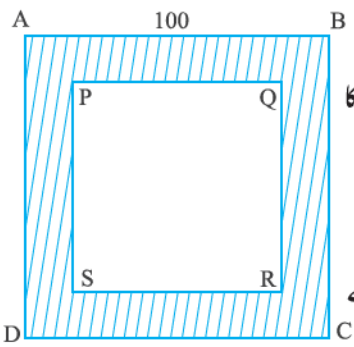
مستطیل ABCD کا رقبہ = l × b = 45 × 30 مربع میٹر = 1350 مربع میٹر

مستطیل PQRS کا رقبہ = l × b = 50 × 35 مربع میٹر = 1750 مربع میٹر

راستے کا رقبہ = مستطیل PQRS کا رقبہ ـ مستطیل ABCD کا رقبہ

= (1750 − 1350) مربع میٹر

= 400 مربع میٹر



مثال 21 100 میٹر ضلع کے مربع پارک کے چاروں طرف 5 میٹر چوڑا راستہ ہے۔ راستے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ اور 250 ₹ فی 10 مربع میٹر کے حساب سے فرش کرانے کا خرچہ معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے ABCD مربع پارک ہے جس کا ضلع 100 میٹر ہے۔ رنگین خطہ 5m چوڑے

راستے کو ظاہر کر رہا ہے۔

PQ = 100 – (5 + 5) = 90 m

مربع ABCD کا رقبہ = (ضلع + ضلع)

= (100×100) مربع میٹر

10000 مربع میٹر

مربع PQRS کا رقبہ = (ضلع × ضلع)

= (90×90) مربع میٹر

= 8100 مربع میٹر

اس لیے، راستے کا رقبہ = (1000 – 8100) مربع میٹر

= 1900

10 مربع میٹر فرش بنانے کا خرچ = ₹250

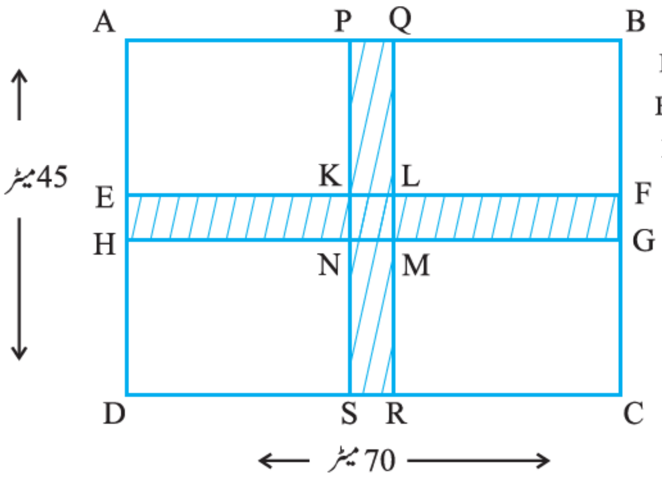
اس لیے 1 مربع میٹر فرش بنانے کا خرچ $\frac{250}{10}$ ₹

اس لیے، 1900 مربع میٹر فرش بنانے کا خرچ $1900 \times \frac{250}{10}$

= ₹47,500

مثال 22 ایک مستطیل نما پارک جس لمبائی 70 میٹر اور چوڑائی 45 میٹر ہے۔ اس کے مرکز سے زاویہ قائمہ پر کراس کرتے ہوئے دو راستے 5 میٹر چوڑے ہیں، جو پارک کے اضلاع کے متوازی ہیں۔ راستوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔ راستہ بنانے کا خرچہ 105 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے معلوم کیجیے۔

حل کراس کرتے راستوں کا رقبہ رنگین خطہ کا رقبہ ہے یعنی مستطیل PQRS کا رقبہ اور مستطیل EFGH کا رقبہ۔ لیکن ایسا کرتے وقت مربع KLMN دوبار لیا گیا ہے۔ اس لیے ایک کو گھٹا دیں گے۔



اب

PQ = 5 میٹر and PS = 45 میٹر

EH = 5 میٹر and EF = 70 میٹر

KL = 5 میٹر and KN = 5 میٹر

راستہ کا رقبہ = مستطیل PQRS کا رقبہ + مستطیل EFGH کا رقبہ – مربع KLMN کا رقبہ

$= PS \times PQ + EF \times EH - KL \times KN$

= (45 × 5 + 70 × 5 - 5 × 5) مربع میٹر

= (225 + 350 – 25) مربع میٹر = 550 مربع میٹر

راستہ بنانے کا خرچ 57,750 روپے = 550×105 روپے

مشق 11.4

1۔ ایک باغ 90 میٹر لمبا اور 75 میٹر چوڑا ہے۔ اس کے چاروں طرف (باہری) 5 میٹر چوڑا ایک راستہ بنا ہے۔ راستے کا رقبہ بتائیے۔ باغ کا رقبہ (ہیکٹیر میں) بھی نکالیے۔

2۔ مستطیل نما پارک جس کی لمبائی 125 میٹر اور چوڑائی 65 میٹر ہے۔ کے باہر چاروں طرف ایک راستہ ہے۔ راستہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

3۔ 3 سم لمبے اور 5 سم چوڑے گتے پر ایک شکل اس طرح بنائی گئی کہ ہر ضلع کے ساتھ 1.5 سم کا ایک حاشیہ چھوڑا گیا ہے۔ حاشیہ کا کل رقبہ بتائیے۔

4۔ ایک کمرے کے چاروں طرف 2.25 میٹر چوڑا برآمدہ بنایا گیا اس کمرے کی لمبائی 5.5 میٹر چوڑائی 4 میٹر ہے۔ معلوم کیجیے:

(i) برآمدے کا رقبہ

(ii) 200 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے برآمدے میں سیمنٹ کرانے کا خرچہ

5۔ ایک مربع نما باغ، جس کا ضلع 30 میٹر ہے، کے چاروں طر (اندرونی) 1 میٹر چوڑا راستہ بنایا گیا ہے۔ معلوم کیجیے

(1) راستہ کا رقبہ

(ii) 40 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے باغ کے باقی حصہ سے گھاس نکالنے کا خرچہ

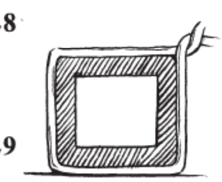
6۔ ایک مستطیل نما پارک کی لمبائی 700 میٹر اور چوڑائی 300 میٹر ہے۔ اس پارک کے مرکز سے ہو کر آپس میں کراس کرتے راستے جو کہ 10 میٹر چوڑے ہیں، گزر رہے ہیں۔ یہ راستے پارک کے اضلاع کے متوازی بھی نہیں۔ راستوں کا رقبہ بتائیے۔ اور راستوں کے بنا پارک کا رقبہ بھی معلوم کیجیے۔ جواب ہیکٹیر میں دیجیے۔

7۔ ایک مستطیل نما میدان کی لمبائی 90 میٹر اور چوڑائی 60 میٹر ہے۔ اس کے درمیان میں دو ایسی سڑکیں بنائی گئیں جو کہ میدان کے اضلاع کے متوازی ہیں اور ایک دوسرے کو مرکز پر زاویہ قائمہ پر کاٹ رہی ہیں۔ اگر سڑک کی چوڑائی 3 میٹر ہے تو معلوم کیجیے۔

(i) سڑکوں کا رقبہ۔

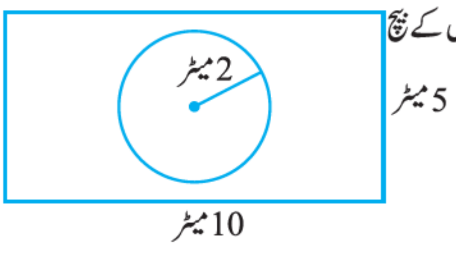
(ii) 110 روپے فی مربع میٹر کے حساب سے سڑک بنانے کا خرچ

8۔ پرا گیا نے 11 سم نصف قطر کے گول پائپ کے چاروں طرف ایک تار لپیٹا (برابر والی شکل) اور تار کی مطلوبہ لمبائی کو کاٹ لیا۔ پھر اس نے اس تار کو 4 سم ضلع کے مربع نما ڈبہ کے چاروں طرف لپیٹا۔ کیا اس کے پاس کچھ تار بچا۔؟ $(\pi=3.14)$



9۔ ساتھ میں دی گئی شکل میں ایک مستطیل نما پارک دکھایا گیا ہے۔ جس کے بیچ میں ایک گول پھولوں کی کیاری ہے۔ معلوم کیجیے۔

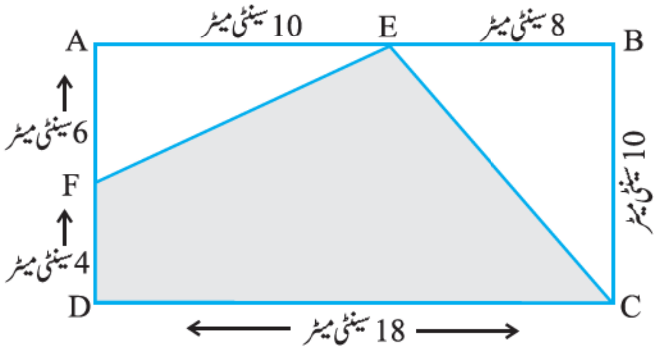
(i) پوری زمین کا رقبہ (ii) کیاری کا رقبہ



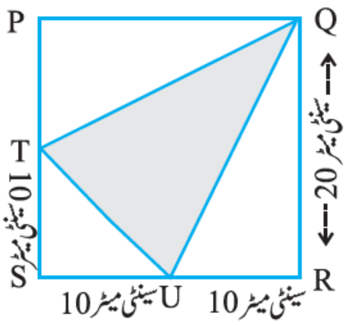
(iii) کیاری کے (باقی بچے) پارک کا رقبہ

(iv) کیاری کا محیط

10۔ مندرجہ ذیل اشکال میں، رنگین خطوں کا رقبہ بتائیے۔



(i)



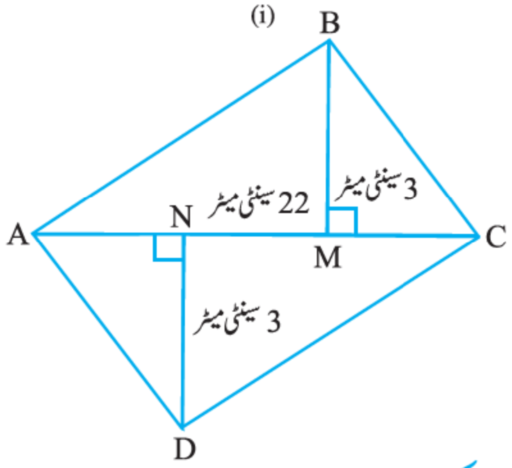
(ii)

11۔ چار ضلعے ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے۔

AC = 22 cm, BM = 3 cm,

DN = 3 cm, and

$BM \perp AC$, $DN \perp AC$



ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ ایک بند شکل کو بنانے والے خط کی لمبائی کو احاطہ کہتے ہیں جب کہ بند اشکال کے ذریعہ گھیرے گئے خطہ کی پیمائش رقبہ کہلاتی ہے۔

2۔ ہم نے پچھلی کلاسوں میں مربع اور مستطیل کا احاطہ اور رقبہ نکالنا سیکھا تھا جو یہ ہے۔

(a) مربع کا احاطہ = 4 × ضلع

(b) مستطیل کا احاطہ = 2 × (لمبائی + چوڑائی)

(c) مربع کا رقبہ = ضلع × چوڑائی

(d) مستطیل کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

3۔ متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ × چوڑائی

4۔ مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع کا رقبہ جس سے یہ مثلث بنا ہے)

$= \frac{1}{2} \times$ قاعدہ×اونچائی

5۔ ایک گول خطہ کے چاروں طرف فاصلے کو محیط کہتے ہیں۔

دائرہ کا محیط$=\pi d$ جہاں d دائرہ کا قطر ہے اور $\pi = \frac{22}{7}$ یا $\pi = 3.14$ ہے۔(تقریباً)

6۔ دائرہ کا رقبہ$= \pi r^2$ جہاں r دائرہ کا نصف قطر ہے۔

8۔ لمبائی کی اکائیوں کی تقلیب جو کہ پہلے پڑھ چکے ہیں، پر منحصر کرتے ہوئے رقبوں کی اکائیوں کی بھی تقلیب ہوتی ہے۔

1 hectare=10000 مربع میٹر　　مربع سینٹی میٹر 1000=1 مربع میٹر　　مربع ملی میٹر 100=1 مربع سینٹی میٹر

باب 12

الجبریائی عبارتیں

12.1 تعارف (Introduction)

ہم پہلے ہی آسان الجبریائی عبارتیں $x+3$، $y-3$، $4x+5$، $10y-5$ وغیرہ دیکھ چکے ہیں۔ چھٹی جماعت میں ہم نے دیکھا کہ کیسے یہ عبارتیں مسئلہ اور معمہ بنانے میں کارآمد ثابت ہوتی ہیں۔ ہم نے بہت سی عبارتوں کی مثالیں سادہ مساوات کے سبق میں بھی دیکھی ہیں۔

الجبرا کا مرکزی تصور عبارتیں ہی ہیں۔ یہ باب الجبریائی عبارتوں کا ہے۔ جب آپ یہ سبق پڑھیں گے تو آپ یہ جانیں گے کہ کیسے الجبریائی عبارتیں عبارتیں بنتی ہیں، کیسے انہیں ملایا جاتا ہے، کیسے ہم ان کی قیمتیں نکالتے ہیں اور کیسے وہ استعمال کی جاتی ہیں۔

12.2 عبارتیں کیسے بنتی ہیں

ہم متغیر کے بارے میں اچھی طرح سے جانتے ہیں۔ متغیر کو ظاہر کرنے کے لیے ہم حروف ... ,x, y, l, m وغیرہ کو استعمال کرتے ہیں ایک متغیر کی بہت سی قیمتیں ہوسکتی ہیں۔ اس کی قیمت طے شدہ نہیں ہے۔ دوسری طرف مستقل (constant) ہے جس کی قیمت طے شدہ ہے۔ مثالیں ہیں $4, 100, -17$ وغیرہ۔

الجبریائی عبارتیں بنانے کے لیے ہم متغیر اور مستقل کو ملاتے ہیں۔ اس کے لیے، ہم جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے اعمال کا استعمال کرتے ہیں۔ ہم $4x + 5, 10y - 20$ جیسی عبارتیں سے پہلے ہی واقف ہیں۔ عبارت $4x+5$، متغیر x سے بنی ہے۔ پہلے x اور عدد 4 سے ضرب کیا اور پھر اس حاصل ضرب میں عدد 5 کو جوڑ دیا۔ اسی طرح، $10y-20$ کو حاصل کرنے کے لیے پہلے y کو 10 سے ضرب کیا گیا ہے اور پھر حاصل ضرب میں سے 20 کو گھٹایا گیا۔

اوپر دی گئی عبارتیں متغیر کو مستقل کے ساتھ ملانے سے حاصل ہوتی ہیں۔ ہم متغیروں کو ان ہی کے ساتھ یا دوسرے متغیروں کے ساتھ بھی ملا سکتے ہیں۔ ذرا دیکھیے مندرجہ ذیل عبارتیں کیسے بنی ہیں۔

$$x^2, 2y^2, 3x^2-5, xy, 4xy+7$$

(i) عبارت ، متغیر x کو اس سے ہی ضرب کرکے حاصل کی گئی ہے۔

$$x \times x = x^2$$

بالکل ویسے ہی جیسے 4×4 کو 4^2 لکھتے ہیں، ہم $x \times x = x^2$ لکھ سکتے ہیں۔ عام طور پر اس کو مربع x sqaure x پڑھا جاتا ہے۔ (بعد میں جب آپ قوت نما اور قوت(Exponents and Powers) کا سبق پڑھیں گے جس سے آپ کو پتہ چلے گا کہ x^2 کو x قوت 2 بھی پڑھتے ہیں۔

اسی طریقے سے، ہم لکھ سکتے ہیں

$$x \times x \times x = x^3$$

عام طور پر x^3 کو کعب x(x cubed) پڑھتے ہیں۔ بعد میں آپ جان جائیں گے اس کو ہم x کی قوت 3 بھی پڑھتے ہیں۔

$x,\ x^2,\ x^3,\ ...$ وغیرہ سبھی x سے حاصل کی گئی الجبریائی عبارتیں ہیں۔

(ii) عبارت $y, 2y^2$ سے حاصل ہوئی۔

$$y, 2y^2 = 2 \times y \times y$$

یہاں سے پہلے ہم نے y کو y سے ضرب کر کے y^2 حاصل کیا پھر اس کو 2 سے ضرب کیا۔

(iii) $(3x^2 - 5)$ میں پہلے ہم نے x^2 حاصل کیا اور اس کو 3 سے ضرب کر کے $3x^2$ حاصل کیا۔ $3x^2$ سے 5 کو گھٹانے پر آخر میں ہمیں $3x^2 - 5$ مل گیا۔

(iv) xy میں ہم نے متغیر x کو ایک دوسرے متغیر x کو ایک دوسرے متغیر y سے ضرب کیا ہے لہٰذا $x \times y = xy$

(v) 4xy+7 میں پہلے ہم نے xy حاصل کیا پھر اس کو 4 سے ضرب کر کے 4xy میں 7 کو جوڑ کر یہ عبارت حاصل کی۔

کوشش کیجیے:

بتائیے کہ مندرجہ ذیل عبارتیں کیسے حاصل کی گئی ہیں۔

$7xy + 5,\ x^2y,\ 4x^2 - 5x$

12.3 عبارت کے ارکان (Terms of expression)

عبارتیں کیسے حاصل کی جاتی ہیں اس کے بارے میں ہم نے جو کچھ سیکھا ہے اب ہم اس کو ایک باضابطہ شکل (Systematic form) میں رکھتے ہیں۔ اس مقصد کے لیے ہم کو سمجھنے کی ضرورت ہے کہ ارکان اور ان کے اجزائے ضربی کیا ہیں۔

(4x+5) عبارت کو دیکھیے۔ اس عبارت کو بتانے میں پہلے ہم نے 4x کو 4 اور x کی حاصل ضرب کی شکل میں الگ سے بنایا اور پھر اس میں 5 کو جوڑ دیا۔ اسی طرح سے عبارت $(3x^2 - 7y)$ کو دیکھیے۔ یہاں ہم نے $3x^2$ کو 3، x اور x کے حاصل ضرب کی شکل میں علیحدہ سے بنایا۔ پھر 7y کو 7 اور y کا حاصل ضرب علیحدہ سے بنایا۔ علیحدہ علیحدہ $3x^2$ اور 7y کو بنانے کے بعد ہم نے ان دونوں کو جوڑ کر یہ عبارت حاصل کی۔

آپ معلوم کریں گے کہ جن عبارتوں کے ساتھ ہم کام کرتے ہیں ان کو ہمیشہ ایسے بھی دیکھا جا سکتا ہے۔ ان کے الگ الگ حصے ہوتے ہیں جن کو جوڑا جاتا ہے۔ عبارت کے ایسے حصے جن کو پہلے علیحدہ سے حاصل کیا جاتا ہے اور پھر جوڑا جاتا ہے 'ارکان' (terms) کے نام

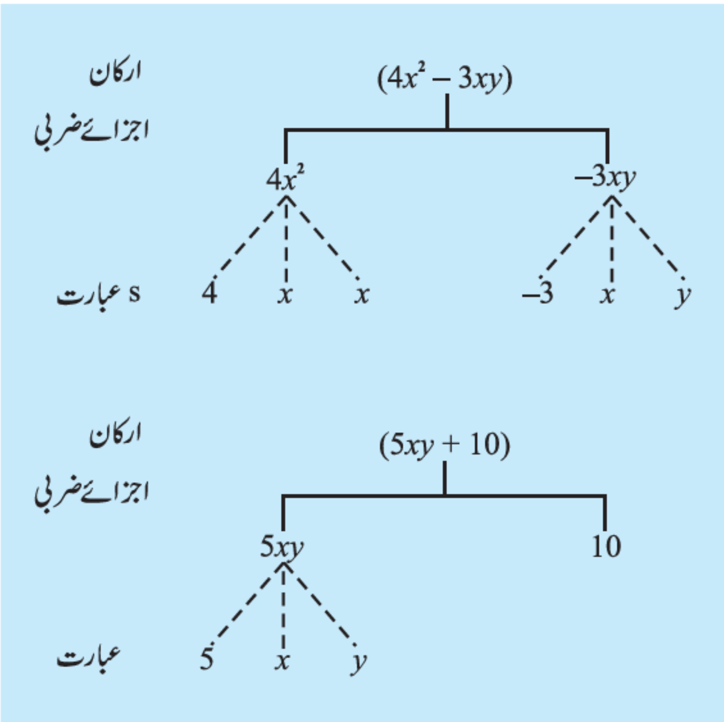
سے جانے جاتے ہیں۔عبارت $(4x^2 - 3xy)$ کو دیکھتے۔ہم کہتے ہیں کہ اس کے دو ارکان ہیں $4x^2$ اور $-3xy$ رکن $4x^2$، 4، x اور x کی حاصل ضرب ہے۔اور رکن $-3xy$ ، (-3)، x اور y کا حاصل ضرب ہے۔

ارکان کو جوڑ کر عبارتیں بنائی جاتی ہیں۔بالکل اسی طرح جیسے رکن $4x$ اور 5 کو جوڑ کر عبارت $(4x+5)$ بنی۔ارکان جیسے رکن $4x^2$ اور $(-3xy)$ کو جوڑ کر عبارت $(4x^2 - 3xy)$ حاصل ہوئی۔ایسا اس لیے ہے کہ کیونکہ $4x^2 + (-3xy) = 4x^2 - 3xy$.

> نوٹ کیجیے کہ منفی علامت (–) رکن میں ہی شامل ہے۔عبارت $4x^2 - 3xy$ میں رکن کو $(-3xy)$ کی طرح دیکھیں گے نہ کہ $(3xy)$ کی طرح۔اسی وجہ سے یہ کہنے کی ضرورت نہیں ہے کہ ارکان کو جوڑ یا گھٹا کر، عبارتیں بنائی جاتی ہیں: صرف جوڑ ہی کافی ہے۔

ایک رکن کے اجزائے ضربی (Factors of a terms)

ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ عبارت $(4x^2 - 3xy)$ میں دو رکن $4x^2$ اور $-3xy$ میں۔رکن $4x^2$، 4، x اور x کا حاصل ضرب ہے۔ہم کہتے ہیں کہ 4، x اور x رکن $4x^2$ کے اجزائے ضربی ہیں۔ایک رکن اپنے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتی ہے۔رکن $-3xy$ اجزائے ضربی 3–، x اور y کا حاصل ضرب ہے۔



کسی عبارت کے ارکان اور ارکارن کے اجزائے ضربی کو آسانی سے ایک درخت ڈائیگرام (Tree Diagram) کی مدد سے دکھا سکتے ہیں۔ $4x^2 - 3xy$ کا درخت سامنے ڈائیگرام میں دکھایا گیا ہے۔

نوٹ کیجیے کہ ہم نے اس درخت ڈائیگرام میں اجزائے ضربی کے لیے نقطہ دار (dotted) خط اور ارکان کے لیے پورے خط کا استعمال کیا ہے۔یہ ضرب دنوں چیزوں کو الگ الگ رکھنے کے لیے ہے۔

عبارت $5xy+10$ کا درخت ڈائیگرام بنایئے اجزائے ضربی ایسے ہوں جن کو اور زیادہ اجزائے ضربی میں تحلیل نہ کیا جا سکے۔لہٰذا $5xy$ نہیں لکھتے ہیں کیونکہ xy اور اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔اس طرح اگر x^3 ایک رکن ہے تو اس کو $x \times x \times x$ لکھیں گے نہ کہ $x^2 \times x$۔یہ بھی یاد رکھیے کہ '1' کو الگ سے جزو ضربی کی طرح نہیں لیا جاتا ہے۔

ضریب (Coefficients)

ہم نے سیکھا کہ ایک رکن کو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھتے ہیں۔ان اجزائے ضربیوں میں سے ایک عددی اور باقی

کوشش کیجیے:

1۔مندرجہ ذیل عبارتوں کے ارکان کیا ہیں؟ یہ ارکان کیسے بنے ہیں یہ بھی دکھائیے۔ہر عبارت کے لیے درست ڈائیگرام بنائیے۔

$8y+3x^2,\ 7mn-4,\ 2x^2y$

2۔4رکن والی تین عبارتیں لکھیے۔

الجبرائی (یعنی ان میں متغیر بھی ہوں) ہو سکتے ہیں۔عددی جز وضربی کو عددی ضریب بھی کہتے ہیں۔یا رکن کا ضریب بھی کہتے ہیں۔اس کو باقی بچے رکن (جو کہ رکن کے الجبرائی اجزائے ضرب کا حاصل ضرب ہوگا) کا ضریب بھی کہتے ہیں لہٰذا $5xy$ میں 5، رکن کا ضریب ہے۔ xy کا بھی ضریب ہے۔ رکن $10xyz$ میں 10، xyz کا ضریب ہے۔ رکن $7x^2y^2$ میں x^2y^2 کا ضریب 3 ہے۔

جب کسی رکن کا ضریب 1+ ہوتا ہے تو عام طور پر اس کو لکھتے نہیں ہیں۔مثال کے طور پر $1x$ کو x، $1x^2y^2$ کو x^2y^2 اور اسی طرح اور بھی لکھے جاتے ہیں۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل عبارتوں میں ارکان کے ضریب بتائیے

$4x-3y,\ a+b+5, 2y+5, 2xy$

کبھی کبھی لفظ ضریب کو اور بھی زیادہ عام طریقے سے استعمال کیا جاتا ہے۔لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ رکن $5xy$ میں $5x$ کا ضریب 5 ہے۔5، x، $5y$ کا ضریب اور y، $5x$ کا ضریب ہے۔

$10x^2y^2$ میں 10، xy^2 کا ضریب، x، $10y^2$ کا ضریب اور $10x.y^2$ کا ضریب اور ہے۔لہٰذا، اس اور زیادہ عام طریقے میں ایک ضریب عددی جز وضربی یا الجبرائی جز وضربی یا دو سے زیادہ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب بھی ہو سکتا ہے۔یہ بھی کہا جاتا ہے کہ یہ ضرب باقی بچے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کا ضریب ہے۔

مثال 1 مندرجہ ذیل عبارتوں میں، وہ ارکان ڈھونڈیے جو مستقل نہ ہوں۔ان کے عددی ضریب بتائیے۔

$xy+4,\ 13-y^2,\ 13-y+5y^2, 4p^2q-3pq^2+5$

حل

نمبر شمار	عبارت	رکن (جو کہ نہ ہوں)	عددی ضریبہ
(i)	$xy+4$	xy	1
(ii)	$13-y^2$	$-y^2$	–1
(iii)	$13-y+5y^2$	$-y$	–1
		$5y^2$	5
(iv)	$4p^2q-3pq^2+5$	$4p^2q$	4
		$3p^2q$	–3

مثال 2 (a) مندرجہ ذیل عبارتوں میں x کے ضریب کیا ہیں؟

$4x-3y,\ 8-x+y,\ y^2x-y,\ 2z-5xz$

(b) مندرجہ ذیل عبارتوں میں y کے ضریب کیا ہیں؟

$4x-3y,\ 8+yz,\ yz^2+5,\ my+m$

حل (a) ہر ایک عبارت میں ہم ایک ایسے رکن کو دیکھتے ہیں جس کا جزوی ضربی x ہو۔ رکن کا باقی حصہ x کا ضریب ہے۔

نمبر شمار	عبارت	وہ رکن جس کا جزو ضربی x ہو	x کے ضربی
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) اوپر (a) میں دیا گئے طریقہ ہی یہاں ہے۔

نمبر شمار	عبارت	وہ رکن جس کا جزو ضربی y ہو	y کا ضریب
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

12.4 یکساں اور غیر یکساں ارکان (Like and Unlike Terms)

جن ارکان کے الجبریائی اجزائے ضربی ایک سے ہوں ان کو یکساں ارکان (like terms) کہتے ہیں۔ اور جن ارکان کے الجبریائی اجزائے ضربی مختلف ہوتے ہیں۔ غیر یکساں ارکان کہلاتے ہیں۔ مثال کے طور پر، عبارت $2xy - 3x + 5xy - 4$، میں $2xy$ اور $5xy$ کے اجزائے ضربی x، 5 اور y ہیں۔ لہٰذا ان کے الجبریائی (یعنی وہ متغیر ہوں) اجزائے ضربی ایک سے ہیں۔ لہٰذا یہ یکساں ارکان ہیں۔ دوسری طرف، ارکان $2xy$ اور $-3x$ کے الجبریائی ارکان مختلف ہیں۔ یہ غیر یکساں ارکان ہیں۔ اسی طرح ارکان $2xy$ اور 4 غیر یکساں ارکان ہیں۔ اور $-3x$ اور 4 غیر یکساں ارکان ہیں۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل میں سے یکساں ارکان اکٹھے کیجیے۔

$12x, 12, -25x, -25, -25y, 1, x, 12y, y$

12.5 یک رکنی، دو رکنی، سہ رکنی اور کثیر رکنی

(Monomials, Binomials, Trinomials and Polynomials)

ایسی عبارت جس میں صرف ایک ہی رکن ہوتا ہے، **یک رکنی** (nomial) کہلاتی ہے مثال کے طور پر $7xy, -5m, 3z^2, 4$

ایسی عبارتیں جن میں دو غیر یکساں ارکان ہوں **دو رکنی** کہلاتی ہیں مثال کے طور پر $x + y,\ m - 5, mn + 4m,\ a^2 - b^2$ دو رکنی نہیں ہے۔ یہ ایک یک رکنی ہے۔ عبارت $(a+b+5)$ دو رکنی نہیں ہے۔ اس میں تین رکن ہیں۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل عبارتوں میں یک رکنی، دو رکنی اور سہ رکنی کی درجہ بندی کیجیے۔ a, a + b, ab + a + b, ab+ a+b – 5, xy, xy + 5, 5x2–x+2, 4pq–3q+5p, 7, 4m–7n+10, 4mn + 7.

ایک عبارت جس میں تین ارکان ہوتے ہیں، **سہ رکنی** (trimonial) کہلاتی ہیں۔ مثال کے طور پر x+y+7, ab+ a +b, $3x^2-5x+2, m+n+10$ سہ رکنی ہے۔ تاہم عبارت ab+a+b+5 تین رکنی نہیں ہے۔ اس میں چار ارکان ہیں، تین نہیں۔ عبارت x+ y+ 5x سہ رکنی نہیں ہے۔ کیونکہ x اور 5x یکساں ارکان ہیں۔

عام طور پر، ایک عبارت جس کے ایک یا زیادہ رکن ہوتے ہیں، **کثیر رکنی** (polynomial) کہلاتی ہے۔ لہٰذا یک رکنی، دو رکنی، اور سہ رکنی یہ سب کثیر رکنیاں ہیں۔

مثال 3 ارکان کے مندرجہ ذیل جوڑوں میں سے یکساں اور غیر یکساں ارکان بتائیے، وجہ بھی بتائیے۔

حل

(i) $7x, 12y$ (ii) $15x, -21x$ (iii) $-4ab, 7ba$ (iv) $3xy, 3x$

(v) $6xy^2, 9x^2y$ (vi) $pq^2, -4pq^2$ (vii) $mn2, 10mn$

نمبر شمار	جوڑا	اجزائے ضربی	الجبریائی اجزائے ضربی ایک سے میں یا مختلف	یکساں غیر یکساں ارکان	ریمارک
(i)	$7x$ $12y$	$7, x$ $12, y$	مختلف	غیر یکساں	ارکان میں متغیر مختلف ہیں
(ii)	$15x$ $-12x$	$15, x$ $-21, x$	یہی	یکساں	
(iii)	$-4ab$ $7ba$	$-4, a, b$ $7, a, b$	یہی	یکساں	یاد رہے $ab = ba$
(iv)	$3xy$ $3x$	$3, x, y$ $3, x$	مختلف	غیر یکساں	متغیر y صرف ایک رکن میں ہے
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$6, x, y, y$ $9, x, x, y$	مختلف	غیر یکساں	دو رکنوں کے صرف متغیر میل کھاتے ہیں، ان کی قوتیں نہیں۔

(vi)	pq^2 $-4pq^2$	$\begin{cases}1, p, q, q\\-4, p, q, q\end{cases}$	یہی	یکساں	دیکھیں، عددی جزوضربی دکھایا نہیں گیا ہے۔
(vii)	mn^2 $10, m, n$	$\begin{cases}m, n, n\\10, m, n\end{cases}$	مختلف	غیر یکساں	n کی قوّتیں یکساں نہیں۔

مندرجہ ذیل میں مختلف آسان مرحلے یہ طے کرنے میں مدد کریں گے کہ کیا دیے گئے ارکان یکساں ہیں یا غیر یکساں

(i) عددی ضریب پر دھیان مت دیجیے ارکان کے الجبریائی حصہ پر دھیان دیجیے۔

(ii) ارکان کے متغیروں کو دیکھیے۔ یہ ایک ہونے چاہئیں۔

(iii) پھر، ارکان میں ہر متغیر کی قوت کو دیکھیے، یہ ایک جیسی ہونی چاہئیں۔

نوٹ کیجیے کہ یہ طے کرنے میں کہ ارکان یکساں ہیں یا نہیں۔ دو چیزوں سے کوئی فرق نہیں پڑتا: (1) ارکان کے عدد ضریب اور (2) ارکان میں متغیر کے ضرب ہونے کی ترتیب۔

مشق 12.1

1۔ مندرجہ ذیل صورت حال میں متغیر استعمال کر کے الجبریائی عبارتیں بنائیے۔

(i) z کو y میں سے گھٹائیے۔

(ii) اعداد x اور y کے جوڑ کا آدھا

(iii) عدد z کو اسی سے ضرب کیجیے۔

(iv) اعداد p اور q کے حاصل ضرب کا ایک چوتھائی۔

(v) اعداد x اور y دونوں کے مربع کیجیے اور پھر دونوں کو جوڑیے۔

(vi) اعداد x اور n کے حاصل ضرب کے تین گنے میں عددی 5 کو جوڑیے۔

(vii) اعداد y اور z کے حاصل ضرب کو 10 میں سے گھٹائیے۔

(viii) a اور b اعداد کا جوڑ اُن کے حاصل ضرب میں سے گھٹائیے۔

2۔ (i) ان مندرجہ ذیل عبارتوں میں ارکان اور ان کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔ ارکان اور ان کے اجزائے ضربی کو رف ڈائیگرام کے ذریعے دکھائیے۔

(a) $x-3$ (b) $1+x+x^2$ (c) $y-y^3$

(d) $5xy^2+7x^2y$ (e) $-ab+2b^2-3a^2$

(ii) نیچے دی گئی عبارتوں میں ارکان اور ان کے اجزائے ضربی پہچانیے۔

(a) $-4x+5$ (b) $-4x+5y$ (c) $5y+3y^2$

(d) $xy+2x^2y^2$ (e) $pq+q$ (f) $1.2\,ab-2.4\,b+3.6\,a$

(g) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ (h) $0.1\,p^2+0.2\,q^2$

3۔ مندرجہ ذیل عبارتوں میں ارکان کے عددی ضریب پہچانیے :

(i) $5-3t^2$ (ii) $1+t+t^2+t3$ (iii) $x+2xy+3y$

(iv) $100m+1000n$ (v) $-p^2q^2+7pq$ (vi) $1.2\,a+0.8\,b$

(vii) $3.14\,r^2$ (viii) $2\,(1+b)$ (ix) $0.1\,y+0.01\,y^2$

4۔ (a) وہ ارکان پہچانیے جن میں x ہو اور x کا ضریب بھی بتائیے۔

(i) y^2x+y (ii) $13y^2-8yx$ (iii) $x+y+2$

(iv) $5+z+zx$ (v) $1+x+xy$ (vi) $12xy^2+25$

(vii) $7x+xy^2$

(b) وہ ارکان بتائی جن میں y^2 ہو۔ y^2 کا ضریب بھی بتائیے۔

(i) $8-xy^2$ (ii) $5y^2+7x$ (iii) $2x^2y-15xy^2+7y^2$

5۔ یک رکنی، دو رکنی اور سہ رکنی میں درجہ بندی کیجیے۔

(i) $4y-7z$ (ii) y^2 (iii) $x+y-xy$ (iv) 100

(v) $ab-a-b$ (vi) $5-3t$ (vii) $4p^2q-4pq^2$ (viii) $7mn$

(ix) z^2-3z+8 (x) a^2+b^2 (xi) z^2+z

(xii) $1+x+x^2$

6۔ بتائیے کہ ارکان دیے گئے جوڑے یکساں ہیں یا غیر یکساں ہیں۔

(i) $1,\ 100$ (ii) $-7x,\ \frac{2}{5}x$ (iii) $-29x,\ -29y$

(iv) $14xy,\ 42yx$ (v) $4m^2p,\ 4mp^2$ (vi) $12xz,\ 12x^2z^2$

7۔ مندرجہ ذیل میں یکساں ارکان پہچانیے۔

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y,$
$-6x^2, y, 2xy, 3x$

(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

12.6 الجبریائی عبارتوں کی جمع اور تفریق
(Addition and Subtraction of Algebraic Expressions)

مندرجہ ذیل مسائل کو یکھیے۔

1۔ سریتا کے پاس کچھ ماربلس ہیں۔ امینا کے پاس 10 سے زیادہ ہیں۔ اپو نے کہا کہ سریتا اور امینہ کے پاس جتنے ماربل ہیں میرے پاس ان دونوں کے مجموعی سے بھی 3 زیادہ ہیں۔ آپ کیسے بتائیں گے کہ اپو کے پاس کتنے ماربل ہیں؟

کیونکہ یہ نہیں دیا گیا ہے کہ سریتا کے پاس کتنے ماربل ہیں، ہم اس کو 'x' لے لیتے ہیں۔ امینہ کے پاس 10 زیادہ ہیں۔ یعنی $x+10$۔ ابو نے کہا کہ سریتا اور امینا کے کل ماربل pg–236 سے 3 زیادہ۔ اس لیے ہم سریتا اور امینہ کے ماربل کا حاصل جمع

معلوم کریں گے اور پھر اس میں 3 جوڑ دیں گے، یعنی ہم، x، $x+3$ اور 3 کا حاصل جمع لیں گے۔

2۔ راموکے ابا کی موجودہ عمر راموں کی عمر کی 3 گنا ہے۔ راموکے دادا کی عمر راموا ور راموکے ابا کی کل عمر سے 13 سال زیادہ ہے۔ آپ راموکے دادا کی عمر کیسے معلوم کریں گے؟

کیونکہ راموکی عمر نہیں دی گئی ہے۔ اس لیے اس کو ہم y سال مان لیتے ہیں۔ پھر اس کے ابا کی عمر $3y$ سال ہوگئی۔ راموکے دادا کی عمر معلوم کرنے کے لیے ہم راموکی عمر (y) *راموکے ابا کی عمر* ($3y$) اور پھر حاصل جمع سے 13 جوڑ دیں گے، یعنی ہم کو y، $3y$ اور 13 کا حاصل جمع لینا ہے۔

3۔ ایک باغ میں ایک مربع نماز مین کے الگ الگ ٹکڑوں پر گلاب اور گیندے کے پھول لگے ہیں۔ گیندے کے پھولوں والی مربع زمین کی لمبائی گلاب کے پھولوں والے مربع زمین کی لمبائی سے 3 میٹر زیادہ ہے۔ گیندے کی زمین کا رقبہ، گلاب کی زمین کے رقبے سے کتنا زیادہ ہے؟

آیئے گلاب والی زمین کی لمبائی ہم 'l' لیتے ہیں۔ تو گیندے والی زمین کی لمبائی $(l+3)$ میٹر ہوگی۔ دونوں کے بالترتیب رقبے l^2 اور $(l+3)^2$ ہوں گے۔ $(l+3)^2$ اور l^2 کے درمیان کا فرق بتائے گا کہ گیندے کی زمین کا رقبہ کتنا زیادہ ہے۔

تینوں صورت حال میں، ہم کو الجبری عبارتوں کی جمع یا گھٹا کرنی ہے۔ روزمرہ زندگی میں ہی ایسے بہت سے مسائل ہوتے ہیں جن میں ہمیں عبارتیں استعمال کرنے کی ضرورت ہوتی ہے اور ان پر ریاضیائی اعمال کرنے کی بھی ضرورت ہے۔ اس حصے میں، ہم یہ دیکھیں گے کہ الجبریائی عبارتوں کو کیسے جوڑا اور گھٹایا جاتا ہے۔

کوشش کیجیے:

کم از کم دو ایسی صورت حال کے بارے میں سوچیے جن میں سے ہر ایک میں آپ کو دو الجبریائی عبارتوں کی ضرورت پڑے گی اور ان کو جوڑنا یا گھٹانا بھی ہو۔

یکساں ارکان کی جمع اور تفریق (Adding and subtracting like terms)

سادہ ترین عبارتیں یک رکنی ہوتی ہیں۔ ان میں صرف ایک ہی رکن ہوتا ہے۔ ہم شروع کرتے ہیں کہ کیسے یکساں ارکان کو جوڑا یا گھٹایا جاتا ہے۔

- $3x$ اور $4x$ کو جوڑیے۔ ہم جانتے ہیں کہ x ایک عدد ہے اور اسی لیے $3x$ اور $4x$ بھی۔

اب $3x+4x = (3\times x) + (4\times x)$

$= (3+4)\times x$ (تقسیمی قانون کا استعمال)

$= 7\times x = 7x$

> کیونکہ متغیر بھی اعداد ہیں اس لیے ہم ان کے لیے تقسیمی قانون استعمال کر سکتے ہیں۔

یا $3x + 4x = 7x$

● اب جوڑیے $8xy$، $4xy$ اور $2xy$

$$8xy + 4xy + 2xy = (8 \times xy) + (4 \times xy) + (2 \times xy)$$

$$= (8 + 4 + 2) \times xy$$

$$= 14 \times xy = 14xy$$

یا $8xy + 4xy + 2xy = 14\,xy$

● $7x$ میں سے $4x$ کو گھٹائیے۔

$$7n - 4n = (7 \times n) - (4 \times n)$$

$$= (7 - 4) \times n = 3 \times n = 3n$$

یا $7n - 4n = 3n$

● بالکل اسی طرح $11ab$ میں سے $5ab$ گھٹائیے

$$11ab - 5ab = (11 - 5)\,ab = 6ab$$

لٰہذا دو یا زیادہ یکساں ارکان کی حاصل جمع بھی یکساں رکن ہی ہے جس کا عددی ضریب یکساں ارکان کے عددی ضریبوں کی حاصل جمع ہے۔

اسی طرح، دو یکساں ارکان کے درمیان کا فرق ایک یکساں رکن ہے۔ جس کا عددی ضریب دونوں یکساں ارکان کے عددی ضریبوں کا فرق ہے۔

نوٹ کیجیے، کہ غیر یکساں ارکان اسی طریقے سے جوڑے یا گھٹائے نہیں جاتے ہیں۔ ہم اس کی مثالیں رکھ چکے ہیں، جب 5 کو x میں جوڑا جاتا ہے، ہم جواب کو $(x+5)$ لکھتے ہیں۔ دھیان دیجیے کہ $(x+5)$ میں دونوں ارکان 5 اور x قائم ہیں۔ اسی طرح، اگر ہم غیر یکساں ارکان $3xy$ میں 7 کو گھٹائیں تو جواب ہوگا $3xy - 7$۔

عام الجبریائی عبارتیں جوڑنا اور گھٹانا (Adding and subtracting general algebraic expressions)

● جوڑیے $3x + 11$ اور $7x - 5$

حاصل جمع $= 3x + 11 + 7x - 5$

اب، ہم جانتے ہیں کہ $3x$ اور $7x$ یکساں ارکان ہیں اور 11 اور -5 بھی ساتھ ہی $3x + 7x = 10\,x$ اور $11 + (-5) = 6$

اس لیے ہم حاصل جمع کو حل کر سکتے ہیں ایسے:

$$= 3x + 11 + 7x - 5$$

(ارکان کو پھر سے ترتیب دینا) $= 3x + 7x + 11 - 5$

$= 10x + 6$

لہٰذا $3x + 11 + 7x - 5 = 10x + 6$

- جوڑیے $3x + 11 + 8z$ اور $7x - 5$

حاصل جمع ہوگی $= 3x + 11 + 8z + 7x - 5$

(ارکان کو پھر سے ترتیب دے کر) $= 3x + 7x + 11 - 5 + 8z$

> نوٹ کیجیے کہ جیسے
>
> $-(5-3) = -5+3,$
>
> $-(a-b) = -a+b.$
>
> الجبرائی ارکان کے علامتوں پر بالکل اسی طرح کام کیا جاتا ہے جیسے اعداد کے علامتوں پر

نوٹ کیجیے ہم نے یکساں ارکان کو اکٹھا کرلیا ہے، اکیلا رکن 8z جوں کا توں ہی بچا ہے، اس لیے جوڑ $= 10x + 6 + 8z$

- $3a - b + 4$ میں سے $a - b$ کو گھٹایئے

فرق $= 3a - b + 4 - (a - b)$

$= 3a - b + 4 - a + b$

دھیان دیجیے کہ ہم نے (a–b) کو بریکٹ میں کیسے رکھا اور بریکٹ کو کھولتے وقت علامات کا کیسے خیال رکھا۔ یکساں ارکان کو ایک ساتھ رکھنے کے لیے ارکان کی ترتیب پھر سے کی گئی۔

فرق $= 3a - a + b - b + 4$

$= (3 - 1)\,a + (1 - 1)\,b + 4$

فرق $= 2a + (0)\,b + 4 = 2a + 4$

یا $3a - b + 4 - (a - b) = 2a + 4$

> **کوشش کیجیے:**
>
>
>
> جوڑیے اور گھٹایئے
>
> (i) $m - n,\ m + n$
>
> (ii) $mn + 5 - 2,\ mn + 3$

اب ہم بریکٹس کے لیے عبارتوں کی جمع اور تفریق کے لیے کچھ اور مثالیں لیتے ہیں۔

مثال 4 یکساں ارکان کو اکٹھا کیجیے اور عبارت کو آسان بنایئے۔

$12m^2 - 9m + 5m - 4m^2 - 7m + 10$

حل ارکان کی ترتیب بدل کر ہمیں ملا

$12m^2 - 4m^2 + 5m - 9m - 7m + 10$

$= (12 - 4)\,m^2 + (5 - 9 - 7)\,m + 10$

$= 8m^2 + (-4 - 7)m + 10$

$= 8m^2\ (-11)\,m + 10$

$= 8m^2 - 11m + 10$

مثال 5 $30ab + 12b + 14a$ میں سے $24ab - 10b - 18a$ کو گھٹایئے۔

نوٹ کیجیے ، کہ ایک رکن کو گھٹانا بالکل ایسا ہے جیسا مقلوب کو جوڑنا $-10b$ گھٹانا ایسا ہی جیسے $+10b$ کو جوڑنا؛ $-18a$ کو گھٹانا ایسا ہے جیسے 18a جوڑنا۔ $24ab$ کو گھٹانا ایسا ہے جیسے $-24ab$ جوڑنا ۔ عبارت کے نیچے دکھائے گئے علامات گھٹانے کے عمل میں مدد کے لیے لگائے جاتے ہیں۔

حل

$$30ab + 12b + 14a - (24ab - 10b - 18a)$$
$$= 30ab + 12b + 14a - 24ab + 10b + 18a$$
$$= 30ab - 24ab + 12b + 10b + 14a + 18a$$
$$= 6ab + 22b + 32a$$

دوسرے طریقے سے ہم ایک عبارت کو دوسری کے نیچے اس طرح رکھتے ہیں کہ یکساں ارکان ایک دوسرے کے نیچے ہیں۔

$$\begin{array}{rrrr} & 30ab & + 12b & + 14a \\ & 24ab & - 10b & - 18a \\ - & & + & + \\ \hline & 6ab & + 22b & + 32a \\ \hline \end{array}$$

مثال 6 $2y^2 + 3yz,\ -y^2 - yz - z^2$ اور $yz + 2z^2$ کے حاصل جمع میں سے $3y^2 - z^2$ اور $-y^2 + yz + z^2$ کے حاصل جمع کو گھٹائیے۔

حل ہم پہلے $2y^2 + 3yz, -y^2 - yz - z^2$ اور $2y^2 + 2z^2$ کو جوڑتے ہیں۔

$$\begin{array}{lrrr} & 2y^2 & + 3yz & \\ & -y^2 & - yz & - z^2 \\ (1) & & + yz & + 2z^2 \\ \hline & y^2 & + 3yz & + z2 \\ \hline \end{array}$$

اب ہم $3y^2 - z^2$ اور $-y^2 + yz + z^2$ کو جوڑتے ہیں۔

$$\begin{array}{lrrr} & 3y^2 & & - z^2 \\ (2) & - y^2 & + yz & + z^2 \\ \hline & 2y^2 & + yz & \\ \hline \end{array}$$

اب ہم حاصل جمع (2) کو حاصل جمع (1) میں سے گھٹاتے ہیں۔

$$\begin{array}{rrr} y^2 & + 3yz & + z^2 \\ 2y^2 & + yz & \\ \hline - & - & \\ \hline -y^2 & + yz & + z^2 \end{array}$$

مشق 12.2

1۔ یکساں ارکان کو ملا کر حل کیجیے۔

(i) $21b - 32 + 7b - 20b$

(ii) $-z^2 + 13z^2 - 5z + 7z^3 - 15z$

(iii) $p - (p - q) - q - (q - p)$

(iv) $3a - 2b - ab - (a - b + ab) + 3ab + b - a$

(v) $5x^2y - 5x^2 + 3yx^2 - 3y^2 + x^2 - y^2 + 8xy^2 - 3y^2$

(vi) $(3y^2 + 5y - 4) - (8y - y^2 - 4)$

2۔ جوڑیے

(i) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$

(ii) $t - 8tz, 3tz - z, z - t$

(iii) $-7mn + 5, 12mn + 2, 9mn - 8, -2mn - 3$

(iv) $a + b - 3, b - a + 3, a - b + 3$

(v) $14x + 10y - 12xy - 13, 18 - 7x - 10y + 8xy, 4xy$

(vi) $5m - 7n, 3n - 4m + 2, 2m - 3mn - 5$

(vii) $4x^2y, -3xy^2, -5xy^2, 5x^2y$

(viii) $3p^2q^2 - 4pq + 5, -10p^2q^2, 15 + 9pq + 7p^2q^2$

(ix) $ab - 4a, 4b - ab, 4a - 4b$

(x) $x^2 - y^2 - 1, y^2 - 1 - x^2, 1 - x^2 - y^2$

3۔ گھٹایئے۔

(i) $-5y^2$ from y^2

(ii) $6xy$ from $-12xy$

(iii) $(a - b)$ from $(a + b)$

(iv) $a(b - 5)$ from $b(5 - a)$

(v) $-m^2 + 5mn$ from $4m^2 - 3mn + 8$

(vi) $-x^2+10x-5$ *from* $5x-10$

(vii) $5a^2-7ab+5b^2$ *from* $3ab-2a^2-2b^2$

(viii) $4pq-5q^2-3p^2$ *from* $5p^2+3q^2-pq$

4۔ (a) x^2+xy+y^2 میں کیا جوڑیں کہ $2x^2+3xy$ حاصل ہو؟

(b) $2a+8b+10$ میں سے کیا گھٹائیں کہ $-3a+7b+16$ ملے؟

5۔ $3x^2-4y^2+5xy+20$ میں سے کیا نکالیں کہ $-x^2-y^2+6xy+20$ حاصل ہو؟

6۔ (a) $3x-y+11$ اور $-y-11$ کے حاصل جمع سے $3x-y-11$ کو گھٹائیے۔

(b) $4+3x$ اور $5-4x+2x^2$ کے حاصل جمع میں سے $3x^2-5x$ اور $-x^2+2x+5$ کے حاصل جمع کو گھٹائیے۔

12.7 عبارت کی قیمت معلوم کرنا (Finding the Value of an Expression)

ہم جانتے ہیں الجبریائی عبارت کی قیمت عبارت کو بنانے والے متغیروں کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے۔ ایسی بہت سی صورت حال ہوتی ہیں جن میں ہم کو ایک عبارت کی قیمت معلوم کرنی ہوتی ہے، جیسے جب ہم یہ جانچ کرنا چاہتے ہیں متغیر کی ایک خاص قیمت دی گئی مساوات کو مطمئن کررہی ہے یا نہیں۔

ہم عبارتوں کی قیمت معلوم کرتے ہیں، اُس وقت بھی جب ہم جیومیٹری اور اور روزمرہ ریاضی کا فارمولہ استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر، ایک مربع کا رقبہ l^2 مربع کے ضلع کی لمبائی ہے۔ اگر $l=5cm$ ہے تو رقبہ ہوگا۔ $5^2\ cm^2$ یا $25^2\ cm^2$: اگر ضلع 10cm ہے تو رقبہ $10^2\ cm^2$ یا 100^2 اور اسی طرح آگے بھی۔ ایسی ہی اور مثالیں ہم اگلے حصے میں دیکھیں گے۔

مثال 7 $x=2$ کے لیے مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $x+4$ (ii) $4x-3$

(iii) $19-5x^2$ (iv) $100-10x^3$

حل $x=2$ رکھیے۔

(i) $x+4$ میں، ہم کو $x+4$ کی قیمت مل جائے گی یعنی

$$x+4=2+4=6$$

(ii) $4x-3$ میں ہم کو حاصل ہے۔

$$4x-3=(4\times 2)-3=8-3=5$$

(iii) $19-5x^2$ میں، ہم کو حاصل ہوگا،

$$19-5x^2 = 19-(5\times 22) = 19-(5\times 4) = 19-20 = -1$$

(iv) $100-10x^3$ میں، ہم کو حاصل ہوگا،

$$100-10x^3 = 100-(10\times 23) = 100-(10\times 8)\ (Note 2^3 = 8)$$
$$= 10-80 = 20$$

مثال 8 جب $n = -2$ ہو تو مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $5n-2$ (ii) $5n^2+5n-2$ (iii) n^3+5n^2+5n-2

حل

(i) $n-2$ میں $n = -2$ رکھنے پر ہم کو حاصل ہوگا۔

$$5(-2)-2 = -10-2 = -12$$

(ii) $5n^2+5n-2$ میں $-2=4$ رکھنے پر ہم کو حاصل ہوگا۔

$$n=-2,\ 5n-2=-12$$

اور $5n^2 = 5\times(-2)^2 = 5\times 4 = 20$ (کیونکہ $(-2)^2 = 4$)

ملانے پر $5n^2+5n-2 = 20-12 = 8$

(iii) اب $n = -2$ کے لیے

$n^3 = (-2)3 = (-2)\times(-2)\times(-2) = 8$ اور $5n^2+5n-2 = 8$

ملانے پر

$$n^3+5n^2+5n-2 = -8+8 = 0$$

اب ہم دو متغیروں کی عبارتوں پر دھیان دیتے ہیں مثال کے طور پر $x+y,\ xy$۔ دو متغیروں کی عبارت کی عددی قیمت نکالنے کے لیے ہم کو دونوں متغیروں کی قیمت دینی ہوگی۔ مثال کے طور پر $(x+y)$ کی قیمت $x=3$ اور $y=5$ کے لیے $3+5=8$

مثال 9 $a=3,\ b=2$ کے لیے مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $a+b$ (ii) $7a-4b$

(iii) $a^2+2ab+b^2$ (iv) a^3-b^3

حل $a=3$ اور $b=3$ رکھیے۔

(i) $a+b$ میں، تو ہم کو حاصل ہوگا:

$a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b$ میں، تو ہم کو حاصل ہوگا:

$7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2$ میں، تو ہم کو حاصل ہوگا

$a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 2 \times 6 + 4 = 9 + 12 + 4 = 25$

(iv) $a^3 - b^3$ میں، تو ہم کو حاصل ہوگا:

$a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$

مشق 12.3

1۔ اگر $m = 2$، تو مندرجہ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

(iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\frac{5m}{2} - 4$

2۔ اگر $p = -2$، تو مندرجہ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

3۔ جب $x = -1$ ہو تو مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$

(iv) $2x^2 - x - 2$

4۔ اگر $a = 2, b = -2$ ہو تو مندرجہ ذیل عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$

5۔ جب $a = 0, b = -1$, ہو تو دی گئی عبارتوں کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$

(iv) $a^2 + ab + 2$

6۔ اگر $x=2$ ہے تو مندرجہ ذیل عبارتوں کو حل کیجیے، اور قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$

(iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7۔ مندرجہ ذیل عبارتوں کو حل کیجیے اور ان کی قیمت معلوم کیجیے اگر $x = 3, a = -1, b = -2$ ہوں۔

(i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$

(iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$

(v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8۔ (i) $z=10$ تو $z^3-3(z-10)$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $p=-10$ تو $p^2-2p-100$

9۔ a کی قیمت کیا ہوگی اگر $2x^2+x-a$ کی قیمت 5 ہے جب کہ $x=0$ ہو۔

10۔ عبارت کو حل کیجیے اور اس کی قیمت معلوم کیجیے جب $a=3$ اور $b=3$ ہو۔

$2(a^2+ab)+3-ab$

12.8 الجبریائی عبارتوں کا استعمال-فارمولے اور قواعد

(Using Algebraic Expressions – Formulas and Rules)

ہم نے پہلے بھی دیکھا ہے کہ ریاضی میں الجبریائی عبارتوں کا استعمال کر کے فارمولوں اور قاعدوں کو جامع اور مختصر انداز میں دیکھا جا سکتا ہے۔ ہم نیچے بہت سی مثالیں دیکھیں گے۔

- **احاطے کے فارمولے (Perimeter formulas)**

1۔ ایک مساوی ضلعی مثلث کا احاطہ $=3\times$ اس کے ضلع کی لمبائی۔ اگر ہم مساوی ضلعی مثلث کے ضلع کی لمبائی کو l سے ظاہر کریں تو

مساوی ضلعی مثلث کا احاطہ $=3l$

2۔ اسی طرح، **مربع کا احاطہ $=4l$**

جہاں $l=$ مربع کے ضلع کی لمبائی

3۔ **منظم پانچ ضلعی کا احاطہ $=5l$**

جہاں $l=$ پانچ ضلعی کے ضلع کی لمبائی ہے

- **رقبے کے فارمولے (Area formulas)**

1۔ اگر ایک مربع کی لمبائی l ہے تو مربع کا رقبہ l^2

2۔ اگر ہم ایک مستطیل کی لمبائی 'l' اور ایک اس کی چوڑائی کو 'b' سے ظاہر کریں تو مستطیل کا رقبہ $l\times b = lb$

3۔ اسی طرح اگر ایک مثلث کا قاعدہ 'b' اور اونچائی 'h' سے ظاہر کی جائے تو مثلث کا رقبہ $\frac{b\times 4}{2} = \frac{bh}{2}$

کسی دی ہوئی مقدار کے لیے کوئی الجبریائی عبارت جب فارمولہ بن جاتی ہے تو مقدار کی قیمت کسی بھی طرح معلوم کی جاسکتی ہے۔

مثال کے طور پر، 3 سم لمبائی والے ایک مربعے کے لیے، قیمت 3 سم $=l$ مربع کے احاطہ کی عبارت یعنی $4l$ میں رکھ کر نکالی جاسکتی ہے۔

دیے گئے مربع کا احاطہ $= (4 \times 3)$ سم $= 12$ سم

اسی طرح، مربع کا رقبہ معلوم کیا جاتا ہے مربع کے رقبہ کی عبارت یعنی l^2 میں l ($= 3$ سم) رکھ کر۔

دیے گئے مربع کا رقبہ $= (3^2)$ مربع سم $=9$ مربع سم

- **عددی پیٹرن کے قاعدے (Rules for number patterns)**

مندرجہ ذیل بیانات کو پڑھیے۔

1۔ اگر ایک فطری عدد کو n سے ظاہر کیا جاتا ہے، اس کا جانشین/قائم مقام $(n+1)$۔ ہم اس کو کسی بھی فطری عدد کے لیے تصدیق کر سکتے ہیں۔

مثال کے طور پر اگر $n=10$، اس کا قائم مقام دوا $n+1=11$ ہے۔

2۔ اگر کسی فطری عدد کو n سے ظاہر کیا جائے تو $2n$ ایک جفت عدد اور $(2n+1)$ ایک طاق عدد ہے۔ آیئے اس کو کسی بھی عدد کے لیے تصدیق کریں، جیسے 15؛ $2n = 2 \times n = 2 \times 15 = 30$، بلاشبہ جفت عدد ہے اور $2n + 1 = 2 \times 15 + 1 = 30 + 1 = 31$ بلاشبہ طاق عدد ہے۔

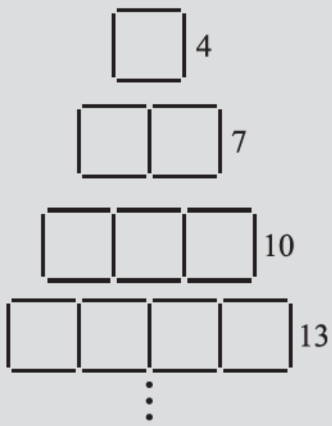
اسے کیجیے

برابر لمبائی کی قطعات خط (چھوٹی) لیجیے جیسے ماچس کی تیلیاں خلال یا اسٹرا کے ٹکڑے کے برابر لمبائی کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑے کر لیجیے۔ ان کو جوڑ کر نیچے دی گئی اشکال کے دکھائے گئے پیٹرن بنائیے۔

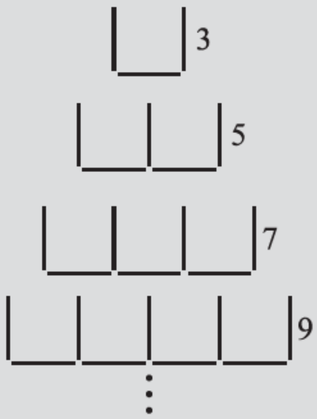
1۔ تصویر 12.1 میں پیٹرن کا مشاہدہ کیجیے۔

4 قطعہ خط کو ملا کر بنائی گئی شکل کے بار بار دہرانے سے یہ بنا ہے جیسا کہ آپ نے دیکھا کہ ایک شکل کو بنانے کے لیے 4 قطعات کی ضرورت ہوتی ہے، 2 اشکال کے لیے 7 کی اور 3 کے لیے 10 کی وغیرہ وغیرہ۔ اگر اشکال کی تعداد 'n' ہے تو n اشکال بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کو $(3n+1)$ سے دکھایا جائے گا۔

آپ اس کی $n = 1, 2, 3, 4, ..., 10,$ وغیرہ لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ مثال، اگر بنائے گئے حروف کی تعداد 3 ہے تو مطلوبہ



شکل 12.2



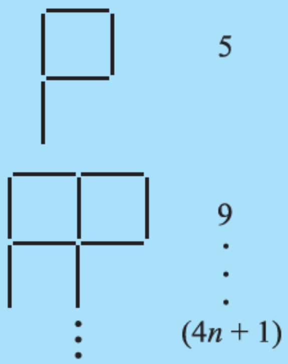
قطعات خط $3 \times 3 + 1 = 9 + 1 = 10$ ہے، جیسا کہ تصویر میں دکھائی دے رہا ہے۔

2۔ اب، تصویر 12.2 کے پیٹرن ہی لیجیے، یہاں پر شکل 1.1 بار بار دوہرائی گئی ہے۔ ...,1, 2, 3, 4 اشکال کو بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کی تعداد بالترتیب ...,3, 5, 7, 9 ہے۔ اگر بنائی گئی اشکال کو n سے ظاہر کیا جائے تو مطلوبہ قطعات کو $(2n+1)$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ n کی کوئی بھی قیمت لے کر آپ عبارت کو درست کر کے جانچ سکتے ہیں۔ جیسے $n=4$، تو $(2n+1) = (2 \times 4) + 1 = 9$ جو کہ بلاشبہ 4 کو بنانے کے لیے قطعات کی تعداد ہے۔

کوشش کیجیے:

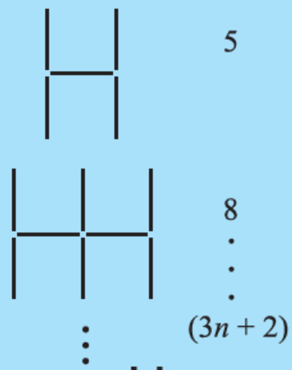
دکھائی گئی بنیادی اشکال کی مدد سے پیٹرن بنائیے

(i)



(The letter P)

(ii)



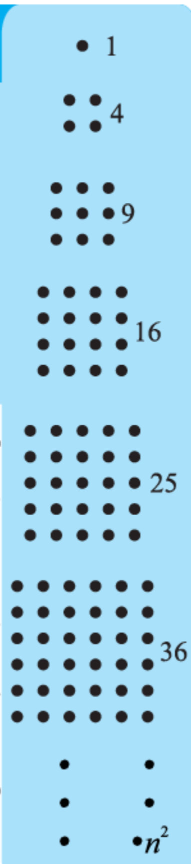
(The letter H)

(شکل کو بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کی تعداد دائیں جانب دی گئی ہیں۔ اور n اشکال کو بنانے کے لیے مطلوبہ قطعات کی تعداد کے لیے عبارت بھی دی گئی ہے۔)

اسی طرح کے پیٹرن ڈھونڈھنے کے لیے مزید کوشش کیجیے۔

اسے کیجیے

مندرجہ ذیل ڈاٹس کو پیٹرن بنائیے۔ اگر آپ ایک گراف پیپر یا ڈاٹ پیپر لیں تو پیٹرن بنانے میں آسانی ہوگی۔ غور کیجیے کہ مربع شکل میں ڈاٹس کی ترتیب کیسی ہے۔ اگر کسی خاص شکل میں عمودی یا افقی قطار میں ڈاٹس کی تعداد کو متغیر n سے ظاہر کریں تو شکل میں ڈاٹس کی تعداد کو عبارت $n \times n = n^2$ سے دکھایا جاتا ہے۔ مثلاً، $n=4$ لیجیے۔ ایسی شکل، جس کی افقی قطار (یا عمودی قطار) میں ڈاٹس ہوں ڈاٹس کی تعداد $4\times4=16$ ہے بلاشبہ جیسا کہ تصویر میں دکھایا گیا ہے۔ آپ n کی دوسری قیمتوں کے لیے بھی اس کی جانچ کر سکتے ہیں۔ قدیم یونانی ریاضی دانوں نے 1, 4, 9, 16, 25, ... اعداد کو مربع عدد کہا ہے۔



- **کچھ اور عددی پیٹرن (Some more number patterns)**

آیئے اب ہم کچھ اور عددی پیٹرن کو دیکھتے ہیں۔ اس دفعہ ہم بغیر کسی ڈرائینگ کی مدد کے دیکھیں گے۔ .. 3, 6, 9, 12, ..., 3n,

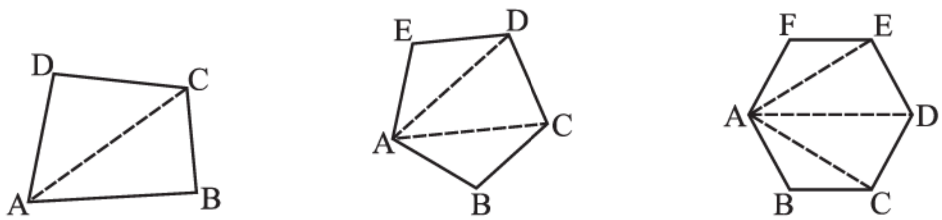
یہ اعداد 3 کے ضعف ہیں اور بڑھتی ترتیب میں لکھے گئے ہیں۔ n^{th} مقام پر آنے والے رکن کو عبارت $3n$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

آپ آسانی سے دسویں مقام پر آنے والے رکن کو معلوم کر سکتے ہیں (جو کہ $3\times10=30$)؛ سوواں مقام (جو کہ $3\times100=300$ ہے) اور اسی طرح آگے بھی۔

- **جیومیٹری میں پیٹرن (Pattern in geometry)**

ایک چار ضلعی کے ایک راس سے ہم کتنے وتر کھینچ سکتے ہیں؟ جانچ کیجیے۔ یہ ایک ہے۔

پانچ ضلعی کے ایک راس سے؟ جانچ کیجیے، یہ 2 ہے۔



چھ ضلعی کے ایک راس سے، یہ 3 ہے۔

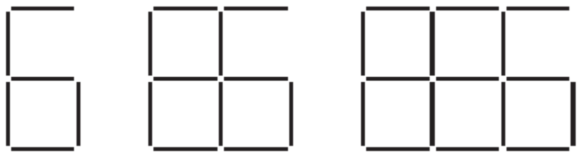
کثیر رکنی کے ایک راس سے کھینچے جانے والے وتروں کی تعداد $(n-3)$ ہے۔ اس کی تصویر بنا کر سات ضلعی (7 اضلاع) کے لیے جانچیے اور مثلث (3 ضلع) کے لیے یہ عدد کیا ہے؟

دھیان دیجیے کہ کسی ایک راس سے کھینچے جانے والے وتر کثیر ضلعی کو اتنے مثلث میں بانٹتے ہیں جتنے کہ ایک راس سے وتر کھینچے جا سکتے ہیں۔ اس میں 1 اور جوڑ دیں۔

مشق 12.4

1۔ برابر کے قطعات خط سے ہندسوں کے بننے والے پیٹرنس پر دھیان دیجیے۔ آپ نے قطعات سے بنے ہندسوں کے ایسے نظارے الیکٹرانک گھڑیوں یا کلکولیٹر میں دیکھے ہوں گے۔

(a)

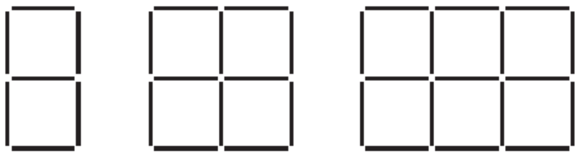


6   11   16   …   21 …   … $(5n + 1)$ …

(b)

4   7   10   …   13 …   … $(3n + 1)$ …

(c)



7   12   17   …   22 …   … $(5n + 2)$ …

اگر بننے والے ہندسوں کی تعداد n ہے تو n سے بنائے گئے کی قطعات کی مطلوبہ تعداد الجبریائی عبارت پیٹرن کے دائیں جانب دی گئی ہیں۔

6,4,8 قسم کے 5, 10, 100 ہندسے بنانے کے لیے قطعات کی مطلوبہ تعداد کیا ہے۔

2۔ عددی پیٹرن کے جدول کو مکمل کرنے کے لیے دی گئی الجبریائی عبارت کا استعمال کیجیے۔

ارکان										عبارت	نمبرشمار
…	100th	…	10th	…	5th	4th	3rd	2nd	1st		
–	–	–	19	–	9	7	5	3	1	$2n - 1$	(i)
–	–	–	–	–	–	11	8	5	2	$3n + 2$	(ii)
–	–	–	–	–	–	17	13	9	5	$4n + 1$	(iii)
–	–	–	–	–	–	48	41	34	27	$7n + 20$	(iv)
–	10,001	–	–	–	–	17	10	5	2	$n^2 + 1$	(v)

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ متغیر اور **مستقل** الجبریائی عبارتیں بنتی ہیں۔ ہم متغیر اور مستقل پر **جمع**، **تفریق**، **ضرب** اور **تقسیم** کے اعمال کا استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر عبارت $4xy + 7$، متغیر x اور y اور مستقل 4 اور 7 سے بنی ہے۔ عدد 4، اور متغیر x اور y کے حاصل ضرب $4 \times y$ ہے اور اس حاصل ضرب میں مستقل 7 کو جوڑ کر عبارت حاصل ہوئی۔

2۔ عبارتیں ارکان سے بنتی ہیں۔ ارکان کو **جوڑ** کر عبارتیں بنتی ہے۔ مثلاً، ارکان $4xy$ اور 7 کو جوڑ کر عبارت $4xy+7$ بنا۔

3۔ ایک **رکن** اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔ عبارت $4xy+7$ میں رکن $4xy$ اجزائے ضربی x، y اور 4 کا حاصل ضرب ہے۔ وہ اجزائے ضربی جس میں متغیر بھی ہوں الجبریائی اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔

4۔ ایک رکن کا عددی **جزو ضربی** کہلاتا ہے۔ کبھی کبھی رکن کا کوئی بھی ایک جزو ضربی رکن کے باقی حصے کا **ضریب** کہلاتا ہے۔

5۔ کوئی بھی عبارت جس میں ایک یا زیادہ ارکان ہوتے ہیں **کثیر رکنی** کہلاتا ہے۔ خاص طور پر **ایک رکن** کی عبارت کو یک رکنی، دو رکن کی عبارت کو **دو رکنی** اور تین ارکان والی عبارت کو **سہ رکنی** کہتے ہیں۔

6۔ وہ ارکان جن میں الجبریائی اجزائے ضربی ایک سے ہوں **یکساں** کہلاتے ہیں۔ اور وہ ارکان جن میں الجریائی اجزائے ضربی مختلف ہوں **غیر یکساں** ارکان کہلاتے ہیں۔ لہٰذا $4xy$ اور $-3xy$ یکساں ارکان میں لیکن $4xy$ اور $-3xy$ غیر یکساں ارکان ہیں۔

7۔ دو یکساں ارکان کی حاصل جمع (یا تفریق) ایک یکساں رکن ہوتی ہے جس کا ضریب دونوں یکساں ارکان کے **ضریبوں** کی حاصل جمع (یا تفریق) ہوتی ہے۔ لہٰذا $8xy - 3xy = (8 - 3)xy$، $5xy$

8۔ جب ہم دو الجبریائی عبارتوں کو جوڑتے ہیں تو **یکساں ارکان** اوپر دیے گئے طریقے سے جوڑے جاتے ہیں۔ اور **غیر یکساں ارکان کو ایسے ہی چھوڑ دیا جاتا ہے۔** لہٰذا $4x^2 + 5x$ اور $2x + 3$ کی حاصل جمع ہے۔ $4x^2 + 7x + 2$ یکساں ارکان 5x اور 2x کو 7x میں جوڑ دیا جاتا ہے۔ غیر یکساں $4x^2$ ارکان اور 3 جوں کے توں چھوڑ دیئے جاتے ہیں

9۔ کسی عبارت کو حل کرنے یا کسی فارمولے کو استعمال کرنے میں ہمارا مقصد اس عبارت کی تعداد کا پتا لگانا ہوتا ہے۔ عبارت کی مقدار اس کے ارکان کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے جن ارکان سے وہ عبارت بنتی ہے۔ لہٰذا $7x-3$ کی تعداد جبکہ $x=5$ ہو، 32 ہوگی کیونکہ $7(5)-3=35-3=32$

10۔ ریاضیات میں فارمولے اور قوانین مختصر اور عام شکل میں لکھے جاتے ہیں جن میں کہ الجبرا کی عبارتیں استعمال کی جاتی ہیں۔ لہٰذا **مستطیل** کا رقبہ $=lb$، جہاں کہ l لمبائی ہے اور b **مستطیل** کی چوڑائی ہے۔

اعداد کے سلسلے میں (nth) نمبر کی عبارت میں n شامل ہوتا ہے۔ لہٰذا، نمبرات 11، 21، 31، 41، ..... کا اعدادی سلسلہ $(10n+1)$ ہوتا ہے۔

باب 13

4714CH13

قوت نما اور قوت

13.1 تعارف (Introduction)

کیا آپ زمین کا ماس جانتے ہیں؟ یہ kg 5,970,000,000,000,000,000,000,000 ہے۔ کیا آپ اس عدد کو پڑھ سکتے ہیں؟

یورینس کا ماس ہے kg 86,800,000,000,000,000,000,000,000

کس کا ماس بڑا ہے۔ زمین یا یورینس؟

سورج اور سیٹرن کے بیچ کا فاصلہ m 1,433,500,000,000 اور سیٹرن اور یورینس کا m 1,439,000,000,000 ہے۔ کیا آپ ان اعداد کو پڑھ سکتے ہیں؟ کون سا فاصلہ چھوٹا ہے؟

یہ اتنے بڑے بڑے اعداد پڑھنے، سمجھنے اور موازنہ کرنے میں بہت مشکل ہیں۔ ان اعداد کو پڑھنے، سمجھنے اور موازنہ کرنے میں آسانی کے لیے ہم قوت نما کا استعمال کرتے ہیں۔ اس باب میں ہم قوت نما کے بارے میں پڑھیں گے اور یہ بھی کہ ان کا استعمال کیسے کیا جاتا ہے۔

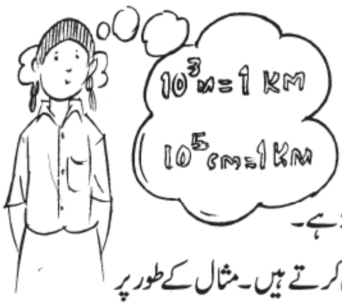
13.2 قوت نما (Exponents)

ہم بڑے اعداد کو قوت نما کا استعمال کر کے چھوٹی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

غور کیجیے $10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

یہ چھوٹا علامتی اظہار 10^4 ، $10 \times 10 \times 10 \times 10$ کے حاصل ضرب کو ظاہر کرتا ہے۔ یہاں '10' کو قاعدہ (base) اور '4' کو قوت نما (exponent) کہتے ہیں۔ عدد 10^4 کو 10 کی قوت 4 پڑھتے ہیں۔ یا 10 کی چوتھی قوت کہتے ہیں۔ 10^4 کو 10,000 کی قوت نما شکل (exponential form) کہتے ہیں۔ ہم بالکل اسی طرح 10,000 کو بھی 10 کی قوت کے طور پر لکھ سکتے ہیں۔ یاد رکھیے:

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$



یہاں پر پھر 1,000 کی قوت نما شکل 10^3 ہے۔

اسی طرح، $1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

1,00,000 کی قوت نما شکل 10^5 ہے۔

ان دونوں مثالوں میں قاعدہ 10 ہے، 10^3 میں قوت نما 3 ہے اور 10^5 میں قوت نما 5 ہے۔

اعداد کی پھیلی ہوئی شکل لکھنے کے لیے ہم 10، 100، 1000 وغیرہ جیسے اعداد کا استعمال کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

اس کو ہم $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$ بھی لکھ سکتے ہیں۔

172، 5642، 6374 وغیرہ جیسے اعداد کو اسی طریقے سے لکھنے کی کوشش کیجیے۔

اوپر دی گئی سبھی مثالوں میں ہم نے ایسے اعداد دیکھے جن کا قاعدہ 10 ہے جب کہ قاعدہ کوئی دوسرا عدد بھی ہو سکتا ہے۔ مثلاً $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ کو ہم $81 = 3^4$ کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں 3 قاعدہ اور 4 قوت نما ہے۔ کچھ قوتوں کے خاص نام ہوتے ہیں۔ مثلاً 10^2، جو کہ 10 کی قوت 2 ہے، کو '10 مربع' اور 10^3، جو کہ 10 کی قوت 3 ہے، کو '10 کعب' بھی کہتے ہیں۔

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ 5^3 (کعب 5) کا کیا مطلب ہے۔ $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں 125، 5 کی تیسری قوت ہے

5^3 کی قوت نما اور قاعدہ کیا ہے؟

اسی طرح، $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ جو کہ 2 کی پانچویں قوت ہے۔ 2^5 میں 2 قاعدہ اور 5 قوت نما ہے۔

اسی طریقے سے $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

$$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

کوشش کیجیے:

ایسی ہی پانچ اور مثالیں ڈھونڈیے جہاں ایک عدد کو قوت نما کی شکل میں لکھا جا سکے۔ ہر حالت میں قاعدہ اور قوت نما بتائیے۔

آپ لکھنے کے اس طریقے کو آگے بھی بڑھا سکتے ہیں جہاں قاعدہ (base) ایک منفی صحیح عدد (negative integer) ہے۔

$(-2)^3$ کا کیا مطلب ہے؟

کیا یہ $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ ہے۔

کیا $(-2)^4 = 16$ ہے؟ جانچ کیجیے

بجائے طے شدہ عدد لینے کے ہم کوئی بھی صحیح عدد لیتے ہیں جس کا قاعدہ 'a' ہو اور اعداد کو اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$a \times a = a^2$ (مربع 'a' یا a کی قوت 2 پڑھتے ہیں)

$a \times a \times a = a^3$ (کو پڑھتے ہیں 'کعب a' یا 'a کی قوت 3')

$a \times a \times a \times a = a^4$ (کو پڑھتے ہیں a کی قوت 4 یا a کی چوتھی قوت)

....

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (کو پڑھتے ہیں a کی قوت 7 یا a کی ساتویں قوت) وغیرہ وغیرہ

$a \times a \times a \times b \times b$ کو a^3b^2 سے بھی ظاہر کر سکتے ہیں۔ (پڑھتے ہیں کعب a مربع b)

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ کو a^2b^4 سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ (پڑھتے ہیں مربع a ضرب b کی قوت 4)

کوشش کیجیے:

ظاہر کیجیے

(i) 729 کو 3 کی قوت میں

(ii) 128 کو 2 کی قوت میں

(iii) 343 کو 7 کی قوت میں

مثال 1 256 کو 2 کی قوت میں ظاہر کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ $256 = 2^8$

مثال 2 کون بڑا ہے 2^3 یا 3^2؟

حل ہمارے پاس ہے، $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ اور $3^2 = 3 \times 3 = 9$

کیونکہ $9>8$ اس لیے، 3^2 بڑا ہے 2^3 سے

مثال 3 کون بڑا ہے 8^2 یا 2^8؟

حل $8^2 = 8 \times 8 = 64$

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

صاف ظاہر ہے، $2^8 > 8^2$

مثال 4 $a^3b^2, a^2b^3, b^2a^3, b^3a^2$ کو پھیلا کر لکھیے۔ کیا یہ سب ایک سے ہیں؟

حل $a^3b^2 = a^3 \times b^2$

$= (a \times a \times a) \times (b \times b)$

$$= a \times a \times a \times b \times b$$

$$a^2b^3 = a^2 \times b^3$$

$$= a \times a \times b \times b \times b$$

$$b^2a^3 = b^2 \times a^3$$

$$= b \times b \times a \times a \times a$$

$$b^3a^2 = b^3 \times a^2$$

$$= b \times b \times b \times a \times a$$

نوٹ کیجیے کہ a^3b^2 اور a^2b^3 میں a اور b کی قوتیں الگ الگ ہیں۔ لہٰذا a^3b^2 اور a^2b^3 مختلف ہیں۔

دوسری طرف a^3b^2 اور a^2b^3 ایک جیسے ہیں۔ کیونکہ a اور b کی قوتیں ان دونوں ارکان میں ایک جیسی ہیں۔ اجزائے ضربی کی ترتیب سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے۔

لہٰذا $a^3b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2a^3$ ۔ اسی طرح a^2b^3 اور a^3b^2 ایک جیسے ہیں۔

مثال 5 مندرجہ ذیل اعداد کو مفرد اجزائے ضربی کی قوتوں کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیے۔

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

حل

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

(i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 23 \times 32$$

لہٰذا، $72 = 2^3 \times 3^2$ (مطلوبہ مفرد اجزائے ضربی کی شکل)

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

یا $432 = 2^4 \times 3^3$ (مطلوبہ شکل)

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$

$$1000 = 2^3 \times 5^3$$

اتل اس مثال کو ایک دوسرے طریقے سے حل کرنا چاہتا ہے:

$1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$

$= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ (کیونکہ $10 = 2 \times 5$)

$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$1000 = 2^3 \times 5^3$

کیا اتل کا طریقہ ٹھیک ہے؟

(iv) $16,000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000 = 24 \times 103$ (as $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) = 24 \times 23 \times 53$

($Since$ $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

$or, 16,000 = 2^7 \times 5^3$

مثال 6 $(1)^5, (-1)^3, (-1)^4, (-10)^3, (-5)^4$ معلوم کیجیے۔

حل

(-1) طاق عدد $= -1$

$(+1)$ جفت عدد $= +1$

(i) ہمارے پاس ہے $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

دراصل، یہ آپ محسوس کریں گے کہ 1 کی کوئی بھی قوت ہو، جواب 1 ہی ہوتا ہے۔

(ii) $(-1)3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ (-1) کی قوت اگر طاق عدد ہے تو جواب (-1) ہوگا اور (-1) کی قوت اگر جفت عدد ہے تو جواب $(+1)$ ہوگا۔

(iv) $(-10)3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

مشق 13.1

1۔ مندرجہ ذیل کی قیمت بتائیے:

(i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2۔ مندرجہ ذیل کو قوت نما کی شکل میں لکھیے:

(i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$

(iv) $5\times5\times7\times7\times7$ (v) $2\times2\times a\times a$ (vi) $a\times a\times a\times c\times c\times c\times c\times d$

3۔ مندرجہ ذیل اعداد میں سے ہر ایک کو قوت نما کے علامتی اظہار میں لکھیے:

(i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125

4۔ مندرجہ ذیل میں ہر ایک کے لیے' جہاں ممکن ہو' بڑے عدد کو پہچانیے (یا = or)

(i) 4^3 اور 3^4 (ii) 5^3 اور 3^5 (iii) 2^8 اور 8^2

(iv) 100^2 اور 2^{100} (v) 2^{10} اور 10^2

5۔ مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو مفرد اجزائے ضربی کی قوت کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھیے

(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3,600

6۔ حل کیجیے:

(i) 2×10^3 (ii) $7^2\times2^2$ (iii) $2^3\times5$ (iv) 3×4^4

(v) 0×10^2 (vi) $5^2\times3^3$ (vii) $2^4\times3^2$ (viii) $3^2\times10^4$

7۔ حل کیجیے:

(i) $(-4)^3$ (ii) $(-3)\times(-2)^3$ (iii) $(-3)^2\times(-5)^2$

(iv) $(-2)^3\times(-10)^3$

8۔ مندرجہ ذیل اعداد کا موازنہ کیجیے:

(i) $2.7\times10^{12}\ ;\ 1.5\times10^8$ (ii) $4\times10^{14}\ ;\ 3\times10^{17}$

13.3 قوت نما کے قانون (Laws of Exponents)

13.3.1 ایک سے قاعدے والی قوت نماؤں کو ضرب کرنا (Multiplying Powers with the Same Base)

(i) آیئے $2^2\times2^3$ کو حل کریں

$$2^2\times2^3=(2\times2)\times(2\times2\times2)$$

$$=2\times2\times2\times2\times2=2^5=2^{2+3}$$

نوٹ کیجیے کہ 2^2 اور 2^3 میں قاعدہ ایک ہی ہے اور قوت نما کی حاصل جمع بھی 2 اور 3 کی 5 ہے۔

(ii)

$$(-3)^4\times(-3)^3=[(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)]\times[(-3)\times(-3)\times(-3)]$$

$$=(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$$

$$=(-3)^7$$

$= (-3)^{4+3}$

پھر نوٹ کیجیے قاعدہ ایک ہی ہے اور قوتوں کی حاصل جمع یعنی 4 اور 3 کی 7 ہے۔

(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

(نوٹ: قاعدہ ایک ہی ہے اور قوت نماؤں کی حاصل جمع ہے $2 + 4 = 6$)

اسی طرح، جانچ کیجیے

$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$

$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$

کوشش کیجیے:

حل کیجیے اور قوت نما کی شکل میں جواب لکھیے

(i) $2^5 \times 2^3$
(ii) $p^3 \times p^2$
(iii) $4^3 \times 4^2$
(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$
(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$
(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

کیا آپ باکس میں مناسب عدد لکھ سکتے ہیں؟

$(-11)^2 \times (-11)^6 = (-11)^{\square}$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$ (یاد کیجیے، قاعدہ ایک ہی ہے، b کوئی صحیح عدد ہے)

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$ (c کوئی صحیح عدد ہے)

$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$

اس سے ہم یہ کر سکتے ہیں کہ کسی بھی غیر صفر صحیح عدد 'a' کے لیے جہاں m اور n مکمل اعداد ہوں

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

انتباہ!

$2^3 \times 3^2$ کو دیکھیے۔

کیا آپ قوت نما کو جوڑ سکتے ہیں؟ نہیں! کیا آپ دیکھ رہے ہیں 'کیوں'؟ 2^3 کا قاعدہ 2 اور 3^2 کا قاعدہ 3 ہے۔ دونوں کے قاعدے 2 ایک نہیں ہیں۔

13.3.2 ایک سے قاعدے والی قوت نماؤں کو تقسیم کرنا

(Dividing Powers with the Same Base)

آیئے $3^7 \div 3^4$ کو حل کرتے ہیں؟

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

اس لیے $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$

(نوٹ، 3^7 اور 3^4 میں قاعدہ ایک سے ہیں اور $3^7 \div 3^4$ بن جائے گا 3^{7-4})

اسی طرح $$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5}$$

$$= 5\times5\times5\times5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

یا $$5^6 \div 5^2 = 3^{6-2}$$

مان لیجیے a ایک غیر صفر صحیح عدد ہے، تو

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a} = a\times a = a^2 = a^{4-2}$$

یا $$a^4 \div a^2 = a^{4-2}$$

اب کیا آپ جلدی سے جواب دے سکتے ہیں؟

$$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$$

$$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$$

$$a^8 \div a^5 = a^{\square}$$

غیر صفر صحیح اعداد b اور c کے لیے

$$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$$

$$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$$

عام طور پر، کسی بھی غیر صفر صحیح عدد a کے لیے

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$$

جہاں m اور n مکمل اعداد ہیں اور $m>n$

کوشش کیجیے:

حل کیجیے اور قوت نما کی شکل میں جواب لکھیے

(i) $2^9 \div 2^3$
(ii) $10^8 \div 10^4$
(iii) $9^{11} \div 9^7$
(iv) $20^{15} \div 20^{13}$
(V) $7^{13} \div 7^{10}$

13.3.3 قوت کی قوت لینا (Taking Power of a Power)

مندرجہ ذیل پر دھیان دیجیے

حل کیجیے $(2^3)^2 ; (3^2)^4$

اب، $(2^3)^2$ کا مطلب ہے 2^3 کو خود اپنے آپ سے دو بار ضرب کرنا۔

$$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$$

$$= 2^{3+3} \quad (\text{کیونکہ } a^m \times a^n = a^{m+n})$$

$$= 2^6 = 2^{3\times2}$$

لہٰذا $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\times2}$

اسی طرح $\left(3^2\right)^4 = 3^2\times3^2\times3^2\times3^2$

$= 3^{2+2+2+2}$

$= 3^8$ (دھیان دیجیے کہ 8، 2 اور 4 کا حاصل ضرب ہے)۔

$= 3^{2\times4}$

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ $\left(7^2\right)^{10}$ کس کے برابر ہوگا؟

اس لیے $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\times2} = 2^6$

$\left(3^2\right)^4 = 3^{2\times4} = 3^8$

$\left(7^2\right)^{10} = 7^{2\times10} = 7^{20}$

$\left(a^2\right)^3 = a^{2\times3} = a^6$

$(a^m)^3 = a^{m\times3} = a^{3m}$

اس سے ہم یہ تعمیم کر سکتے ہیں کہ کسی بھی غیر صفر صحیح عدد 'a' کے لیے جہاں 'm' اور 'n' مکمل اعداد ہیں

$(a^m)^n = a^{mn}$

کوشش کیجیے:

حل کیجیے اور قوت نما کی شکل میں جواب لکھیے

(i) $\left(6^2\right)^4$ (ii) $\left(2^2\right)^{100}$ (iii) $\left(7^{50}\right)^2$ (iv) $\left(5^3\right)^7$

مثال 7 کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ کون بڑا ہے، $(5^2)\times3$ یا $\left(5^2\right)^3$

حل $3\times(5^2)$ کے معنی ہیں 5^2 کو 3 سے ضرب کرنا، یعنی $5\times5\times3 = 75$

لیکن $\left(5^2\right)^3$ کے معنی 5^2 کو خود اپنے آپ سے تین بار ضرب کرنا، یعنی

$5^2\times5^2\times5^2 = 5^6 = 15,625$

اس لیے $\left(5^2\right)^3 > (5^2)\times3$

13.3.4 یکساں قوت نما والی قوتوں کی ضرب
(Multiplying Powers with the Same Exponents)

کیا آپ $2^3 \times 3^3$ کو حل کر سکتے ہیں؟ نوٹ کیجیے کہ دو ارکان 2^3 اور 3^3 کے مختلف قاعدے ہیں مگر قوت نما یکساں ہیں۔

اب $2^3 \times 3^3 = (2\times 2\times 2)\times(3\times 3\times 3)$

$= (2\times 3)\times(2\times 3)\times(2\times 3)$

$= 6\times 6\times 6$

$= 6^3$ (دھیان دیجیے کہ قاعدے 2 اور 3 کا حاصل ضرب 6 ہے)

$4^4 \times 3^4$ کو دیکھیے $= (4\times 4\times 4\times 4)\times(3\times 3\times 3\times 3)$

$= (4\times 3)\times(4\times 3)\times(4\times 3)\times(4\times 3)$

$= 12\times 12\times 12\times 12$

$= 12^4$

نیز دیکھیں $3^2 \times a^2 = (3\times 3)\times(a\times a)$

$= (3\times a)\times(3\times a)$

$= (3\times a)^2$

$= (3a)^2$ (نوٹ: $3\times a = 3a$)

اسی طرح $a^4 \times b^4 = (a\times a\times a\times a)\times(b\times b\times b\times b)$

$= (a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b)$

$= (a\times b)^4$

$= (ab)^4$ (نوٹ: $a\times b = ab$)

عام طور پر کسی بھی غیر صفر صحیح عدد a کے لیے

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$ (جہاں m کوئی مکمل عدد ہے)

کوشش کیجیے:

$a^m \times b^m = (ab)^m$ کا استعمال کر کے دوسری شکل میں لکھیے

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$ (iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$

(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

مثال 8 مندرجہ ذیل ارکان کو قوت نما کی شکل میں لکھیے

(i) $(2\times3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

حل

(i) $(2\times3)^5=(2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)$

$=(2\times2\times2\times2\times2)\times(3\times3\times3\times3\times3)$

$=2^5\times3^5$

(ii) $(2a)^4=2a\times2a\times2a\times2a$

$=(2\times2\times2\times2)\times(a\times a\times a\times a)$

$=2^4\times a^4$

(iii) $(-4m)^3=(-4\times m)^3$

$=(-4\times m)\times(-4\times m)\times(-4\times m)$

$=(-4)\times(-4)\times(-4)\times(m\times m\times m)=(-4)^3\times(m)^3$

13.3.5 ایک سے قاعدے والی قوت نماؤں کی تقسیم
(Dividing Powers with the Same Exponents)

مندرجہ ذیل توضیع کا مشاہدہ کیجیے:

(i) $$\frac{2^4}{3^4}=\frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

(ii) $$\frac{a}{b^3}=\frac{a\times a\times a}{b\times b\times b}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)$$

ان مثالوں سے ہم نتیجہ نکال کر سکتے ہیں کہ

$a^m\div b^m=\dfrac{a^m}{b^m}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ جہاں a اور b کوئی غیر صفر صحیح اعداد ہیں اور m ایک مکمل عدد ہے۔

کوشش کیجیے:

$a^m\div b^m=\left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ کا استعمال کر کے دوسری شکل میں لکھیے:

(i) $4^5\div3^5$ (ii) $c^5\div b^5$ (iii) $(-2)^3\div b^3$ (iv) $p^4\div q^4$ (v) $5^6\div(-2)^6$

مثال 9 پھیلائیے (i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\dfrac{-4}{7}\right)^5$

حل

(i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}$

(ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5 = \frac{(-4)^5}{7^5} = \frac{(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)}{7\times7\times7\times7\times7}$

a^0 کیا ہے؟

مندرجہ ذیل پیٹرن پر غور کیجیے:

$2^6 = 64$

$2^5 = 32$

$2^4 = 16$

$2^3 = 8$

$2^2 = ?$

$2^1 = ?$

$2^0 = ?$

آپ بس پیٹرن کو دیکھ کر 2^0 کی قیمت کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔

آپ نے دیکھا کہ $2^0 = 1$

اگر آپ $3^6 = 729$ سے شروع کرے اور اوپر دکھائے گئے طریقے سے معلوم کریں 3^5 ، 3^4 ، 3^3 وغیرہ۔ $3^0 = ?$ کیا ہوگا؟

● قوت نما صفر والے اعداد (Numbers with exponent zero)

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ $\frac{3^5}{3^5}$ کس کے برابر ہے؟

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = 1$$

قوت نما کے قانون کا استعمال کر کے

$$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$$

اس لیے $3^0 = 1$

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ 7^0 کس کے برابر ہے؟

$$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$$

اور $$\frac{7^3}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 1$$

اس لیے $$7^0 = 1$$

اسی طرح $$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$$

اور $$a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1$$

لہٰذا $a^0 = 1$ (کسی بھی غیر صفر صحیح عدد a کے لیے)

اس لیے، ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی بھی عدد (سوائے 0 کے) جس کی قوت (یا قوت نما) 0 ہے اس کی قیمت 1 ہے۔

13.4 قوت نما کے قانون کا استعمال کرنے کی متفرق مثالیں

(Miscellaneous Examples using the Laws of Exponents)

آیئے قوت نما کے بنے ہوئے اصولوں کا استعمال کر کے کچھ مثالوں کو حل کرتے ہیں۔

مثال 10 $8 \times 8 \times 8 \times 8$ کو ایسی قوت نما کی شکل میں لکھیے جس کا قاعدہ 2 ہو۔

حل ہمارے پاس ہے $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

اس لیے $$8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$$

(آپ $(a^m)^n = a^{mn}$ کا استعمال بھی کر سکتے ہیں)

$$= 2^{12}$$

مثال 11 حل کیجیے اور اپنے جوابات قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5$ (ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$ (iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3$

(iv) $[(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6$ (v) $8^2 \div 2^3$

حل

(i) $$\left(\frac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5 = \left(3^{7-2}\right) \times 3^5$$

$$= 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$$

(ii) $$2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^3 + 2 \times 5^5$$

$$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$$

(iii) $6^{2+4} \div 6^3$

$$\frac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$$

(iv) $\left[\left(2^2\right)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6$

$$= \left(2 \times 3\right)^6 \times 5^6$$

$$= \left(2 \times 3 \times 5\right)^6 = 30^6$$

(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

اس لیے $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$$

مثال 12 حل کیجیے

(i) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

حل

(i) ہمارے پاس ہے

$$\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$$

$$= \frac{\left(2^2\right)^4 \times (3)^4 \times 3^{2\times3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2\times3} \times 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$$

$$= \frac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \frac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$$

$$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$$

$$= 2 \times 81 = 162$$

(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$$

$$= 40\,a^7$$

(iii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times \left(2^2\right)^2} = \dfrac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2\times2}}$

$$= \frac{2^{1+5} \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = \frac{2^6 \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = 2^{6-4} \times 3^{4-2}$$

$$= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$$

نوٹ: اس باب میں لی گئی زیادہ تر مثالوں میں قوت کا قاعدہ ہم نے صحیح عدد لیا تھا۔لیکن باب کے تمام نتائج ناطق اعداد والے قاعدہ پر بھی پوری طرح لاگو ہوں گے۔

مشق 13.2

1۔ قوت نما کے قانونوں کا استعمال کر کے،حل کیجیے اور جواب کو قوت نما کی شکل میں لکھیے:

(i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ (ii) $6^{15} \div 6^{10}$ (iii) $a^3 \times a^2$

(iv) $7^x \times 7^2$ (v) $\left(5^2\right)^3 \div 5^3$ (vi) $2^5 \times 5^5$

(vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $\left(3^4\right)^3$ (ix) $\left(2^{20} \div 2^{15}\right) \times 2^3$

(x) $8^t \div 8^2$

2۔ حل کیجیے اور مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو قوت نما کی شکل میں ظاہر کیجیے:

(i) $\frac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32}$ (ii) $\left[\left(5^2\right)^3 \times 5^4\right] \div 5^7$ (iii) $25^4 \div 5^3$

(iv) $\frac{3 \times 7^2 \times 11^8}{21 \times 11^3}$ (v) $\frac{3^7}{3^4 \times 3^3}$ (vi) $2^0 + 3^0 + 4^0$

(vii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ (viii) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$ (ix) $\frac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$

(x) $\left(\frac{a^5}{a^3}\right) \times a^8$ (xi) $\frac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$ (xii) $\left(2^3 \times 2\right)^2$

3۔ بتائیے صحیح ہے یا غلط اور اپنے جواب کی وضاحت بھی کیجیے:

(i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3 > 5^2$ (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$

(iv) $3^0 = (1000)^0$

4۔ مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو مفرد اجزائے ضربی کی حاصل ضرب کو صرف قوت نما کی شکل میں لکھیے۔

(i) 108 × 192 (ii) 270 (iii) 729 × 64

(iv) 768

5۔ حل کیجیے:

(i) $\frac{\left(2^5\right)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (ii) $\frac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4}$ (iii) $\frac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$

13.5 اعشاریائی عددی نظام (Decimal Number System)

47561 کے پھیلاؤ کو دیکھئے، جس کو ہم پہلے سے جانتے ہیں:

$$47561 = 4\times10000 + 7\times1000 + 5\times100 + 6\times10 + 1$$

اس کو ہم 10 کی قوتوں کا استعمال کرکے قوت نما کی شکل میں ظاہر کرسکتے ہیں۔

اس لیے، $47561 = 4\times10^4 + 7\times10^3 + 5\times10^2 + 6\times10^1 + 1\times10^0$

(نوٹ $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, $10,000 = 10^4$ اور $1 = 10^0$)

آیئے ایک اور عدد کو پھیلا کر لکھتے ہیں:

$$104278 = 1\times100,000 + 0\times10,000 + 4\times1000 + 2\times100 + 7\times10 + 8\times1$$

$$= 1\times10^5 + 0\times10^4 + 4\times10^3 + 2\times10^2 + 7\times10^1 + 8\times10^0$$

$$= 1\times10^5 + 4\times10^3 + 2\times10^2 + 7\times10^1 + 8\times10^0$$

نوٹ کیجیے کہ کیسے 10 کی قوتیں سب سے زیادہ قیمت 5 سے شروع ہوئیں اور ہر مرحلہ پر بائیں سے دائیں کی طرف جاتے ہوئے ایک ایک کم ہوتی گئیں اور 0 پر پہنچ گئیں۔

13.6 بڑے اعداد کو معیاری شکل میں لکھنا (Expressing Large Numbers in the Standard Form)

اب باب کی شروعات پر واپس جایئے۔ ہم نے کہا تھا کہ بڑے اعداد کو بہت آسانی سے قوت نما کا استعمال کر دیکھا جاسکتا ہے۔ ابھی تک ہم نے یہ کر کے نہیں دکھایا ہے۔ اس کو اب ہم کریں گے۔

1۔ ہماری کہکشاں کے مرکز سے سورج 300,000,000,000,000,000,000 m کے فاصلے پر واقع ہے۔

2۔ ہماری کہکشاں میں ستاروں کی تعداد 100,000,000,000 ہے۔

3۔ زمین کا ماس 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg ہے۔

یہ اعداد لکھنے اور پڑھنے میں آسان نہیں ہیں۔ اس کو آسان بنانے کے لیے قوت کے استعمال کی ضرورت ہے۔

مندرجہ ذیل کا مشاہدہ کیجیے:

$$59 = 5.9\times10 = 5.9\times10^1$$

$$590 = 5.9\times100 = 5.9\times10^2$$

$$5900 = 5.9\times1000 = 5.9\times10^3$$

$$59000 = 5.9\times10000 = 5.9\times10^4$$

کوشش کیجیے:

10 کی قوت کا استعمال کر کے قوت نما کی شکل میں پھیلا کر لکھیے:

(i) 172

(ii) 5,643

(iii) 56,439

(iv) 1,76,428

ہم ان سبھی اعداد کو معیاری شکل standard form میں لکھیں گے۔ کوئی بھی عدد 1.0 اور 10.0 کے درمیان اعشاریائی عدد کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ جس میں 1.0 کو 10 کی قوت سے حاصل ضرب بھی شامل ہے۔ عدد کی ایسی شکل کو معیاری شکل کہتے ہیں۔ لہٰذا $5,985 = 5.985 \times 1,000 = 5.985 \times 10^3$ یہ بھی 5,905 کی معیاری شکل ہے۔

نوٹ کہتے کہ 5,905 کو 59.85×100 or 59.85×10^2 کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ لیکن یہ 5,985 کی معیاری شکلیں نہیں ہیں۔ اسی طرح $5,985 = 0.5985 \times 10,000 = 0.5985 \times 10^4$ بھی 5,985 کی معیاری شکل نہیں ہے۔

ہم اب تیار ہیں کہ سبق کے شروع میں آنے والے ایسے بڑے اعداد کو اس شکل میں ظاہر کرنے کے لیے تیار ہیں۔

ہماری کہکشاں کے مرکز سے سورج کا فاصلہ ہے۔

300,000,000,000,000,000,000 m کو لکھ سکتے ہیں ایسے

$$3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000 = 3.0 \times 10^{20} \text{ m}$$

کیا اب آپ 40,000,000,000 کو اسی طریقے سے ظاہر کر سکتے ہیں اس میں صفر کی تعداد گنیے۔ یہ 10 ہیں۔

اس لیے $40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$

زمین کا ماس ہے۔ $= 5,976,000,000,000,000,000,000,000$ kg

$= 5.976 \times 10^{24}$ kg

کیا آپ اس حقیقت کو صحیح مانتے ہیں کہ جب عدد معیاری شکل میں لکھا جاتا ہے تو پڑھنے، سمجھنے اور موازنہ کرنے میں بہت آسان ہوتا ہے۔ بمقابلہ ان اعداد کے جن کو 25 ہندسوں کے ساتھ لکھا جاتا ہے؟

اب، یورینس کا ماس $= 86,800,000,000,000,000,000,000,000$ kg

$= 8.68 \times 10^{25}$ kg

اوپر دونوں میں صرف 10 کی قوت کا موازنہ کر کے بہ آسانی آپ بتا سکتے ہیں کہ یورینس کا ماس زمین سے زیادہ ہے۔

سورج اور زحل کے درمیان کا فاصلہ 1,433,500,000,000 m یا 1.4335×10^{12} m

زحل اور یورینس کے درمیان کا فاصلہ 1,439,000,000,000 m یا 1.439×10^{12} m

زمین اور سورج کے درمیان کا فاصلہ 149, 600,000,000 m یا 1.496×10^{11}m

کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ تینوں فاصلوں میں سے کون سا کم ترین ہے؟

مثال 13 مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں لکھیے۔

(i) 5985.3 (ii) 65,950

(iii) 3,430,000 (iv) 70,040,000,000

حل

(i) $5985.3 = 5.9853\times1000 = 5.9853\times10^3$

(ii) $65,950 = 6.595 \times 10,000 = 6.595\times10^4$

(iii) $3,430,000 = 3.43\times1,000,000 = 3.43\times10^6$

یادرکھنے کی ایک بات یہ ہے کہ کسی دیے ہوئے عدد کی معیاری شکل میں اعشاریائی نقطہ کے بائیں جانب ہندسوں کی تعداد میں سے 1 گھٹانے پر 10 کی قوت حاصل ہوتی ہے۔ لہٰذا 70,040,000,000 میں کوئی اعشاریائی نقطہ نظر نہیں آرہا ہے: ہم اس کو (دائیں جانب) آخری سرے پر مان لیتے ہیں۔ وہاں سے بائیں سرے تک مقام یا ہندسوں کی تعداد 11 ہے۔ معیاری شکل میں 10 کی قوت 10=1–11 ہے۔ 5985.3 میں اعشاریائی نقطہ کے بائیں جانب چار ہندسے ہیں اور اس لیے معیاری شکل 10 کی قوت 3=1–4 ہے۔

مشق 13.3

1۔ مندرجہ ذیل اعداد کو پھیلی ہوئی شکل میں لکھیے۔

279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2۔ مندرجہ ذیل پھیلی ہوئی اشکال میں ہر ایک کے لیے عدد معلوم کیجیے۔

(a) $8\times10^4 + 6\times10^3 + 0\times10^2 + 4\times10^1 + 5\times10^0$

(b) $4\times10^5 + 5\times10^3 + 3\times10^2 + 2\times10^0$

(c) $3\times10^4 + 7\times10^2 + 5\times10^0$

(d) $9\times10^5 + 2\times10^2 + 3\times10^1$

3۔ مندرجہ ذیل اعداد کو معیاری شکل میں لکھیے۔

(i) 5,00,00,000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000

(iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4۔ مندرجہ ذیل بیانات میں آنے والے اعداد کو معیاری شکل میں ظاہر کیجیے۔

(a) زمین اور چاند کے درمیان کا فاصلہ 384,000,000 m ہے۔

(b) خلا میں لائٹ کی رفتار 300,000,000 m/s ہے۔

(c) زمین کا قطر 1,27,56,000 m ہے۔

(d) سورج کا قطر 1,400,000,000 m ہے۔

(e) ایک کہکشاں میں تقریباً 100,000,000,000 ستارے ہیں۔

(f) اندازاً یہ دنیا 12,000,000,000 سال پرانی ہے۔

(g) کہکشاں کے مرکز سے سورج کا فاصلہ اندازاً 300,000,000,000,000,000,000 m ہے۔

(h) پانی کی ایک بوند جس کا وزن 1.8 gm ہے میں 60,230,000,000,000,000,000,000 مالیکیول (چھوٹے ذرات)

پائے جاتے ہیں۔

(i) زمین پر1,353,000,000 کعب کلومیٹر حصہ پر سمندر کا پانی ہے۔

(j) مارچ 2001 میں ہندوستان کی آبادی تقریباً 1,027,000,000 تھی۔

ہم نے کیا سیکھا

1۔ بہت بڑے اعداد کو پڑھنا، سمجھنا ان کا موازنہ کرنا بہت مشکل ہے۔ ان سب کو آسان بنانے کے لیے ہم قوت نما کا استعمال کرتے ہیں۔ بہت سے بڑے اعداد کو چھوٹی شکل میں لکھنے کے لیے۔

2۔ کچھ اعداد کی قوت نما کی شکلیں ذیل میں دی گئیں ہیں (اس کو 10 کی قوت 4 کہتے ہیں) $10,000 = 10^4$

$243 = 3^5,\ 128 = 2^7$

یہاں، 10, 3 اور 2 قاعدے میں جہاں 5, 4 اور 7 ان کے بالترتیب قوت نما ہیں۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ 10,000 کی 4^{th} قوت ہے، 10, 243 کی 5^{th} قوت وغیرہ۔

3۔ قوت نما کی شکل میں اعداد کچھ قوانین کو مانتے ہیں۔ جو ہیں: کسی بھی غیر صفر صحیح اعداد a اور b مکمل اعداد m اور n کے لیے،

(a) $am \times an = am + n$

(b) $am \div an = am - n, \qquad m > n$

(c) $(am)n = amn$

(d) $am \times bm = (ab)m$

(e) $am \div bn = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(f) $a^0 = 1$

(g) (-1) جفت عدد $= 1$

(-1) طاق عدد $= -1$

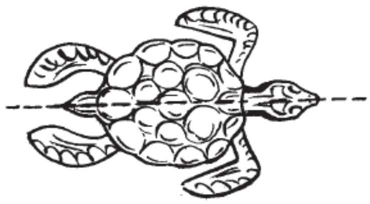
باب 14

تشاکل

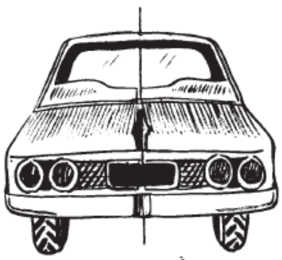
4714CH14

14.1 تعارف (Introduction)

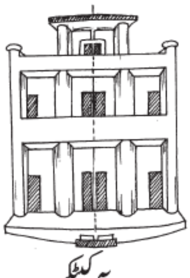
تشاکل جیومیٹری کا ایک بہت ہی اہم تصور ہے۔ جس کا مظاہرہ قدرت نے بڑی فراخدلی سے کیا ہے۔ اور تقریباً سرگرمی کے ہر میدان میں اس کا استعمال ہوتا ہے۔ آرٹسٹ پیشہ ور لوگ، کپڑوں اور زیورات کے ڈیزائن بنانے والے، کار بنانے والے اور بھی دوسرے بہت سے لوگ تشاکل کے تصور کی مدد لیتے ہیں۔ شہد کی مکھیوں کا چھتہ، پھول، پتیاں، مذہبی علامتیں، پائیدان اور رومال ہر جگہ آپ تشاکل کے ڈیزائن دیکھیں گے۔



قدرت



انجینیرنگ

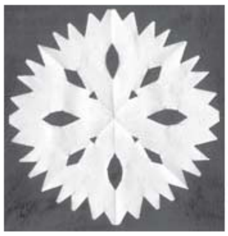


آرکیٹکچر

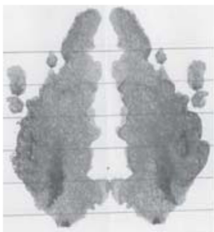
آپ اپنی پہلی جماعت میں خط تشاکل کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔

ایک شکل ایک خط تشاکل ہوتا ہے اگر کوئی ایسا خط ہے جس پر ہم اس تصویر کو موڑیں تو تصویر کے دونوں حصے ایک دوسرے پر منطبق ہوجائیں۔

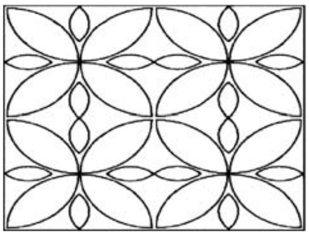
آپ شاید ان تصورات کو دہرانا پسند کریں گے۔ یہاں پر کچھ سرگرمیاں دی گئی ہیں جو آپ کی مدد کریں گی۔



کاغذ کو کاٹ کر ڈیزائن بنائیے جو تشاکل میں ہوں



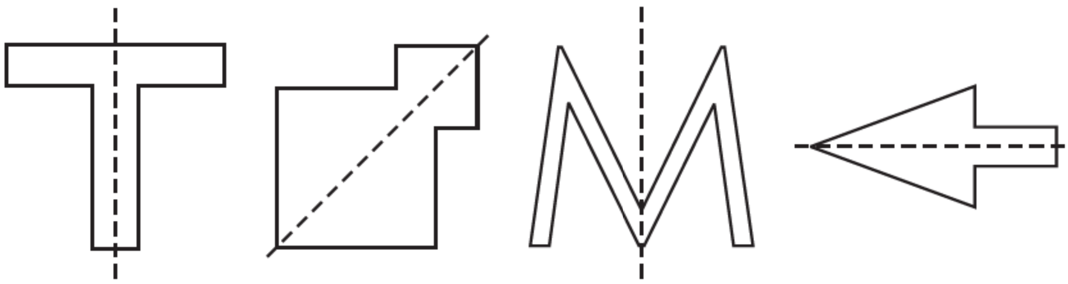
روشنائی کی مدد سے کچھ رنگین پر لگے شیطان



تصویروں کی ایک ایسی البم بنائیے جس میں کاغذ کے تشاکلی ڈیزائن ہوں

آپ اپنے جمع کیے گئے ڈیزائنوں میں خط تشاکل کو پہچاننے میں دلچسپی لیجیے۔ (آپ اس کو محور بھی کہہ سکتے۔)

آیئے اب ہم تشاکل کے اپنے تصورات کو کچھ اور تقویت دیتے ہیں۔ مندرجہ ذیل اشکال پر غور کیجیے جن میں خط تشاکل نقطہ دار خطوط سے دکھائے گئے ہیں۔



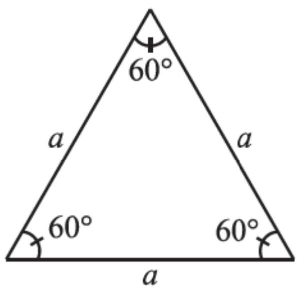
شکل 14.1

14.2 منظّم کثیر ضلعی کے لیے خط تشاکل (Lines of Symmetry for Regular Polygons)

آپ جانتے ہیں کہ کثیر ضلعی بہت سے قطعات خط سے بننے والی بند شکل ہوتی ہے۔ وہ کثیر ضلعی جو کم سے کم قطعات خط سے مل کر بنتا وہ مثلث (triangle) ہے۔ (کیا اس سے بھی کم قطعات سے ملا کر آپ کوئی کثیر ضلعی بنا سکتے ہیں؟ اس کے بارے میں سوچیے۔)

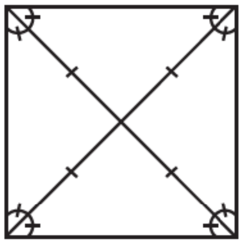
لہٰذا، تین اضلاع کا منظّم کثیر ضلعی مساوی ضلعی مثلث (equilateral triangle) ہے۔ کیا آپ چار ضلعوں کے منظّم کثیر ضلعی کا نام بتا سکتے ہیں؟

ایک مساوی ضلعی مثلث منظّم ہوتا ہے کیونکہ اس کے سبھی اضلاع کی لمبائی یکساں ہے اور اس کے سبھی زاویوں کی پیمائش بھی برابر ہے۔ (شکل 14.2)



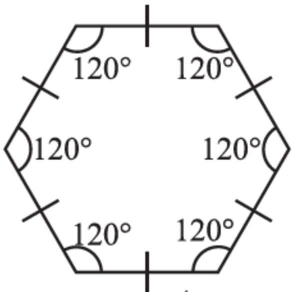
شکل 14.2

مربع بھی منظّم ہے کیونکہ اس کے تمام اضلاع کی لمبائی برابر ہے اور اس کا ہر زاویہ قائمہ ہے۔ (یعنی 90°) اس کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف دکھائی دے رہے ہیں۔

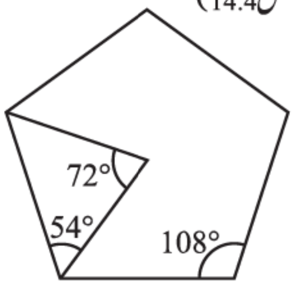


شکل 14.3

اگر ایک باغ ضلعی منظّم ہے تو فطری طور پر، اس کے سبھی اضلاع کی لمبائی برابر ہوگی۔ بعد میں آپ پڑھیں گے کہ اس کے ہر زاویہ کی پیمائش °108 ہوتی ہے۔ (شکل 14.4)



شکل 14.5

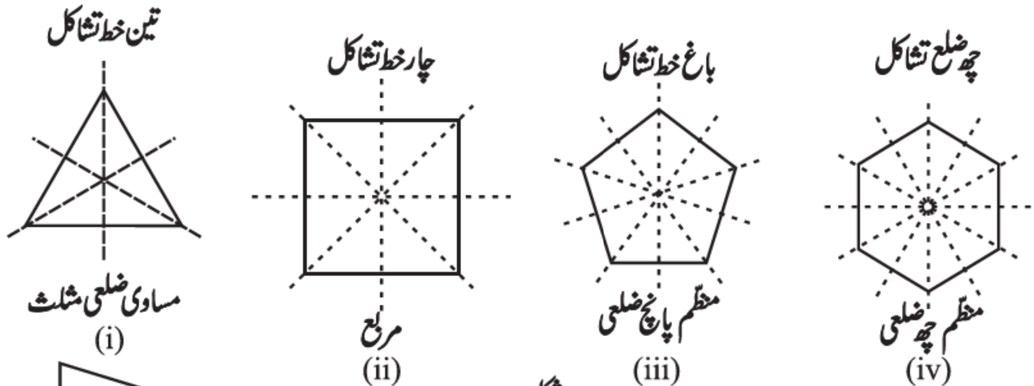


شکل 14.4

ایک چھ ضلعی کے تمام اضلاع برابر ہوتے ہیں اور اس کے ہر زاویے پیمائش °120 ہے۔

ایسی اور بہت سی اشکال کے بارے میں آپ بعد میں پڑھیں گے۔ (شکل 14.5)

منظّم کثیر ضلعی متشاکل اشکال ہیں اور ان کے خط تشاکل بہت دلچسپ ہیں۔ ہر منظّم کثیر ضلعی کے اتنے ہی خط تشاکل ہوتے ہیں جتنے اس کے اضلاع ہوتے ہیں۔ (شکل 14.6 (i) (iv)) ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان کے بہت سارے خط تشاکل ہوتے ہیں۔)



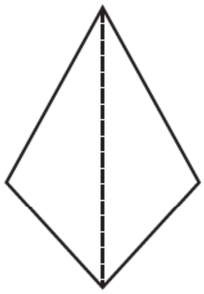
شکل 14.6

شکل 14.7

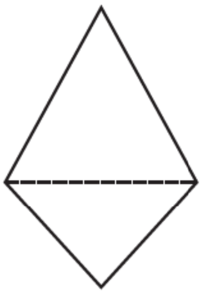
شاید آپ کاغذ موڑ کر اس کی تصدیق کرنا پسند کریں گے۔ کر کے دیکھیے۔

خط تشاکل کا تصور آئینہ کے عکس سے قریبی تعلق رکھتا ہے۔

14.7 آئینہ کا ایک خط، خط تشاکل کا تصور بنانے میں بہت مددگار ثابت ہوگا۔ (شکل 14.8)



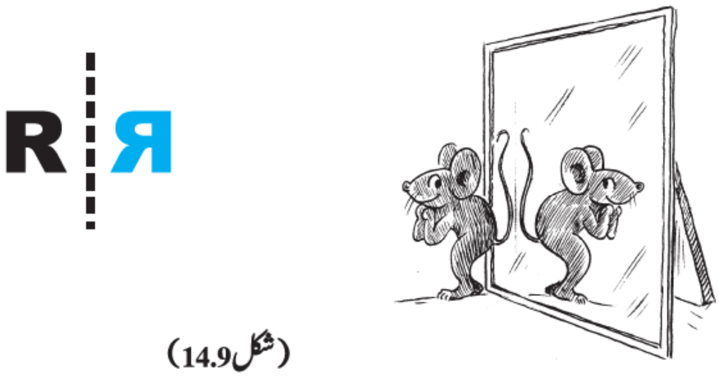
کیا نقطہ دار خط آئینہ کا خط ہے؟ ہاں



کیا نقطہ دار خط آئینہ کا خط ہے؟ نہیں

شکل 14.8

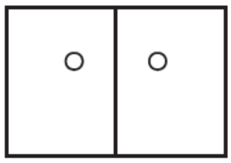
جب آئینہ کے عکس کے ساتھ کام کرتے ہیں تو، اس اضافی حیثیت (orientation) میں دائیں بائیں بدلاؤ پر بہت دھیان دینے کی ضرورت ہے۔ (شکل 14.9)



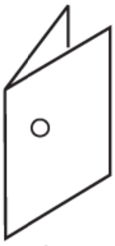
(شکل 14.9)

شکل ایک جیسی ہے مگر دوسری طرف گھومی ہوئی!

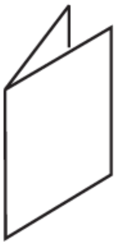
سوراخ بنانے کا یہ کھیل کھیلیے (Play this punching game!)



تشاکل کے موڑ کے حساب سے دو سوراخ



سوراخ کیجیے



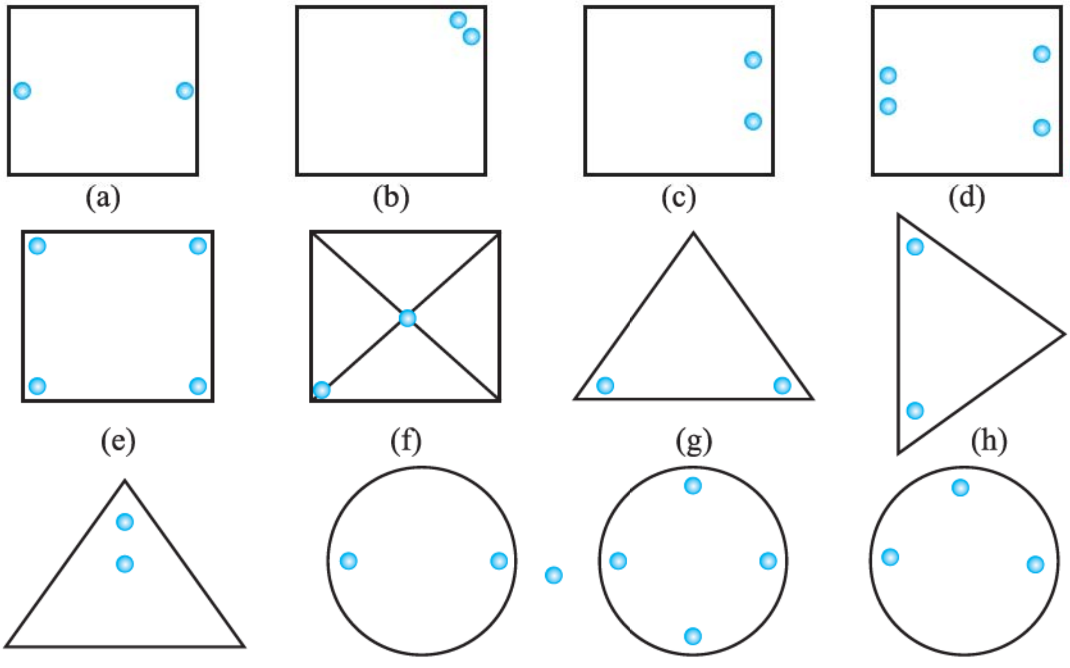
ایک کاغذ کو دو برابر حصوں میں موڑیے

شکل 14.10

مختلف جگہوں پر سوراخوں اور ان کے متناظر خط تشاکل کے بارے میں پڑھیے۔

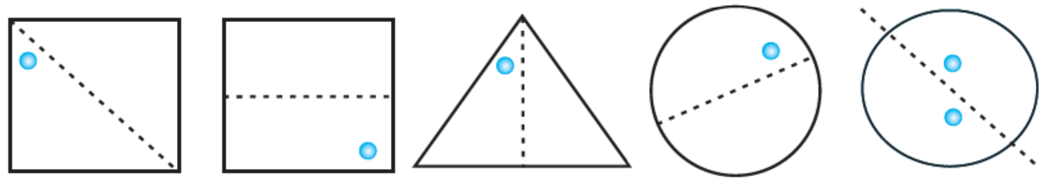
مشق 14.1

1۔ مندرجہ ذیل سوراخ والی اشکال کی نقل کیجیے اور ان کا خط تشاکل معلوم کیجیے۔



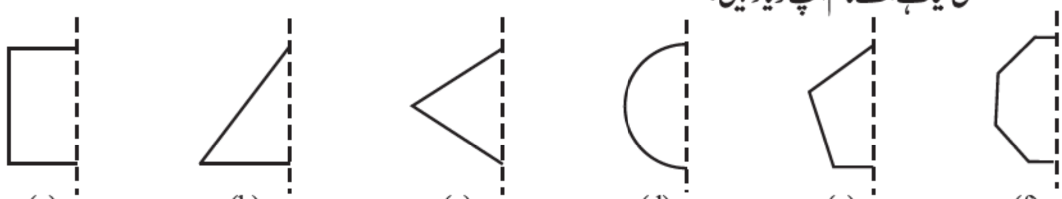
(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (k) (l)

2۔ خط تشاکل دیا گیا ہے۔ دوسرا سوراخ معلوم کیجیے۔



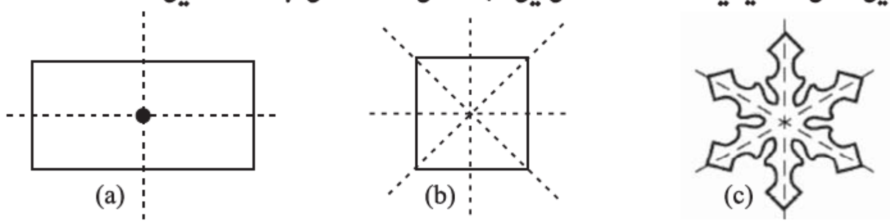
(a) (b) (c) (d) (e)

3۔ مندرجہ ذیل اشکال میں، آئینہ کا خط (یعنی خط تشاکل) نقطہ دار خط کی طرح دیا گیا ہے۔ نقطہ دار (آئینہ) خط میں بننے والے عکس کے لیے ہر شکل کو مکمل کیجیے۔ (آپ نقطہ دار خط پر ایک شیشہ رکھ کر اس کا عکس بھی دیکھ سکتے ہیں۔ کیا ان اشکال، جن کو آپ نے مکمل کیا ہے، کے نام آپ کو یاد ہیں؟



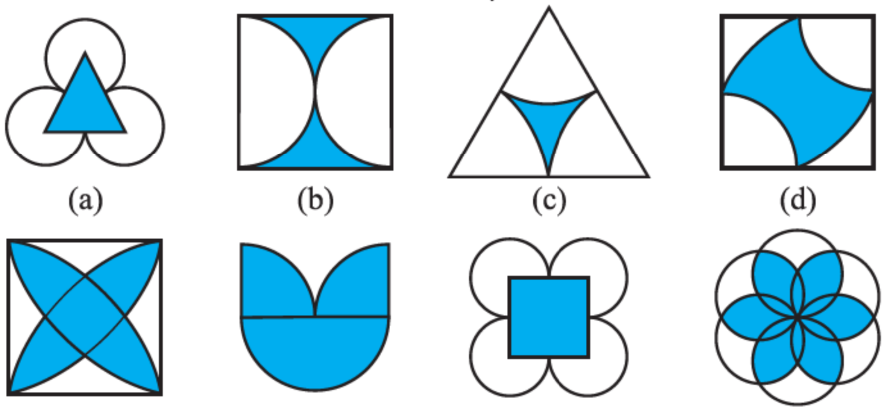
(a) (b) (c) (d) (e) (f)

4۔ مندرجہ ذیل اشکال کے لیے ایک سے زائد خط تشاکل ہیں۔ کچھ اشکال کے خط تشاکل بہت سارے ہیں۔



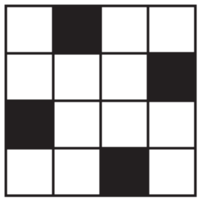
(a) (b) (c)

مندرجہ ذیل میں ہر ایک کے لیے کی خط تشاکل اگر کوئی ہے تو ڈھونڈیے۔



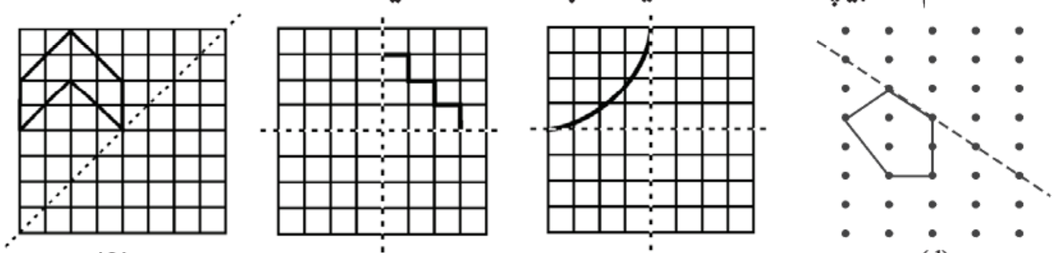
(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h)

5۔ یہاں دی گئی شکل کی نقل اتاریے۔



کوئی بھی ایک وتر خط تشاکل کی طرح لیجیے اور کچھ ایسے مربعوں میں رنگ بھریے جس سے یہ شکل وتر کے لحاظ سے تشاکل میں آ جائے۔ کیا اس کو کرنے کے ایک سے زیادہ طریقے ہیں؟ کیا شکل دونوں وتروں کے لیے تشاکل میں ہے؟

6۔ ڈائیگرام کو نقل کیجیے ہر شکل کو خط (خطوط) آئینہ کے اعتبار سے تشاکل میں لائیے۔



(a) (b) (c) (d)

7۔ مندرجہ ذیل اشکال کے لیے خط تشاکل کی تعداد بتائیے۔

(a) مساوی ضلعی مثلث (b) مساوی الساقین مثلث (c) مختلف ضلعی مثلث
(d) مربع (e) مستطیل (f) معین
(g) متوازی الاضلاع (h) چار ضلعی (i) منظّم کثیر رکنی
(j) دائرہ

8۔ انگریزی حروف تہجی کے کون سے حروف مندرجہ ذیل کے لیے عکسی تشاکل ہیں؟ (بالفاظِ دیگر آئینے میں حاصل ہونے والے عکس سے منسلک تشاکل)

(a) عمودی آئینہ (b) افقی آئینہ (c) افقی و عمودی آئینہ

9۔ ایسی اشکال کی کوئی تین مثالیں دیجیے جس میں کوئی خط تشاکل نہ ہو۔

10۔ مندرجہ ذیل خط کے تشاکل کو آپ اور کیا نام دے سکتے ہیں؟

(a) مساوی الساقین مثلث (b) دائرہ

CHVPJL

14.3 متوار دتشاکل (Rotational Symmetry)

گھڑی کی سوئیاں جب چاروں طرف گھومتی ہیں تو اس کے بارے میں آپ کہہ سکتے ہیں۔؟ آپ کہیں گے کہ یہ گھومتی ہیں۔ گھڑی کی سوئیاں صرف ایک ہی سمت میں گھومتی ہیں۔ اور یہ ایک طے شدہ نقطہ یعنی گھڑی کے مرکز کے نسبت سے گھومتی ہیں۔

گردش (rotation)، گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی طرح سے، کو گھڑی کی سوئیوں کی حرکت کے مطابق (clockwise rotation) سمت کہتے ہیں نہیں تو گھڑی کی سوئیوں کی حرکت کے مخالف سمت کہتے ہیں۔ پنکھے کی پنکھڑیوں کے گھومنے کے بارے میں تو آپ کیا کہیں گے؟ کیا یہ گھڑی کی سوئیوں کی طرح یا گھڑی کی سوئیوں کے برخلاف یا دونوں سمت میں گھومتی ہیں؟

اگر آپ سائیکل کے پہیے کو گھمائیں تو یہ گردش کرنے لگتا ہے۔ یہ کسی بھی سمت میں گردش کر سکتا ہے گھڑی کی سوئیوں کی طرح بھی اور گھڑی کی سوئیوں کے مخالف سمت بھی۔ ہر ایک کے لیے تین مثالیں دیجیے۔

(i) گھڑی کی سوئیوں کی طرح گردش (ii) گھڑی کی سوئیوں کے مخالف گردش (پنا پیر) جب کوئی ایک چیز گھومتی ہے تو اس کی شکل اور سائز تبدیل ہوتا ہے تو گردش میں کوئی بھی چیز کسی طے شدہ نقطہ کے گرد گھومتی ہے۔ اس نقطہ کو گردش کا مرکز کہتے ہیں۔ گھڑی کی سوئیوں کی گردش کا مرکز کیا ہوگا؟ اس کے بارے میں غور کیجیے۔

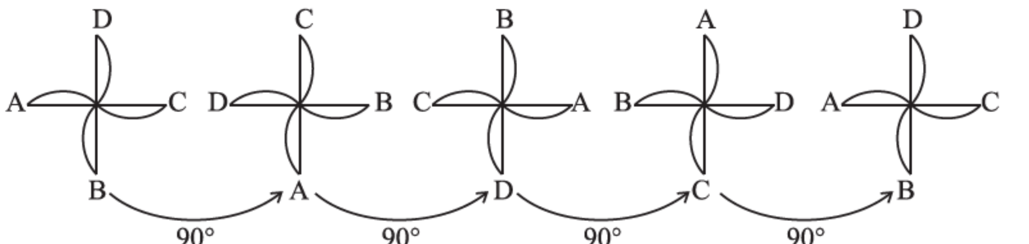
شکل 14.11

گردش کے دوران کوئی چیز جس زاویے پر گھومتی ہے اسے گردش کا زاویہ (angle of roatation) کہتے ہیں۔ جیسا کہ آپ جانتے ہیں کہ پورے چکر (full turn) کا مطلب ہے 360° زاویہ کی گردش۔ مندرجہ ذیل کی گردش کا زاویہ گردش کیا ہوگا۔ (i) آدھا چکر یا (ii) چوتھائی چکر؟

گردش کے آدھے چکر کا مطلب ہے 180° زاویہ کی گردش۔ اور چوتھائی چکر کا مطلب ہے 90° زاویہ کی گردش۔

جب 12 بجتے ہیں تو گھڑی کی سوئیاں ایک جگہ ہوتی ہیں۔ 3 بجے تک منٹ کی سوئی تین چکر مکمل کر لیتی ہے۔ لیکن گھنٹے کی سوئی صرف چوتھائی چکر ہی پورا کرتی ہے۔ 6 بجے آپ ان سوئیوں کی حالت کے بارے میں کیا کہیں گے؟

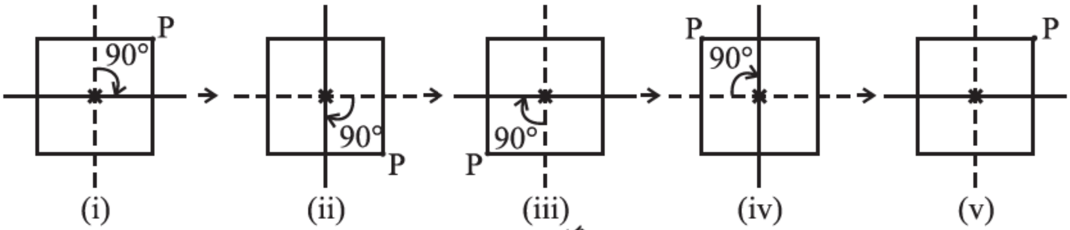
کیا کبھی آپ نے کاغذ کی چکری بنائی ہے؟ شکل میں دکھائی گئی کاغذ کی چکری دیکھنے میں تشاکل لگتی ہے۔ (شکل 14.11)؛ لیکن اس میں آپ دو ایسے آدھے حصے نہیں ملیں گے جو ایک دوسرے پر منطبق ہو سکیں۔ حالانکہ اگر آپ اس کو ایک طے شدہ نقطہ پر 90° کے زاویہ پر گھمائیں گے تو چکری ایک سی نظر آئے گی۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ چکری متوار دتشاکل میں ہے۔



شکل 14.12

ایک پوری گردش میں بالکل بجا طور پر چار حالتیں (four position) ایسی ہوتی ہیں: (°270 ,°180 ,°90 اور °360 کے زاویے کی گرد) جب چکری بالکل ایک سی نظر آتی ہے۔ اس کی وجہ سے ہی، ہم کہتے ہیں اس میں متوارد تشاکل کی چار قسمیں ہیں۔ یہاں متوارد تشاکل کی ایک اور مثال ہے۔

ایک مربع کو دیکھیے جس کے ایک کونے پر نقطہ p ہے۔ (شکل 14.13) آیئے ایک مربع کو اس کے مرکز، جس کی نشاندہی x سے کی گئی ہے، کی نسبت ایک چوتھائی گھمایئے۔



شکل 14.13

تصویر (i) 14.13 شروعاتی حالت ہے۔ °90 کے زاویہ سے مرکز نسبت گھمانے پر شکل (ii) 14.13 پر پہونچے گی۔ اب p کی حالت کو نوٹ کیجیے پھر °90 زاویہ پر گھمانے سے شکل (iii) 14.13 حاصل ہوگی۔ اسی طریقے سے جب آپ چار بار ایک چوتھائی گھماؤ پورا کریں گے تو مربع اپنی ابتدائی حالت پر واپس آجائے گا۔ اب یہ تصویر (i) 14.13 کے جیسا ہی نظر آرہا ہے۔ اس کو نقطہ p کی حالتوں کی مدد سے دیکھا جاسکتا ہے۔

لہٰذا ایک مربع اپنے مرکز کی نسبت سے 4 قسم (order) کی متوارد تشاکل رکھتا ہے۔ مشاہدہ کیجیے اس حالت میں:

(i) تشاکل کا مرکز مربع کا مرکز ہے۔

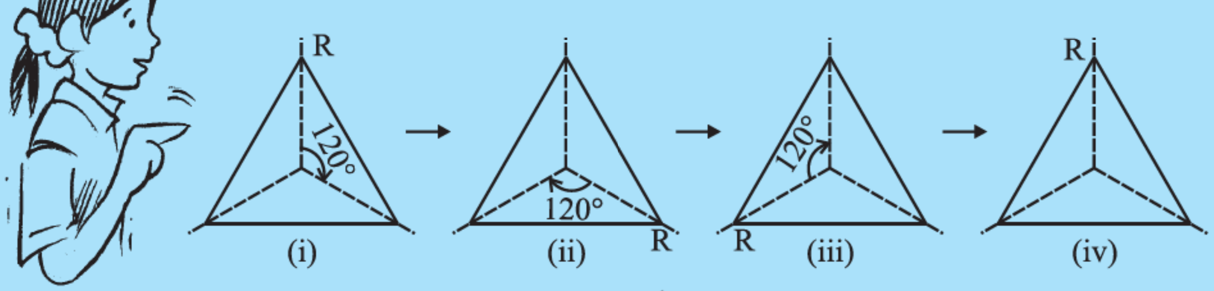
(ii) زاویۂ گردش °90 ہے۔

(iii) گردش کی سمت گھڑی کی سوئیوں کی حرکت کی سمت ہے۔

(iv) متوارد تشاکل کی قسم (order) 4 ہے۔

کوشش کیجیے:

1۔ (a) کیا اب آپ مساوی ضلعی مثلث کے لیے متوارد تشاکل کی قسم (order) بنا سکتے ہیں؟



شکل 14.14

(b) جب اس مثلث کو اس کے مرکز کی نسبت 120° کے زاویہ پر گھمایا جائے تو کتنی بار وہ ایسی حالت پر آئے گا جہاں وہ ایک جیسے نظر آئیں؟

2۔ مندرجہ ذیل اشکال (شکل 14.15) میں سے کن اشکال کا تشاکل نشان دہی سے متوارد ہے؟

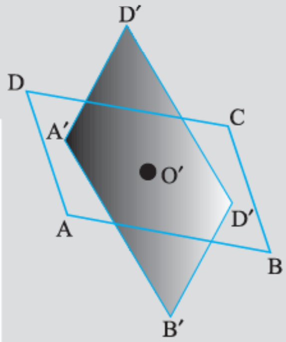
شکل 14.15

اسے کیجیے

دو ہو بہو ایک سے متوازی الاضلاع جن میں ایک ABCD ایک کاغذ پر اور دوسرا A' B' C' D' ایک ایسی شیٹ جس کے آر پار دکھائی دے، پر بنائیے۔ ان کے دونوں وتروں کے نقطہ تقاطع کو بالترتیب O اور O' کے نام دیجیے۔ (شکل 14.16)۔

متوازی الاضلاع کو اس طرح رکھیے کہ A' ،A پر، B' ،B پر وغیرہ آئیں۔ تب O' ،O پر آئے گا۔

شکل میں نقطہ O پر ایک پن لگائیے۔ اب آر پار دیکھنے والی شیٹ کو گھمائیے۔ ایک پورا چکر کاٹنے میں دونوں اشکال ایک دوسرے پر کتنی بار منطبق ہوئیں؟ ہر چیز قسم 1 کا متوارد تشاکل رکھتی ہے، کیونکہ یہ 360° (یعنی ایک پورا چکر) کا چکر پورا کرنے کے بعد اپنی ابتدائی جگہ پر آ جاتی ہے۔ ایسی صورت حال ہماری دلچسپی کا باعث نہیں ہے۔



شکل 14.16

آپ کے چاروں طرف بہت قسم کی اشکال ہیں۔ جو متوارد تشاکل رکھتی ہیں۔ (شکل 14.17)

(i) پھل (ii) سڑک کا نشان (iii) پہیہ

شکل 14.17

مثال کے طور پر، جب آپ کچھ خاص پھلوں کو کاٹتے ہیں، تو سامنے آنے والی سطح ایسی اشکال ہوتی ہیں، جو متوارد تشاکل میں ہوتی ہیں۔ جب آپ اس پر دھیان دیں گے، تو آپ حیران ہو جائیں گے۔ (شکل 14.17(i))

ایسی بہت سی علامتیں سڑکوں پر بھی ملتی ہوتی ہیں جو متوارد تشاکل رکھتی ہیں۔ اگلی بار جب آپ کسی مصروف سڑک پر جائیں تو سڑکوں پر لگی ایسی علامتوں کو پہچانئے: اور معلوم کیجیے کہ ان کا متوارد تشاکل کس قسم (order) کا ہے۔ (شکل 14.17(ii))

متوارد تشاکل کی کچھ اور مثال سوچیے۔ ہر حالت میں بحث کیجیے:

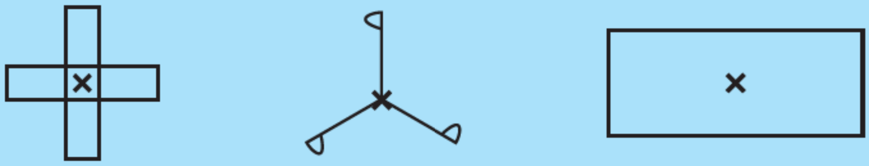
(i) گردش کا مرکز (ii) زاویۂ گردش

(iii) گردش کی وہ سمت جس میں وہ اثر انداز ہو رہا ہے۔ اور

(iv) متوارد تشاکل کی قسم (order)

کوشش کیجیے:

دی گئی اشکال میں لگائے گئے نشان کی نسبت سے متوارد تشاکل کی قسم (order) بتائیے۔

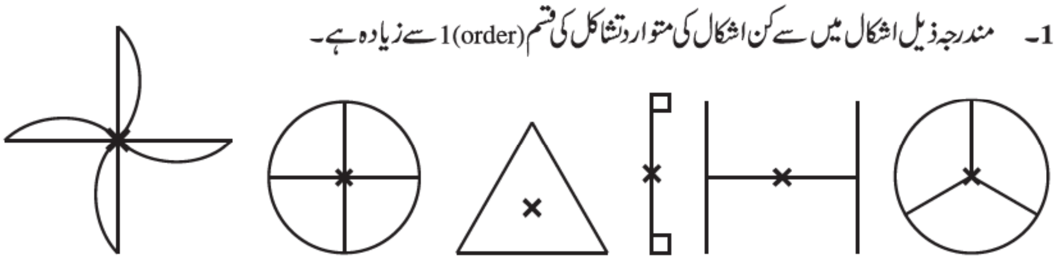


(i) (ii) (iii)

شکل 14.18

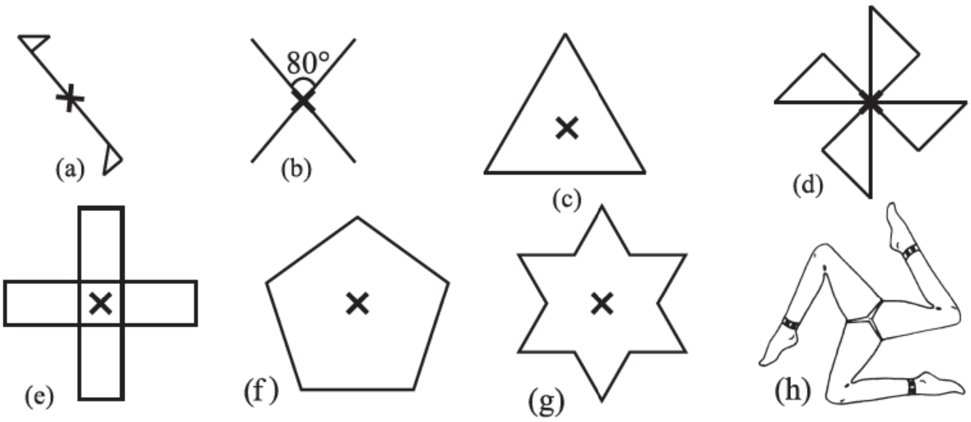
مشق 14.2

1۔ مندرجہ ذیل اشکال میں سے کن اشکال کی متوارد تشاکل کی قسم (order) 1 سے زیادہ ہے۔



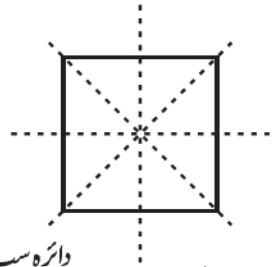
(a) (b) (c) (d) (e) (f)

2۔ ہر ایک شکل کے لیے متوارد تشاکل کی قسم (order) بتائیے۔



14.4 خطی تشاکل اور متوارد تشاکل (Line Symmetry And Rotational Symmetry)

اب تک بہت سی اشکال اور ان کے تشاکل دیکھے ہیں۔ اب تک آپ سمجھ گئے ہوں گے کہ کچھ اشکال صرف خطی تشاکل رکھتی ہیں، کچھ متوارد تشاکل رکھتی ہیں اور کچھ خطی اور متوارد تشاکل دونوں ہی رکھتی ہیں۔



شکل 14.19

مثال کے طور پر، مربع شکل کو دھیان سے دیکھیے ۔(شکل 14.19)
اس کے کتنے خط تشاکل ہیں،؟ کیا اس کی کوئی متوارد تشاکل بھی ہے؟
اگر 'ہاں' تو متوارد تشاکل کی قسم (order) کیا ہے؟ اس کے بارے میں سوچیے ۔

دائرہ سب سے زیادہ مکمل متوارد تشاکل والی شکل ہے، کیونکہ یہ اپنے مرکز کے چاروں طرف کسی بھی زاویہ سے گردش کرسکتا ہے وہیں ساتھ ساتھ اس کے خط تشاکل بھی لا محدود ہیں۔ کسی بھی دائرے کے پیٹرن کو دیکھیے ۔ مرکز سے گذرنے والی ہر خط (یعنی ہر قطر) ایک خط (عکس) تشاکل بناتا ہے۔ اور یہ مرکز کی نسبت ہر زاویہ پر متوارد تشاکل بھی رکھتا ہے۔

اسے کیجیے

انگریزی حروف تہجی کے کچھ حروف کی تشاکل کی ساخت پرکشش ہوتی ہیں۔ کون سے بڑے حروف (capital letter) کی صرف ایک خط تشاکل ہے (جیسے E)؟ کون سے بڑے حروف کی متوارد تشاکل کی قسم (order) 2 ہے (جیسے I)؟
اس طریقے سے سوچتے ہوئے، آپ مندرجہ ذیل جدول کو بھرنے کے قابل ہو جائیں گے۔

حروف	خط تشاکل	خط تشاکل کی تعداد	متوارد تشاال	متوارد تشاکل کی قسم
Z	نہیں	0	ہاں	2
S				
H	ہاں		ہاں	
O	ہاں		ہاں	
E	ہاں			
N			ہاں	
C				

مشق 14.3

1۔ کوئی دو اشکال کے نام لکھیے جو کہ خط تشاکل اور متوارد تشاکل دونوں رکھتی ہوں۔
2۔ جہاں کہیں ممکن ہو، ایک رَف اسکیچ بنائیے۔
(i) ایک ایسا مثلث جس کی دونوں یعنی خط تشاکل اور 1 سے زیادہ قسم (order) کا متوارد تشاکل ہوں۔

(ii) ایک مثلث جس کی صرف خط تشاکل ہو لیکن متوارد تشاکل 1 سے زیادہ قسم (order) کا نہ ہو۔

(iii) ایک چار ضلعی جس کا متوارد تشاکل تو ایک سے زیادہ قسم (order) کا ہو مگر خط تشاکل نہ ہو۔

(iv) ایک چار ضلعی جس کا خط تشاکل تو ہو مگر متوارد تشاکل ایک سے زیادہ قسم کا نہ ہو۔

3۔ اگر ایک شکل کے دو یا دو سے زیادہ خط تشاکل ہوں تو کیا اس کا متوارد تشاکل 1 سے زیادہ قسم (order) کا ہوگا؟

4۔ خالی جگہیں بھریے۔

شکل	گردش کا مرکز	گردش کا قسم	گردش کا زاویہ
مربع			
مستطیل			
معین			
مساوی ضلعی مثلث			
منظّم چھ ضلعی			
دائرہ			
نصف دائرہ			

5۔ ایسے چار ضلعی کا نام بتائیے جو خط اور متوارد تشاکل رکھتا ہو۔

6۔ ایک شکل اپنے مرکز کی نسبت سے $60°$ کے زاویہ پر گھمانے سے بالکل اپنی ابتدائی حالت میں نظر آتی ہے۔ کون سے دوسرے زاویہ کے لیے یہ دوبارہ ہوگا۔

7۔ کیا ہم 1 سے زائد قسم (order) کی متوارد تشاکل رکھ سکتے ہیں، جن کا گردشی کا زاویہ ہے:

(i) $45°$? (ii) $17°$?

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ ایک شکل خط تشاکل رکھتی ہے اگر اس کو اس طرح سے موڑا جا سکے کہ تصویر کے دونوں حصے ایک دوسرے کو منطبق کریں۔

2۔ منتظم کثیر ضلعی کے تمام اضلاع برابر ہوتے ہیں اور سبھی زاویے بھی برابر ہوتے ہیں۔ ان کے بہت سارے (یعنی ایک سے زیادہ) خط تشاکل ہوتے ہیں۔

منظّم کثیر ضلعی	منظّم چھ ضلعی	منظّم پانچ ضلعی	مربع	مساوی ضلعی مثلث
منظّم کثیر ضلع				

3۔ ہر منظم کثیر ضلعی کے اتنے ہی خط تشاکل ہوتے ہیں جتنے اس کے اضلاع ہوتے ہیں۔

4۔ آئینہ کا عکس تشاکل تک پہنچاتا ہے، جس کے لیے دائیں بائیں کا دھیان رکھنا چاہیے۔

5۔ گردش چیزوں کو ایک طے شدہ نقطہ کی نسبت میں گھماتی ہے۔

طے شدہ **نقطہ گردش کا مرکز** ہے۔

وہ زاویہ جس سے کوئی چیز گھومتی ہے **گردش کا زاویہ** کہلاتا ہے۔

آدھا چکر کا مطلب 180° کی گردش؛ ایک چوتھائی چکر کا مطلب ہے 90° کی گردش۔ گردش گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی سمت میں ہوتی ہے یا پھر گھڑی کی سوئیوں کی مخالف سمت میں ہوتی ہے۔

6۔ اگر، ایک گردش کے بعد، ایک چیز بالکل ویسی ہی نظر آئے جیسی وہ تھی، تو ہم کہتے ہیں کہ یہ **متوار دتشاکل** رکھتی ہے۔

7۔ ایک **مکمل** چکر (360° کا) میں جتنی بار بھی کوئی چیز بالکل ویسی ہی لگے جیسی وہ تھی، تو **متوار دتشاکل** کی قسم (order) کہلاتی ہے۔ مثلاً، مربع کی تشاکل کی قسم (order)4 ہے جب کہ مساوی ضلعی مثلث کی یہ 3 ہے۔

8۔ کچھ اشکال کا صرف ایک خط تشاکل ہوتا ہے، جیسے حرف E، کچھ کا صرف متوار دتشاکل ہوتا ہے۔ جیسے حرف S اور کچھ کے دونوں ہوتے ہیں جیسے صرف H

تشاکل کو پڑھنا اس لیے اہم ہے کیونکہ اس کا استعمال روزمرّہ میں بہت زیادہ ہے۔ اور بھی زیادہ ہے کیونکہ اس کی مدد سے بہت ہی خوبصورت ڈیزائن بنائے جا سکتے ہیں۔

باب 15

ٹھوس اشکال کو متصور کرنا

4714CH15

15.1 تعارف: مستوی اشکال اور ٹھوس اشکال
(Introduction: Plane Figures and Solid Shapes)

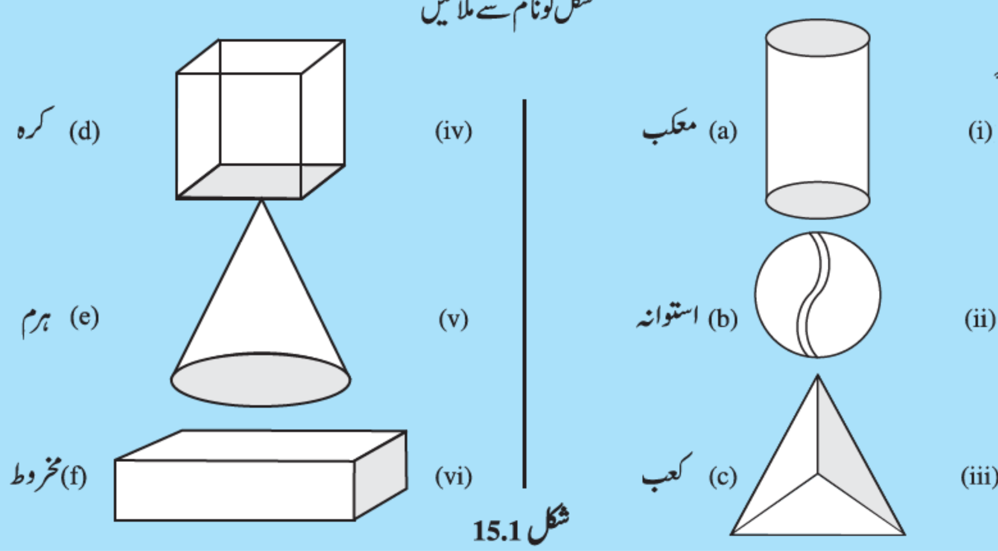
اس سبق میں، آپ جن اشکال کو دیکھتے ہیں ان کی درجہ بندی ابعاد (dimension) کے اعتبار سے کریں گے۔

ہماری روزمرہ زندگی میں، ہم اپنے چاروں طرف بہت سی چیزیں دیکھتے ہیں جن کی شکل مختلف ہوتی ہے۔ جیسے کتابیں، گیندیں، آئس کریم کے کون، وغیرہ۔ ان چیزوں میں زیادہ تر میں ایک چیز مشترک ہے کہ ان سبھی چیزوں میں کچھ لمبائی، چوڑائی اور اونچائی یا گہرائی پائی جاتی ہے۔ یعنی یہ سبھی چیزیں فضا میں کچھ جگہ گھیرتی ہیں اور سہ ابعادی ہیں۔ اس وجہ سے ان کو سہ ابعادی اشکال کہا جاتا ہے۔

کیا آپ کو کچھ سہ ابعادی اشکال یاد ہیں (یعنی ٹھوس اشکال) جن کو آپ نے گزشتہ کلاسوں میں دیکھا ہے؟

کوشش کیجیے:

شکل کو نام سے ملائیں

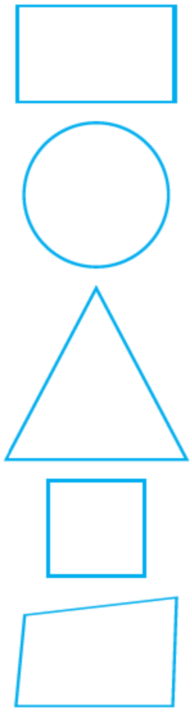


شکل 15.1

ان میں سے ہر شکل جیسی کچھ چیزوں کی پہچان کرنے کی کوشش کیجیے۔

اسی بات کی بنیاد پر، ہم کہہ سکتے ہیں کہ کاغذ پر بنائی گئی اشکال (شکلیں) جو صرف لمبائی اور چوڑائی رکھتی ہیں ان کو دو ابعادی (یعنی مستوی) اشکال کہتے ہیں۔ ہم پہلے بھی دیکھ چکے ہیں۔

2 ابعادی اشکال کو ان کے ناموں سے ملائیے۔



(i) — (a) دائرہ

(ii) — (b) مستطیل

(iii) — (c) مربع

(iv) — (d) چار ضلعی

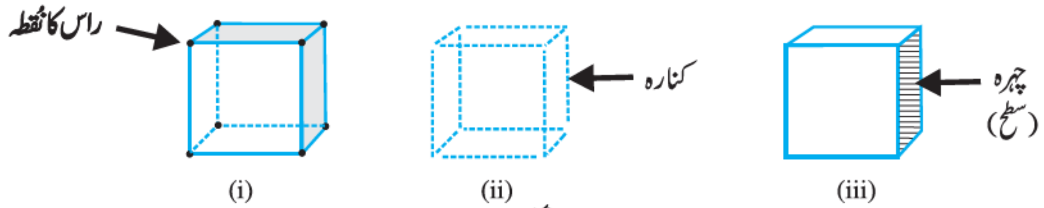
(v) — (e) مثلث

شکل 15.2

نوٹ: ہم دو ابعادی کو چھوٹی شکل میں 2–D(2-dimension) اور سہ ابعادی کو 3–D لکھ سکتے ہیں۔

15.2 رخ، کنارے اور راس (Faces, Edges and Vertices)

کیا آپ کو پہلے پڑھی ٹھوس اشکال کے رخ، کنارے اور راس یاد ہیں؟ یہاں آپ ان کو ایک کعب کے لیے دیکھیے۔



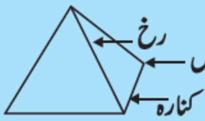
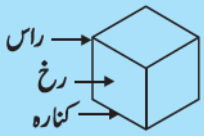
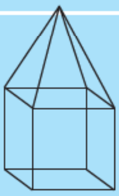
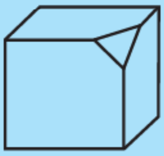
شکل 15.3

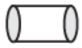
کعب کے آٹھ کونے اس کے راسیں ہیں 12 قطعات خط جو کعب کا ڈھانچہ بناتے ہیں اس کے کنارے کہلاتے ہیں۔ 6 ہموار مربع سطحیں (flat square surfaces) جو کعب کی کھال ہے۔ اس کے رخ ہیں۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل جدول کو مکمل کیجیے

جدول 15.1

				
رخ (F)	6	4		
کنارے (E)	12			
راس (V)	8	4		

کیا آپ نے دیکھا کہ سہ ابعادی اشکال کے رخ کو ہم دوابعادی اشکال کی طرح پہچان سکتے ہیں؟ مثلاً استوانہ کے دورخ ہوتے ہیں جو دائرہ ہیں اور ہرم  اس طرح ہے جس کے رخ مثلث کی طرح ہوتے ہیں۔

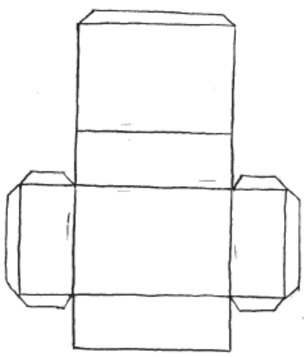
ہم دیکھنے کی کوشش کریں گے کہ ان میں سے کچھ سہ ابعادی اشکال کو کیسے دوابعادی سطح یعنی کاغذ پر کیسے متصور کیا جا سکتا ہے۔

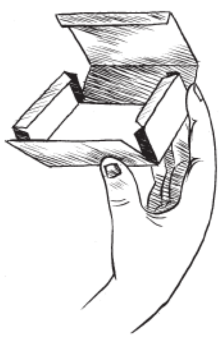
اس کو کرنے کے لیے ہمیں ہم سہ ابعادی چیزوں سے اچھی طرح واقف ہونا پڑے گا۔

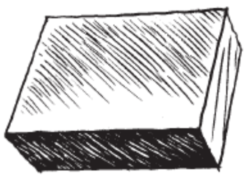
ان چیزوں کو خاکہ (net) کی مدد سے بنانے کی کوشش کیجیے۔

15.3 سہ ابعادی اشکال کو بنانے کے لیے خاکے (خاکے-Nets)
(Nets for Building 3-D Shapes)

گتے کا ایک ڈبہ لیجیے۔ ڈبے کو سیدھا (flat) کرنے کے لیے اس کے کنارے کاٹیے۔ اب آپ کے پاس ڈبے کے لیے خاکہ (net) موجود ہے۔ خاکہ دراصل 2-D میں ایک طرح ڈھانچہ بنانے والا باہری خط ہوتا ہے۔ جب اس کو (شکل (i)14.4)، موڑا جائے گا (شکل (ii)15.4)، تو نتیجتاً 3-D شکل (شکل (iii).15.4) میں ملے گی۔


(i)


(ii)

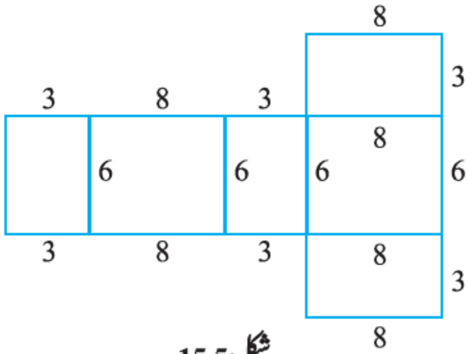

(iii)

شکل 15.4

کناروں کو مناسب طریقے سے الگ کرنے سے آپ کو ایک خاکہ حاصل ہو جاتا ہے۔ کیا اس کا الٹا عمل بھی ممکن ہے؟

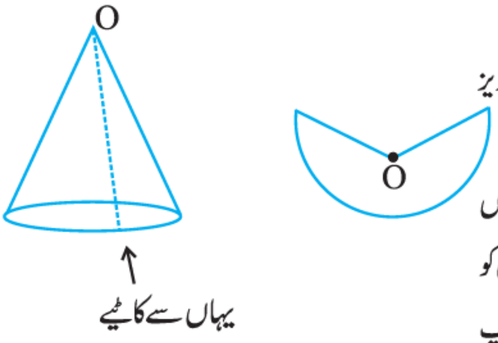
یہاں پر باکس کے لیے خاکے کا ایک پیٹرن دیا گیا۔ (شکل 15.5)

اس خاکے کی توسیعی نقل بنائیے اور اس کی مدد سے مناسب طریقے سے موڑ اور چپکا کر باکس بنائیے۔ (آپ مناسب اکائیوں کا استعمال کر سکتے ہیں)۔ باکس ایک ٹھوس ہے یہ 3-D چیز ہے جس کی شکل مکعب نما ہے۔



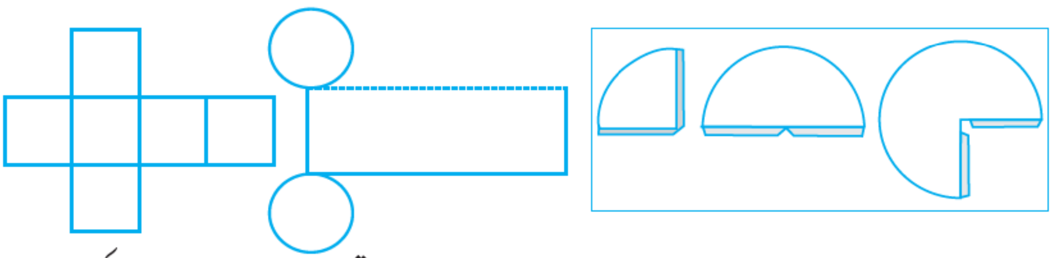
شکل 15.5

اسی طرح، آپ مخروط کے لیے بھی اس کی ترچھی سطح کی کریز (slit) کو کاٹ کر ایک خاکہ بنا سکتے ہیں۔ (شکل 15.6)



شکل 15.6

مختلف اشکال کے لیے آپ کے پاس مختلف خاکے ہیں خاکوں (شکل 15.7) کی توسیع کر کے نقل بنائیے۔ اور دی گئی 3-D اشکال کو بنانے کی کوشش کیجیے (آپ پسند کریں گے گتے کی پٹیوں کو کاغذ کی کلپ سے جوڑ کر موڈلوں کے ڈھانچے بنانا)

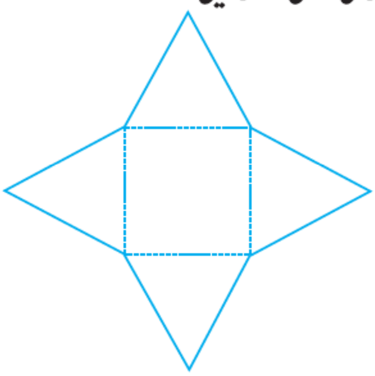


(i) کعب　(ii) استوانہ　(iii) مخروط

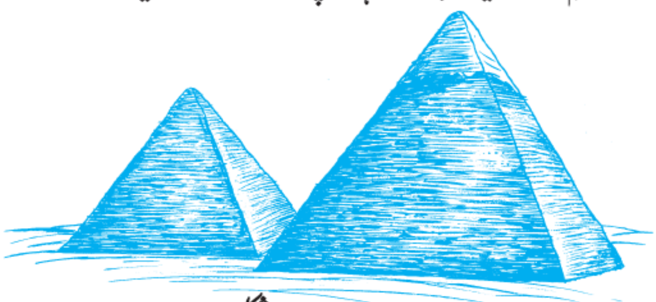
شکل 15 7

ہم مصر میں موجود عظیم اہرام (شکل 15.8) کے جیسے ہرم بنانے کے لیے خاکہ بنانے کی کوشش کر سکتے ہیں۔

ہرم کا قاعدہ ایک مربع ہوتا ہے اور چار رخ مثلث ہوتے ہیں۔



شکل 15.9

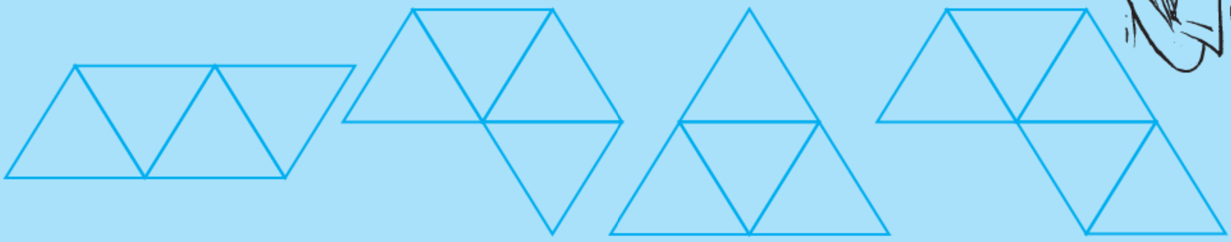


شکل 15.8

دیکھیے کیا آپ شکل (15.9) میں دیے گئے خاکے کی مدد سے اس کو بنا سکتے ہیں؟

کوشش کیجیے:

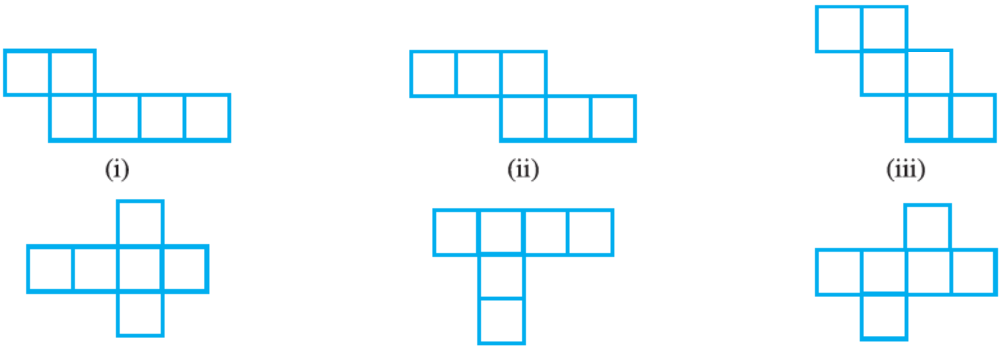
یہاں پر 4 خاکے دیے گئے ہیں۔شکل 15.10) ٹھوس (tetrahedron) بنانے کے لیے ان میں سے دو خاکے صحیح ہیں۔ دیکھیے کیا آپ چار سطحی بناتے دو صحیح خاکے ڈھونڈ سکتے ہیں۔



شکل 15.10

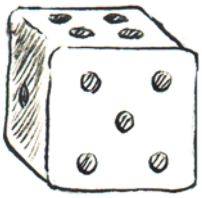
مشق 15.1

1۔ کعب بنانے میں استعمال ہونے والے خاکے پہچانیے۔ خاکوں کی نقلیں کاٹیے اور کوشش کیجیے۔



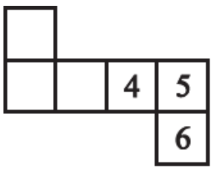
(i) (ii) (iii)

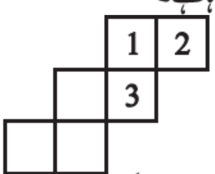
(iv) (v) (vi)

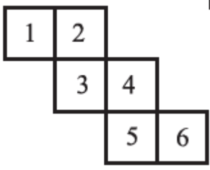


2۔ پانسہ ایک کعب ہوتا ہے جس کے ہر رخ پر ڈاٹس ہوتے ہیں۔ پانسہ کے متقابل رخ کے ڈاٹس کا حاصل جمع ہمیشہ سات ڈاٹس ہوتے ہیں۔

یہاں پر پانسہ (کعب) بنانے کے دو خاکے دیے گئے ہیں؛ ہر مربع میں لکھا گیا عدد اس کے ڈاٹس کی تعداد کو ظاہر کر رہا ہے۔





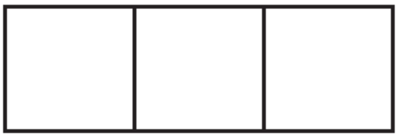


خالی جگہوں پر مناسب اعداد لکھیے۔ یاد رکھیے کہ متقابل رخ کا حاصل جمع 7 ہونا چاہیے۔

3۔ کیا یہ ایک پانسہ کا خاکہ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

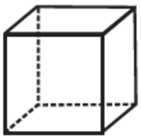
4۔ کعب بنانے کے لیے یہاں ایک نامکمل خاکہ دیا گیا ہے۔ اس کو کم از کم دو مختلف طریقوں سے مکمل کیجیے۔ یاد رکھیے کہ ایک کعب

کے چھ رخ ہوتے ہیں۔ یہاں خاکہ میں کتنے دیے گئے؟ (دو الگ الگ ڈائگرام دیجیے۔ اگر آپ چاہیں تو آپ آسانی کے لیے مربع کاغذ (یا گراف پیپر) کا بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

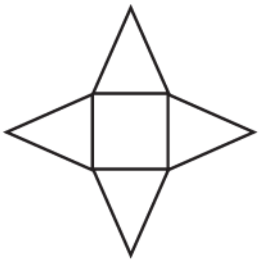


5۔ خاکوں کو مناسب ٹھوسوں سے ملائیے۔

(a)

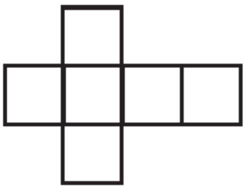


(i)



(b)

(ii)



(c)

(iii)

(d)

(iv)

یہ کھیل کھیلیے

آپ اور آپ کا دوست کمر سے کمر ملا کر بیٹھیے۔ آپ میں سے کوئی ایک 3-D شکل بنانے کے لیے ایک خاکہ پڑھے جب کہ دوسرا اس کو نقل کرنے کی کوشش کرے اور بتائی گئی 3-D چیز کا اسکیچ بنانے یا اس چیز کو بنانے کی کوشش کیجیے۔

15.4 ایک ہموار سطح پر ٹھوس کی ڈرائینگ بنانا (Drawing Solids on a Flat Surface)

شکل 15.11

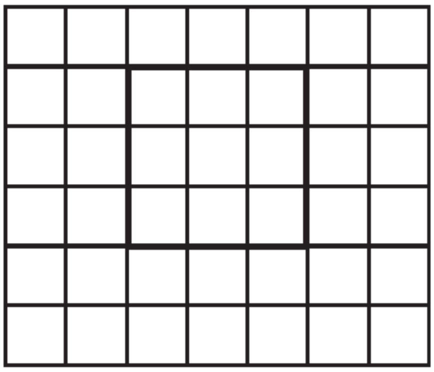
آپ کی ڈرائنگ کی سطح کاغذ ہے، جو کہ ہموار ہے۔ جب آپ ایک ٹھوس چیز کی ڈرائنگ بنائیں، گے تو اس کی سہ ابعادی کو ظاہر کرنے کے لیے ان کا عکس تمثال (images) کہیں نہ کہیں سے مڑ تڑ جاتا ہے۔ یہ ایک بصری خیال ہے۔ یہاں آپ کی مدد کے لیے دو طریقے دیے گئے ہیں۔

15.4.1 ترچھے اسکیچز (Oblique Sketches)

یہاں ایک کعب کی تصویر ہے (شکل 15.11)۔ یہ آپ کو پورا تصور دے رہی ہے کہ ایک کعب سامنے سے کیسا نظر آتا ہے۔ آپ کو کچھ رخ نظر نہیں آرہے ہیں۔ بنائی گئی تصویر میں، لمبائیاں برابر نہیں ہیں، جیسا کہ انہیں ایک کعب میں ہونا چاہیے۔ پھر بھی آپ نے اس کو پہچان لیا کہ ایک کعب ٹھوس چیزوں کے ایسے اسکیچ کو ترچھا اسکیچ (oblique sketch) کہتے ہیں۔

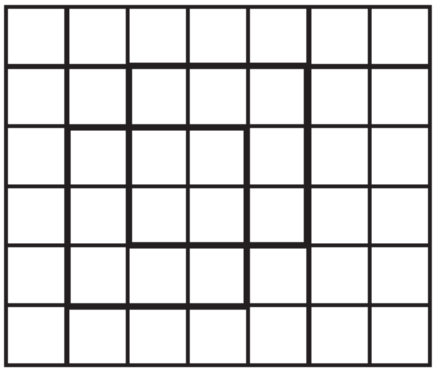
آپ ایسے اسکیچ کیسے بنا سکتے ہیں؟ آیئے اس طریقے کو سیکھنے کی کوشش کیجیے۔

آپ کو ایک مربع (خطوط یا ڈاٹس) والے کاغذ کی ضرورت ہوگی۔ شروع میں ایسے کاغذوں پر بنانے سے آپ کو مشق ہو جاتی ہے پھر آپ کاغذ پر بھی اس کو آرام سے بنا سکتے ہیں۔ ایک 3×3×3 (ہر کنارہ 3 اکائیوں کا) کے کعب کا ایک ترچھا اسکیچ بنانے کی کوشش کیجیے۔



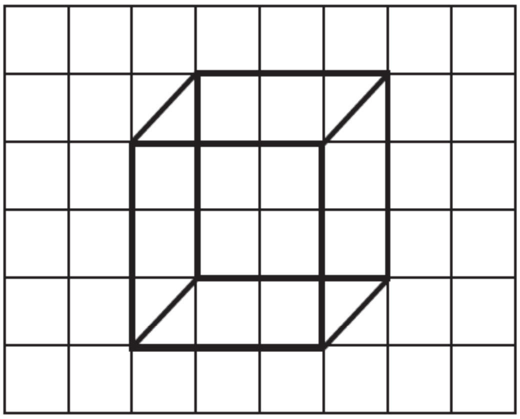
مرحلہ 1

سامنے کا (اگلا) رخ بنایئے



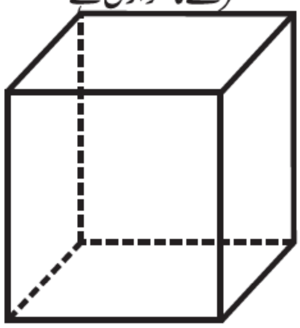
مرحلہ 2

متقابل رخ بنایئے، دونوں رخ کے سائز ایک سے ہونے چاہئیں۔ لیکن یہ اسکیچ پہلے مرحلے کا متوازن ہے



مرحلہ 3

متناظر کونوں کو ملایئے



مرحلہ 4

مرحلہ 4: چنے ہوئے کنارے کے لیے نقطہ دار خطوط کا استعمال کر کے پھر سے بنایئے۔

(یہ ایک رسم ہے) اب اسکیچ تیار ہے۔

شکل 15.12

اوپر دیے گئے ترچھے اسکیچ میں، کیا آپ نے مندرجہ ذیل کو نوٹ کیا؟

(i) سامنے کی سطح اور اس کا متقابل دونوں کے سائز ایک سے ہیں: اور

(ii) کنارے، جو کہ ایک کعب میں برابر ہوتے ہیں، اسکیچ میں بھی برابر نظر آتے ہیں جب کہ کناروں کی پیمائش ایسی نہیں لی گئی ہے۔

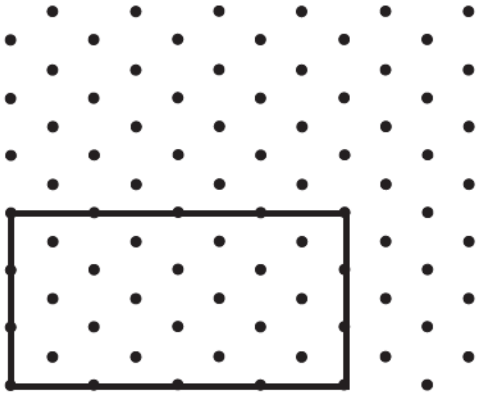
اب آپ مکعب کے لیے ایک ترچھا اسکیچ بنانے کی کوشش کیجیے۔ (یاد رکھیے کہ اس صورت حال رخ مستطیل ہیں۔)

نوٹ آپ ایسے بھی اسکیچ بنا سکتے ہیں جس میں پیمائش دی گئی ٹھوس شکل جیسی ہی ہو۔ ایسا کرنے کے لیے ہم کو ہم ابعادی کاغذ (isometric sheet) کی ضرورت ہوتی ہے۔ ہم ابعادی کاغذ سے ایک مکعب بنایئے جس کی لمبائی 4 سم، چوڑائی 3 سم اور اونچائی 3 سم ہو۔

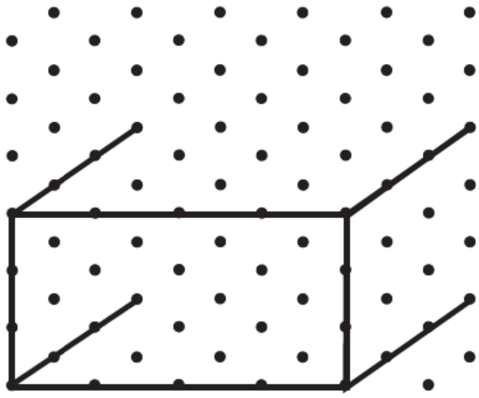
15.4.2 ہم ابعادی اسکیچز (Isometric Sketches)

کیا آپ نے کبھی ہم ابعادی ڈاٹ شیٹ دیکھی ہے؟ (کتاب کے آخر میں اس کا ایک نمونہ دیا گیا ہے) ایسی شیٹ کاغذ کو چھوٹے چھوٹے مساوی ضلعی مثلث جو کہ ڈاٹس یا خطوط سے بنتے ہیں، میں بانٹ دیتی ہے ہے۔

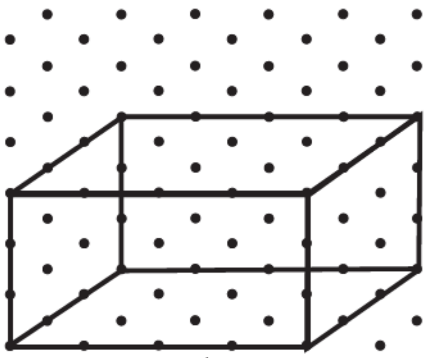
ایسے اسکیچ بنانے کے لیے جس میں پیمائش ٹھوس چیز جیسے ہی ہوں، ہم ابعادی شیٹ کا استعمال کرتے ہیں $3 \times 3 \times 4$ (جس کا مطلب ہے کہ لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بنانے والے کنارے بالترتیب، 3,3,4 اکائیوں کے ہیں)۔ ابعاد کے ایک مکعب کا ایک ہم ابعادی اسکیچ بنایئے۔ (شکل 15.13)



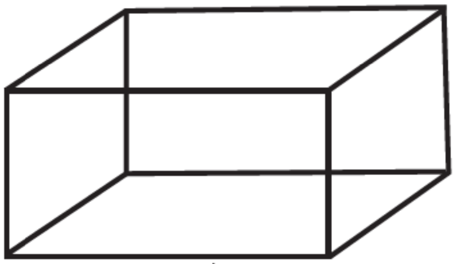
مرحلہ 1
مستطیل کے چاروں کونوں سے چار متوازی خطوط، سامنے والا رخ دکھانے کے لیے ایک مستطیل بنایئے



مرحلہ 2
چار متوازی قطعات جن کی لمبائی 3 اکائی ہو مستطیل کے چاروں کونوں سے شروع کر کے بنایئے۔

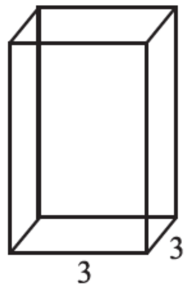


مرحلہ 3
میل کھانے والے کونوں کو مناسب قطعہ خط سے ملایئے



مرحلہ 4
یہ مکعب کا ایک ہم ابعادی اسکیچ ہے۔

شکل 15.13

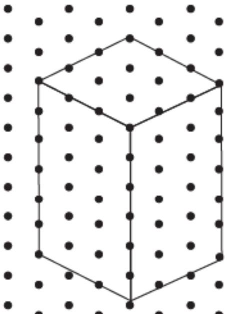


شکل (i) 15.14

نوٹ کیجیے کہ ہم ابعادی اسکیچ میں پیمائش بالکل صحیح سائز کی ہوتی ہے: ایسا ترچھا اسکیچ بنانے میں نہیں ہوتا ہے۔

مثال 1 یہاں مکعب بنانے کا ایک ترچھا اسکیچ دیا گیا ہے۔ ایک ایسا ہم ابعادی اسکیچ بنایئے جو اس سے میل کھائے۔

حل یہاں حل دیا گیا ہے۔ (شکل (15.14(ii)) نوٹ کیجیے کہ کیسے پیمائش کا دھیان رکھا جاتا ہے۔

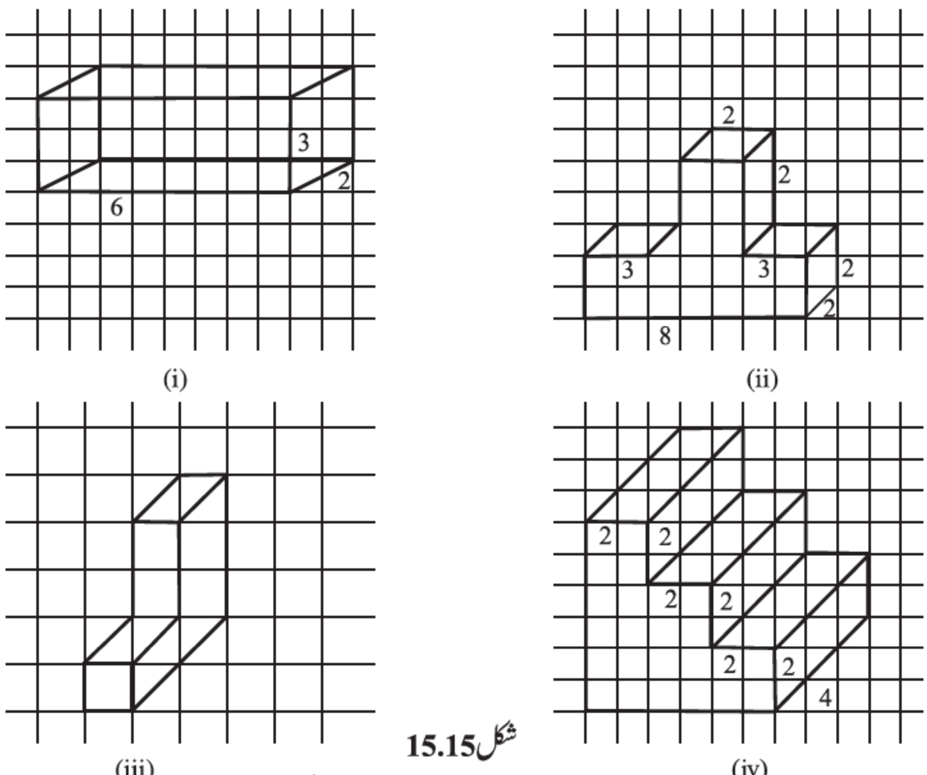


شکل (ii) 15.14

آپ کتنی اکائیاں لیں گے (i) لمبائی کے لیے؟ (ii) چوڑائی کے لیے؟ (iii) اونچائی کے لیے؟ کیا یہ ترچھے اسکیچ میں دی گئی اکائیوں سے میل کھا رہی ہے؟

مشق 15.2

1۔ نیچے دی گئی ہر شکل کے لیے، ہم ابعادی ڈاٹ کاغذ کا استعمال کر کے ایک ہم ابعادی اسکیچ بنایئے۔

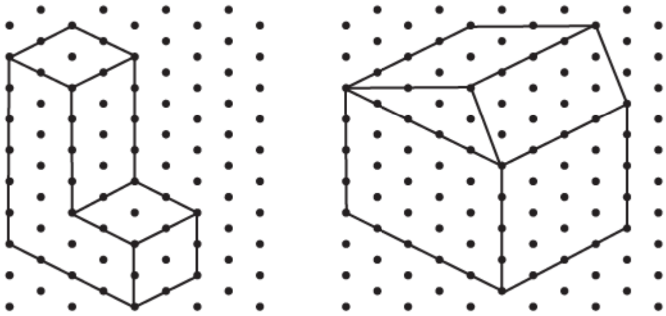


شکل 15.15

2۔ ایک مکعب کے ابعاد 5 سم، 3 سم اور 2 سم ہیں۔ مکعب کے تین مختلف ہم ابعادی اسکیچیں بنایئے۔

3۔ تین کعب جن میں ہر ایک کا کنارہ 2 سم ہو ایک کے بعد ایک اس طرح رکھے گئے کہ وہ ایک مکعب بنائیں۔ اس مکعب کا ایک ترچھا یا ہم ابعادی اسکیچ بنایئے۔

4۔ دی گئی ہم ابعادی اشکال میں ہر ایک کا ترچھا اسکیچ بنائیے۔



5۔ مندرجہ ذیل میں ہر ایک کے لیے بنائیے (i) ایک ترچھا اسکیچ اور (ii) ایک ہم ابعادی اسکیچ

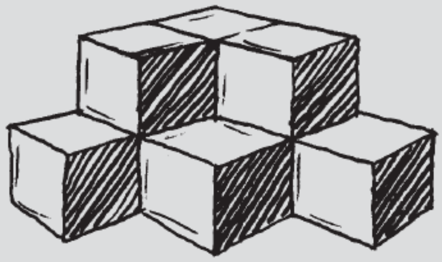
(a) ایک مکعب جس کی ابعاد ہیں 5 سم، 3 سم اور 2 سم۔ (کیا آپ کا اسکیچ منفرد ہے؟)

(b) ایک کعب جس کا ہر ضلع کنارہ 4 سم لمبا ہے۔

کتاب کے آخر میں ہم ابعادی شیٹ لگی ہے۔ آپ اس پر کچھ کعب یا مکعب بنانے کی کوشش کیجیے۔ جس کے ابعاد آپ کے دوست بتائے گا۔

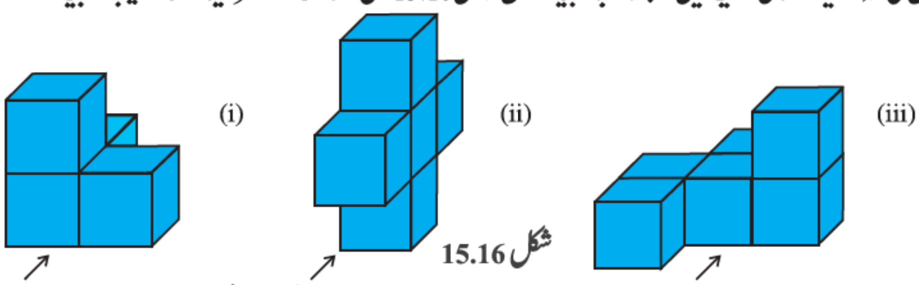
15.4.3 ٹھوس چیزوں کا متصور کرنا (Visualising Solid Objects)

اسے کیجیے



کبھی کبھی جب آپ ملی جلی (یا جڑی ہوئی) اشکال دیکھتے ہیں تو ان میں سے کچھ آپ کی نظر سے چھپ بھی سکتا ہے۔

یہاں پر کچھ سرگرمیاں دی گئی ہیں جو آپ اپنے خالی وقت میں کر سکتے ہیں یہ آپ کو ٹھوس اشیا کو متصور کرنے میں مددگار ثابت ہوں گی کہ وہ کیسے دکھائی دیتے ہیں۔ کچھ کعب لیجیے اور ان کو شکل 15.16 میں دکھائے گئے طریقے سے ترتیب دیجیے۔



شکل 15.16

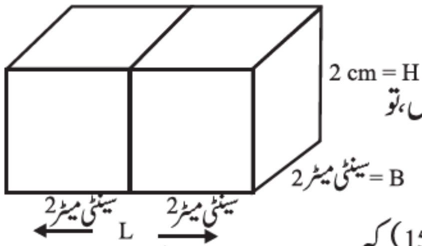
اب آپ اپنے دوست سے پوچھیے کہ تیر کے نشان (arrow) کی طرف سے دیکھنے پر انھیں کتنے کعب نظر آتے ہیں۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل ترتیب میں کعب کی تعداد کا اندازہ لگانے کی کوشش کیجیے۔

شکل 15.17

اس طرح متصور کرنا آپ کے لیے بہت مددگار ثابت ہوگا۔ مان لیجیے کہ آپ ایسے کعب کو جوڑ کر مکعب بنانا چاہتے ہیں۔ آپ یہ اندازہ لگا سکتے ہیں کہ مکعب کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی کیا ہوگی۔



شکل 15.18

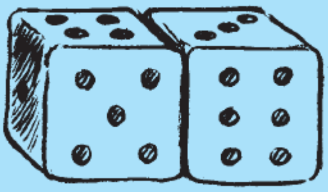
مثال 2 اگر دو کعب جن کی ابعاد 2 سم × 2 سم × 2 سم ہو، اور وہ ایک دوسرے سے ملے ہوئے رکھے ہوں، تو حاصل شدہ مکعب کی ابعاد کیا ہوگی۔

حل جب وہ دونوں ایک دوسرے سے ملا کر رکھے ہوں تو آپ دیکھ سکتے ہیں۔ (شکل 15.18) کہ صرف لمبائی کی پیمائش ہی بڑھی ہے۔ یہ ہو جائے گی 2+2=4 سم

چوڑائی = 2 سم اور اونچائی = 2 سم

کوشش کیجیے:

1۔ جیسا کہ دکھایا گیا ہے کہ دو پانسے ایک دوسرے ملا کر رکھے گئے ہیں۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ مندرجہ ذیل کے متقابل رخ کا کل حاصل جمع کیا ہوگا۔



شکل 15.19

(a) 5 + 6 (b) 4 + 3

(یاد رکھیے کہ متقابل رخ کے اعداد کی حاصل جمع 7 ہوتی ہے۔

2۔ تین کعب جن میں ہر ایک کا کنارہ 2 سم ہوگا پہلو بہ پہلو ملا کر رکھے گئے ہیں۔ مکعب بنانے کے لیے ایک ترچھا اسکیچ بنانے کی کوشش کیجیے اور بتایئے اس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی کیا ہوگی۔

15.5 ایک ٹھوس چیز کے مختلف حصوں کو دیکھنا (Viewing Different Sections of A Solid)

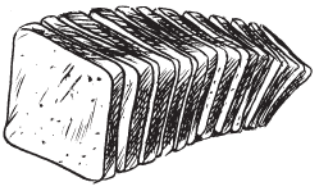
اب ذرا دیکھیے کہ ایک سہ ابعادی چیز مختلف طریقوں سے کیسی نظر آئے گی۔

15.5.1 ایک چیز کو دیکھنے کا ایک نظریہ اس کو کاٹ کر یا پارچے بنا کر
(One Way to view an Object is by Cutting or Slicing)

پارچے بنانے کا کھیل (Slicing game)

یہاں ایک بوری ڈبل روٹی Loaf of Bread ہے (تصویر 15.26) یہ بالکل ایک معکب کی طرح دکھائی دے رہی ہے ۔جس کا رخ مربع ہے۔آپ چاقو سے اس کے پارچے (ٹکڑے) بنا سکتے ہیں

جب آپ اس کو عمودی کاٹیں گے تو آپ کو بہت سے ٹکڑے ملیں گے ،جیسا کہ تصویر 15.20 میں دکھایا گیا ہے۔ ہر ٹکڑے کا رخ ایک مربع ہے۔ہم اس رخ کو پوری بریڈ کا تراشہ (Cross Section) کہلاتا ہے۔اس صورت حال میں تقریباً ایک مربع ہے۔



شکل 15.20

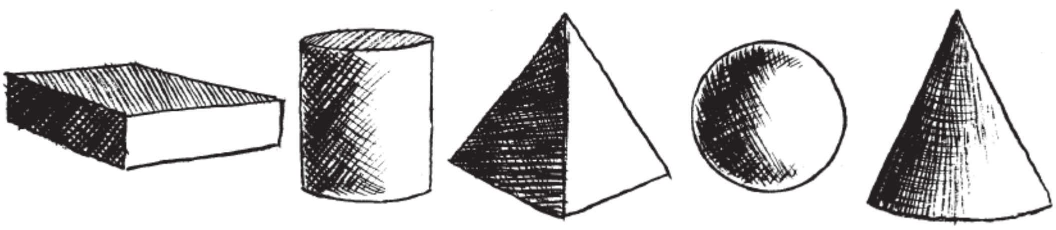
ہوشیار! اگر آپ کا کٹاو 'عمودی' نہیں ہے تو آپ کو مختلف طرح کے ٹکڑے ملیں گے ۔اس کے بارے میں سوچیے ۔ حاصل ہوئے ٹکڑوں کی سرحد (Boundry) ایک مستوی منحنی (Plane Curve) ہے کیا آپ نے کبھی یہ نوٹ کیا ہے؟

باورچی خانے کا کھیل (A Kitchen Play)

باروچی خانے میں کھانا پکانے کے لیے جب آپ سبزیوں کو کاٹتے ہیں تو کیا آپ نے ان کے ٹکڑوں پر کبھی دھیان دیا ہے؟ بہت سے ٹکڑوں کا مشاہدہ کیجیے ۔اور حاصل ہونے والی اشکال کے بارے میں جانیے ۔

اس کو کھیلیے Play This (آیئے کھیلیں)

مٹی (دیا پلاسٹسین) کی مدد سے مندرجہ ذیل ٹھوس بنایئے اوران کو عمودی یا افقی خط پر کاٹیے ۔حاصل ہوئے ٹکڑوں کے رف اسکیچ بنایئے۔ جہاں پر بھی ممکن ہو، ان کے نام دیجیے۔



شکل 15.21

مشق 15.3

1۔ آپ کو کون سے ٹکڑے (cross-section) ملیں گے اگر آپ

(i) عمودی خط پر کاٹیں (ii) افقی خط پر کاٹیں

مندرہ ذیل ٹھوسوں کو؟

(a) ایک اینٹ (b) ایک گول سیب (c) ایک پانسہ

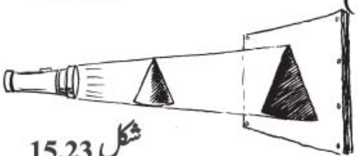
(b) ایک گول پائپ (c) ایک آئس کریم مخروط

15.5.2 دوسرا طریقہ ہے پرچھائیں بنانے کا کھیل (Another Way is by Shadow Play)

پرچھائیں بنانے کا کھیل (A shadow play)

شکل 15.22

سہ ابعادی چیزیں، دو ابعاد میں کیسی نظر آتی ہیں اس کو دکھانے کا ایک بہت اچھا طریقہ پرچھائیں بنانا ہے۔ کیا آپ نے پرچھائیوں کا کھیل کبھی دیکھا ہے؟ یہ ایک مزیدار کھیل ہے جس میں کسی بھی ٹھوس چیز کو روشنی کے سامنے کرنے پر اُس کی پرچھائیں بنتی ہے۔ ریاضی میں ان تصورات کا بالواسطہ استعمال ہے اس سرگرمی کے لیے آپ کو ایک ٹارچ اور کچھ ٹھوس اشکال کی ضرورت ہوگی (اگر آپ کے پاس اوورہیڈ پروجیکٹر (overhead projecter) ہے تو اس کے لیمپ کے نیچے ٹھوس اشیاء کو رکھ کر یہ ساری تحقیقات کر سکتے ہیں۔)



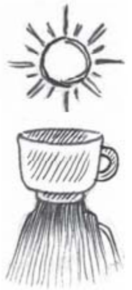
شکل 15.23

ایک مخروط کے بالکل سامنے ٹارچ کی روشنی کو رکھیے۔ اسکرین پر یہ کیسی پرچھائیں بناتا ہے؟ (تصویر 15.23)

ٹھوس سہ ابعادی ہے، پرچھائیں کا ابعاد کیا ہے؟

اگر آپ مخروط کی جگہ، اس کھیل میں ایک کعب رکھیں تو آپ کو کس قسم کی پرچھائیں ملے گی؟

روشنی کے ذرائع کو مختلف مقامات پر اور ٹھوس اشیاء بھی مختلف جگھوں پر رکھ کر یہ تجربات کیجیے، حاصل ہونے والی پرچھائیوں کے سائز اور شکل پر پڑنے والے اثرات پر دھیان دیجیے۔



یہاں ایک اور مزے دار کھیل دیا گیا ہے۔ ہو سکتا ہے آپ نے کبھی کبھی اس کو کیا ہو۔

دوپہر کے وقت جب سورج بالکل سر پر ہو تو کھلی جگہ پر ایک گول پیالی رکھیے جیسا کہ شکل 15.24 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ کو کیسی پرچھائیں ملی؟ کیا یہ بالکل ویسی ہی ہے جیسی یہ:

(a) قبل از دوپہر میں ہوگی؟

(b) شام میں ہوگی؟

(iii)

(ii)

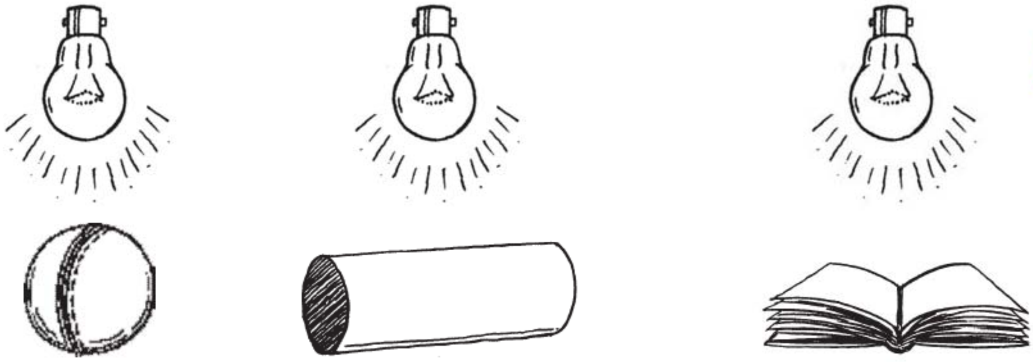
شکل 15.24 (i) - (iii)

مشاہدات کے وقت سورج کی مختلف حالتوں اور پرچھائیوں کے رشتے پر دھیان دیں۔

مشق 15.4

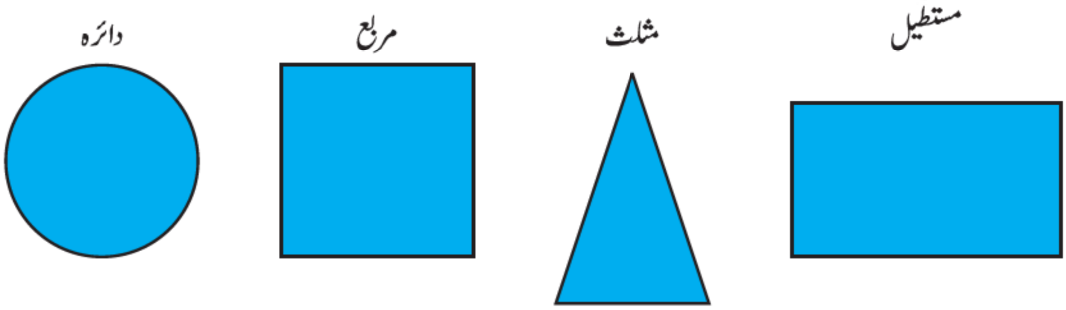
1۔ مندرجہ ذیل ٹھوس اشیا کے بالکل اوپر سیدھ میں، ایک بلب رکھا گیا ہے۔ ہر حالت میں حاصل ہونے والی پرچھائیوں کی شکل کے

نام بتائیے۔ پرچھائیوں کے رف اسکیچ بنانے کی کوشش کیجیے۔(آپ پہلے خود تجربات کر کے اس کے بعد ان سوالوں کے جوابات دے سکتے ہیں۔)



(i) (ii) (iii)

2۔ یہاں پر 3-D اشیا کی پرچھائیں دی گئی ہیں، جب ان اشیا کو اوور ہیڈ پروجیکٹر (overhead projector) کے بلب کے نیچے رکھا گیا۔ یہ پرچھائیاں کن ٹھوس اشیا کی ہوسکتی ہیں ان کو پہچانیے۔(اس کے جواب بہت سارے ہوسکتے ہیں)



(i) (ii) (iii) (iv)

3۔ جانچ کیجیے کہ کیا مندرجہ ذیل بیانات درست ہیں۔

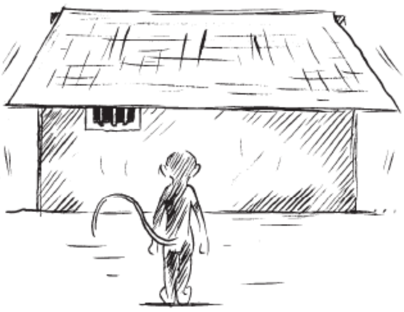
(i) ایک کعب کی پرچھائیں کی شکل مستطیل ہوسکتی ہے۔

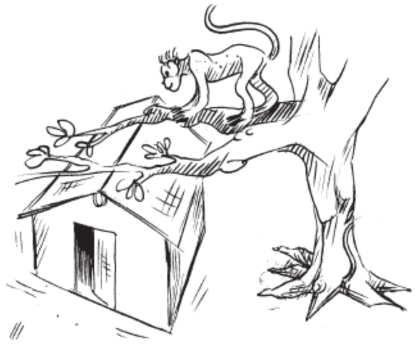
(ii) ایک کعب کی پرچھائیں چھ ضلعی کی شکل میں ہوسکتی ہے۔

15.5.3 تیسرا طریقہ ہے جس میں چیزوں کو مختلف زاویوں سے دیکھنے پر وہ مختلف نظارے پیش کرتی ہیں
(A Third Way is by Looking at it from Certain Angles to Get Different Views)

کسی بھی چیز کو مختلف طریقوں سے دیکھا جاسکتا ہے۔اس کے سامنے کھڑے ہوکر یا ایک طرف (side) کھڑے ہوکر یا پھر اوپر سے۔ ہر بار ایک الگ نظارہ ہوگا (شکل 15.25)

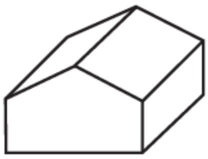
سامنے کا نظارہ

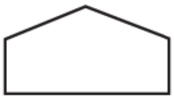

ایک طرف سے دیکھنے کا نظارہ

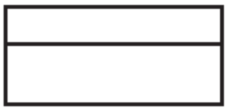

اوپر کا نظارہ

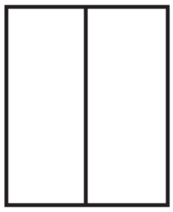
شکل 15.25

یہاں پر ایک مثال دی گئی ہے کہ کیسے ایک ہی بلڈنگ کے مختلف نظارے حاصل ہو سکتے ہیں۔


بلڈنگ

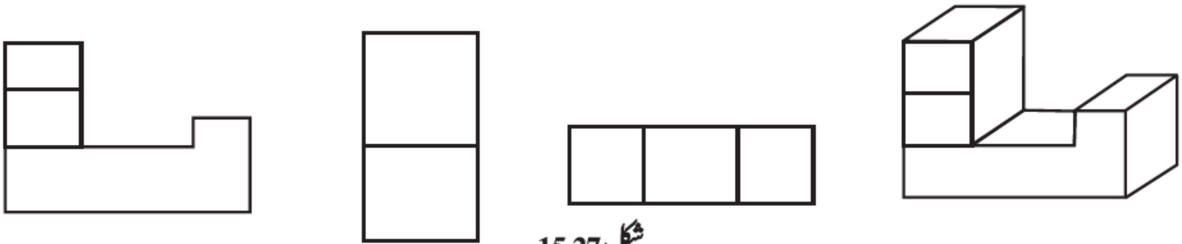

سامنے کا نظارہ


ایک طرف سے دیکھنے کا نظارہ


اوپر کا نظارہ

شکل 15.26

اس چیز کو آپ کعب ملا کر بنائی گئی اشکال کے لیے بھی کر سکتے ہیں۔



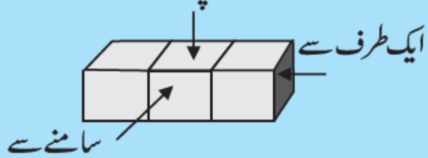
شکل 15.27

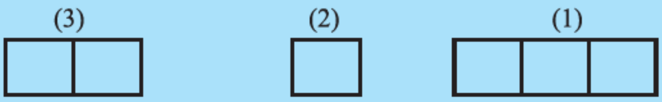
کعب کو اکٹھے رکھ کر اور پھر مختلف زاویوں سے ان کے اسکیچ بنانے کی کوشش کیجیے۔

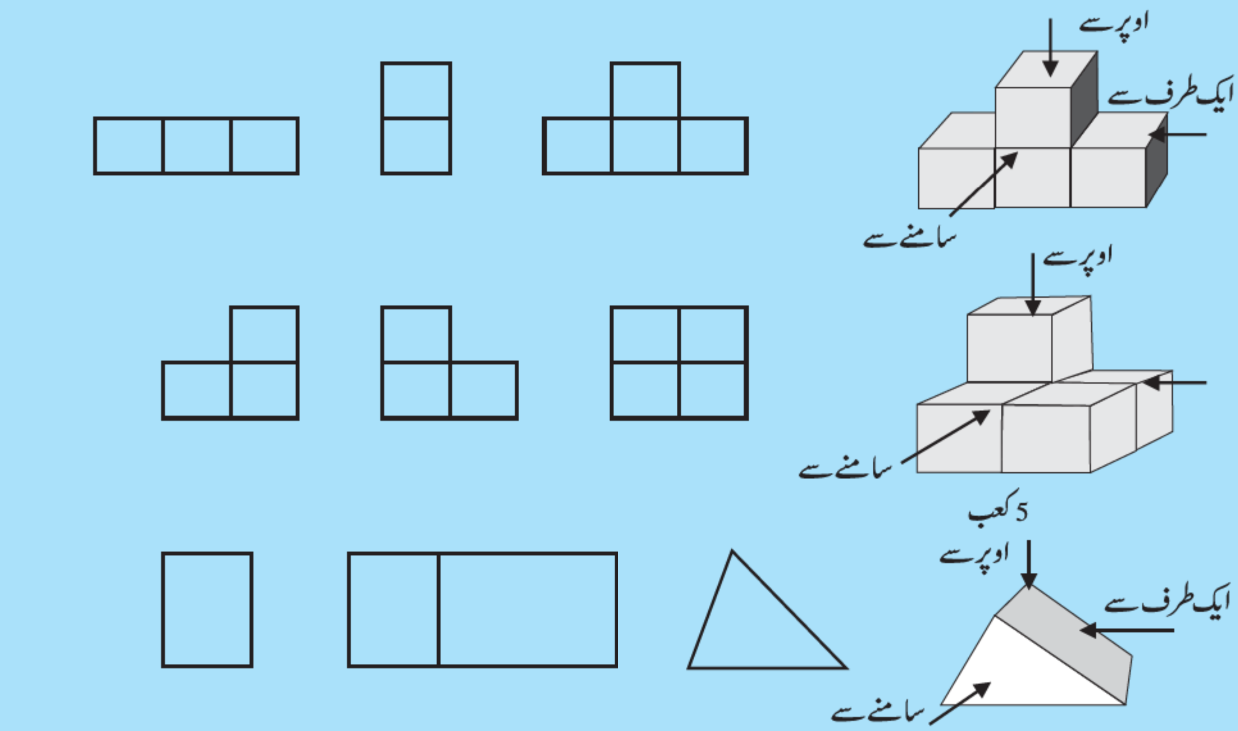
کوشش کیجیے:

1۔ ہر ٹھوس کے لیے، تین نظارہ (3)، (2)، (1) دیے گئے ہیں۔ ہر ٹھوس کو اس کے متناظر نظاروں، اوپر، سامنے اور ایک طرف، کے لیے پہچانیے۔

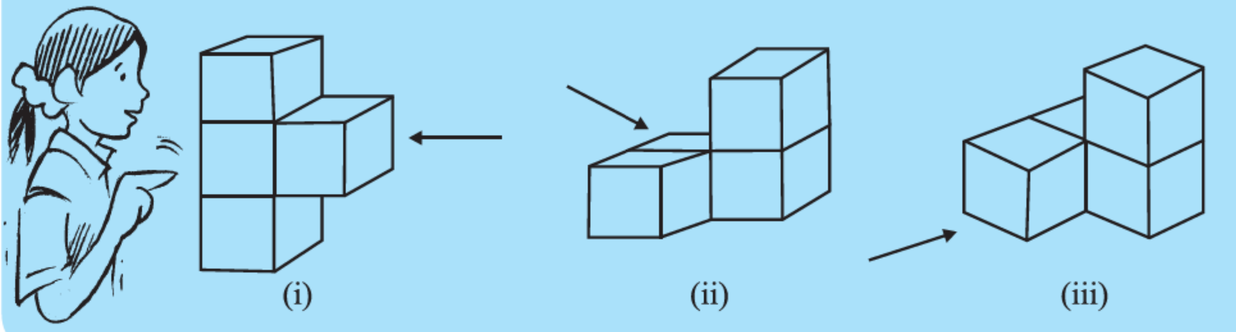
ٹھوس	اس کے نظارے







2۔ ہر ٹھوس کا ایک نظارہ بنائیے جیسا کہ وہ دکھائے گئے تیر کے نشان (arrow) کی سمت سے دیکھنے پر نظر آتے ہیں۔



ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ دائرہ، مربع، مستطیل، چار ضلعی اور مثلث مستوی اشکال کی مثالیں ہیں، کعب، مکعب، استوانہ مخروط اور ہرم میں ٹھوس اشکال کی مثالیں ہیں۔

2۔ مستوی اشکال دو ابعادی (2-D) اور ٹھوس اشکال سہ ابعادی (3-D) ہیں۔

3۔ ایک ٹھوس شکل کے کونے اس کے راس (vertices) کہلاتے ہیں۔ اس کے ڈھانچہ کے قطعات خط اس کے کنارے (edges) اور اس کی ہموار سطحیں اس کے رخ کہلاتے ہیں۔

4۔ ایک ٹھوس کے ڈھانچہ کے باہری خطوط کو موڑنے سے ایک خاکہ (net) بنتا ہے۔ ایک ہی ٹھوس کے بہت سارے خاکے ہو سکتے ہیں۔

5۔ ٹھوس شکلوں کو ہموار سطح (جیسے کاغذ) پر کافی حد تک حقیقی انداز (realistically) میں بنایا جا سکتا ہے۔ اس کو ہم (3-D) ٹھوس کا (2-D) اظہار کہتے ہیں۔

6۔ کسی ٹھوس شے کے دو قسم کے اسکیچس بنائے جا سکتے ہیں۔

(a) ایک ترچھا اسکیچ: اس کی لمبائی تناسب میں نہیں ہوتی ہے۔ لیکن پھر بھی یہ ایک ٹھوس کے تمام ظاہری اہم اجزا کو ظاہر کرتا ہے۔

(b) ایک ہم ابعادی اسکیچ کو ایک ہم ابعادی ڈاٹ پیپر بنایا جاتا ہے۔ جس کا ایک نمونہ کتاب کے آخر میں دیا گیا ہے۔ ہم ابعادی اسکیچ میں ٹھوس چیز کی پیائش تناسب میں رکھی جاتی ہے۔

7۔ ٹھوس اشیا کو متصور کرنا ایک بہت کار آمد صلاحیت ہے۔ آپ ٹھوس شے کے چھپے ہوئے (hidden) حصوں کو بھی دیکھنے کے قابل ہونا چاہیں گے۔

8۔ ایک ٹھوس کے مختلف حصوں (section) کو مختلف طریقوں سے دیکھا جا سکتا ہے۔

(a) ایک طریقہ ہے، شکل کو پارچوں (ٹکڑوں) میں کاٹ کر دیکھنے کا جس میں ایک ٹھوس کے ٹکڑے کرنے ہوتے ہیں۔

(b) دوسرا طریقہ (3-D) اشکال کی (2-D) پر چھائیوں کو دیکھنا۔

(c) تیسرا طریقہ ہے۔ چیزوں کو مختلف زاویوں سے دیکھنا۔ سامنے کا نظارہ، ایک طرف کا نظارہ، اوپر کا نظارہ۔ ان کی مدد سے مشاہدہ کی جانے والی شکل کے بارے میں بہت سی جانکاریاں حاصل ہو سکتی ہیں۔

جوابات

مشق 1.1

1۔ (a) لاہوسپیٹی: $-8^\circ C$، سری نگر: $-2^\circ C$، شملہ: $5^\circ C$، اوٹی: $14^\circ C$، بنگلور: $22^\circ C$

(b) $30^\circ C$ (c) $6^\circ C$ (d) ہاں؛ نہیں 2۔ 35

3۔ $-7^\circ C; -3^\circ C$ 4۔ 6200 میٹر 5۔ ایک مثبت عدد سے؛ 358 روپے

6۔ ایک منفی عدد سے؛ -10 7۔ (ii) جادوئی مربع ہے۔

9۔ (a) $<$ (b) $<$ (c) $>$ (d) s$<$

10۔ (i) 11 جست (ii) 5 جست (iii) (a) $-3 + 2 - 3 + 2 - 3 + 2 - 3 + 2 - 3 + 2 - 3 = -8$

(b) $4 - 2 + 4 - 2 + 4 = 8$

(b) میں 8 ظاہر کرتا ہے 8 قدم اوپر جانے کو

مشق 1.2

1۔ ایسا ایک جوڑا ہوسکتا ہے:

(a) $-10, 3$ (b) $-6, 4; (-6 - 4 = -10)$ (c) $-3, 3$

2۔ ایسا ایک جوڑا ہوسکتا ہے:

(a) $-2, -10; [-2 - (-10) = 8]$ (b) $-6, 1$

(c) $-1, 2; (-1 - 2 = -3)$

3۔ دونوں ٹیموں کے اسکور ایک سے ہیں، یعنی -30؛ ہاں

4۔ (i) -5 (ii) 0 (iii) -17 (iv) -7

(v) -3

مشق 1.3

1. (a) -3 (b) -225 (c) 630 (d) 316 (e) 0

(f) 1320 (g) 162 (h) -360 (i) -24 (j) 36

3. (i) $-a$ (ii) (a) 22 (b) -37 (c) 0

مشق 1.3

1. (a) –3 (b) –225 (c) 630 (d) 316 (e) 0
   (f) 1320 (g) 162 (h) –360 (i) –24 (j) 36

3. (i) – a (ii) (a) 22 (b) –37 (c) 0

4. $-1 \times 5 = -5, -1 \times 4 = -4 = -5 + 1, -1 \times 3 = -3 = -4 + 1,$
   $-1 \times 2 = -2 = -3 + 1, -1 \times 1 = -1 = -2 + 1, -1 \times 0 = 0 = -1 + 1$ so, $-1 \times (-1) = 0 + 1 = 1.$

5. (a) 480 (b) – 53000 (c) – 15000 (d) – 4182
   (e) – 62500 (f) 336 (g) 493 (h) 1140

6. – 10°C 7. (i) 8 (ii) 15 (iii) 0

8. (a) 1000روپے کا نقصان (b) 4000بیگ

9. (a) – 9 (b) – 7 (c) 7 (d) – 11

مشق 1.4

1. (a) –3 (b) –10 (c) 4 (d) –1
   (e) –13 (f) 0 (g) 1 (h) –1 (i) 1

3. (a) 1 (b) 75 (c) – 206 (d) –1
   (e) – 87 (f) – 48 (g) –10 (h) –12

4. (–6, 2), (–12, 4), (12, – 4), (9, –3), (–9, 3) (ایسے بہت سے جوڑے ہو سکتے ہیں)

5. 9 p.m.; – 14°C 6. (i) 8 (ii) 13 7. 1 گھنٹہ

مشق 2.1

1. (i) $\frac{7}{5}$ (ii) $\frac{39}{8}\left(=4\frac{7}{8}\right)$ (iii) $\frac{31}{35}$ (iv) $\frac{91}{165}$
   (v) $\frac{13}{5}\left(=2\frac{3}{5}\right)$ (vi) $\frac{37}{6}\left(=6\frac{1}{6}\right)$ (vii) $\frac{39}{8}\left(=4\frac{7}{8}\right)$

2. (i) $\frac{2}{3}, \frac{8}{21}, \frac{2}{9}$ (ii) $\frac{7}{10}, \frac{3}{7}, \frac{1}{5}$ 3. ہاں 4. $\frac{139}{3}\left(=46\frac{1}{3}\right)$ cm

5- (i) $8\frac{17}{20}$ cm (ii) $7\frac{5}{6}$ cm ΔABE کا احاطہ زیادہ ہے 6- $\frac{3}{10}$ cm

7- $\frac{2}{5}$ ؛ ریتو؛ $\frac{1}{5}$ 8- ویبھو ایک گھنٹے کا $\frac{1}{6}$ سے

مشق 2.2

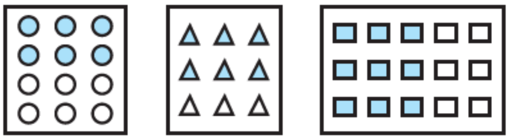
1. (i) (d) (ii) (b) (iii) (a) (iv) (c)

2. (i) (c) (ii) (a) (iii) (b)

3. (i) $4\frac{1}{5}$ (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $1\frac{5}{7}$ (iv) $1\frac{1}{9}$ (v) $2\frac{2}{3}$

(vi) 15 (vii) $6\frac{2}{7}$ (viii) 16 (ix) $4\frac{1}{3}$ (x) 9

4- اس کو کرنے کا ایک طریقہ یہ ہے:



(i) (ii) (iii)

5. (a) (i) 12 (ii) 23 (b) (i) 12 (ii) 18 (c) (i) 12 (ii) 27

(d) (i) 16 (ii) 28

6. (a) $15\frac{3}{5}$ (b) $33\frac{3}{4}$ (c) $15\frac{3}{4}$ (d) $25\frac{1}{3}$

(e) $19\frac{1}{2}$ (f) $27\frac{1}{5}$

7. (a) (i) $1\frac{3}{8}$ (ii) $2\frac{1}{9}$ (b) (i) $2\frac{19}{48}$ (ii) $6\frac{1}{24}$ **8.** (i) 2 litres (ii) $\frac{3}{5}$

مشق 2.3

1. (i) (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{3}{20}$ (c) $\frac{1}{3}$ (ii) (a) $\frac{2}{63}$ (b) $\frac{6}{35}$ (c) $\frac{3}{70}$

2. (i) $1\frac{7}{9}$ (ii) $\frac{2}{9}$ (iii) $\frac{9}{16}$ (iv) $1\frac{2}{25}$ (v) $\frac{5}{8}$

(vi) $1\frac{13}{20}$ (vii) $1\frac{13}{35}$

3. (i) $2\frac{1}{10}$ (ii) $4\frac{44}{45}$ (iii) 8 (iv) $2\frac{1}{42}$ (v) $1\frac{33}{35}$

(vi) $7\frac{4}{5}$ (vii) $2\frac{1}{7}$

4. (i) $\frac{3}{5}$ of $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ of $\frac{6}{7}$ **5.** $2\frac{1}{4}$ m **6.** $10\frac{1}{2}$ hours **7.** 44 km

8. (a) (i) $\frac{5}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (b) (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{8}{15}$

مشق 2.4

1. (i) 16 (ii) $\frac{84}{5}$ (iii) $\frac{24}{7}$ (iv) $\frac{3}{2}$ (v) $\frac{9}{7}$ (vi) $\frac{7}{5}$

2- (i) $\frac{7}{3}$ (کسر غیرواجب) (ii) $\frac{8}{5}$ (غیرواجب) (iii) $\frac{7}{9}$ (واجب)

(iv) $\frac{5}{6}$ (واجب) (v) $\frac{7}{12}$ (واجب) (vi) 8 (مکمل عدد) (vii) 11 مکمل عدد

3. (i) (ii) $\frac{4}{45}$ (iii) $\frac{6}{91}$ (iv) $\frac{13}{9}$ (v) $\frac{7}{8}$ (vi) $\frac{31}{49}$

4. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) $\frac{35}{9}$ (v) $\frac{21}{16}$ (vi) $\frac{4}{15}$

(vii) $\frac{48}{25}$ (viii) $\frac{11}{6}$

مشق 2.5

1. (i) 0.5 (ii) 0.7 (iii) 7 (iv) 1.49 (v) 2.30 (vi) 0.88

2. (i) Rs 0.07 (ii) Rs 7.07 (iii) Rs 77.77 (iv) Rs 0.50 (v) Rs 2.35

3. (i) 0.05m, 0.00005 km (ii) 3.5 cm, 0.035m, 0.000035 km

4. (i) 0.2 kg (ii) 3.470 kg (iii) 4.008 kg

5. (i) $2 \times 10 + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$ (ii) $2 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$

(iii) $2 \times 100 + 0 \times 10 + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$

(iv) $2 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{1000}$

6- (i) اکائیاں (ii) دسواں (iii) دسواں (iv) سوواں (v) ہزارواں

7- ایوب نے 0.9 km یا 900 m کا فاصلہ زیادہ طے کیا۔ **8-** سرلا نے زیادہ پھل خریدے۔

9- 14.6 km

مشق 2.6

1. (i) 1.2 (ii) 36.8 (iii) 13.55 (iv) 80.4 (v) 0.35
   (vi) 844.08 (vii) 1.72

2. 17.1 cm^2

3. (i) 13 (ii) 368 (iii) 1537 (iv) 1680.7 (v) 3110 (vi) 15610
   (vii) 362 (viii) 4307 (ix) 5 (x) 0.8 (xi) 90 (xii) 30

4. 553 km

5. (i) 0.75 (ii) 5.17 (iii) 63.36 (iv) 4.03 (v) 0.025
   (vi) 1.68 (vii) 0.0214 (viii) 10.5525 (ix) 1.0101 (x) 110.011

مشق 2.7

1. (i) 0.2 (ii) 0.07 (iii) 0.62 (iv) 10.9 (v) 162.8 (vi) 2.07
   (vii) 0.99 (viii) 0.16

2. (i) 0.48 (ii) 5.25 (iii) 0.07 (iv) 3.31 (v) 27.223
   (vi) 0.056 (vii) 0.397

3. (i) 0.027 (ii) 0.003 (iii) 0.0078 (iv) 4.326 (v) 0.236 (vi) 0.9853

4. (i) 0.0079 (ii) 0.0263 (iii) 0.03853 (iv) 0.1289 (v) 0.0005

5. (i) 2 (ii) 180 (iii) 6.5 (iv) 44.2 (v) 2
   (vi) 31
   (vii) 510 (viii) 27 (ix) 2.1

6. 18 km

مشق 3.1

2۔

مارکس	شماریاتی نشانات	کتنی بار
1	|	1
2	||	2
3	||	1
4	|||	3

5	~~||||~~	5
6	||||	4
7	|||	2
8	|	1
9	|	1

(i) 9 (ii) 1 (iii) 8 (iv) 5

3. 2 **4.** 50 **5.**(i) 12.5 (ii) 3 (iii $\frac{0+8+6+4}{4} = \frac{18}{4}$ or $\frac{9}{2}$ (iv) A

6. (i) سب سے زیادہ مارکس=95، سب سے کم مارکس=39 (iii) 73 (ii) 56

7. 2058

8. (i) 20.5 (ii) 5.9 (iii) 5 **9.** (i) 151 cm (ii) 128 cm (iii) 23 cm (iv) 141.4 cm (v) 5

مشق 3.2

1۔ بہتاتیہ=20، وسطانیہ=20، ہاں **2۔** Mean=39، بہتاتیہ=15، وسطانیہ=15، نہیں

3۔ (i) بہتاتیہ=38، 43؛ وسطانیہ=40 (ii) ہاں، یہاں دو بہتاتیہ ہیں

4۔ بہتاتیہ=14، وسطانیہ=14

5. (i) T (ii) F (iii) T (iv) F

مشق 3.3

1۔ (a) بلی (b) 8

4۔ (i) ریاضی (ii) سماج کا علم (iii) ہندی

5۔ (ii) کرکٹ (iii) کھیلوں کو دیکھنا

6۔ (i) جموں (ii) جموں، بنگلور

(iii) بنگلور اور جے پور یا بنگلور اور احمد آباد (iv) ممبئی

مشق 3.4

1۔ (i) ہونا ضروری ہے (ii) ہوسکتا ہے مگر ضروری نہیں ہے (iii) ناممکن

(iv) ہوسکتا ہے مگر ضروری نہیں ہے (v) ہوسکتا ہے مگر ضروری نہیں ہے

2. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{1}{2}$

مشق 4.1

1۔ (i) نہیں (ii) نہیں (iii) ہاں (iv) نہیں (v) ہاں
(vi) نہیں
(vii) ہاں (viii) نہیں (ix) نہیں (x) نہیں (xi) ہاں

2۔ (a) نہیں (b) نہیں (c) ہاں (d) نہیں (e) نہیں
(f) نہیں

3. (i) $p = 3$ (ii) $m = 6$

4. (i) $x + 4 = 9$ (ii) $y - 2 = 8$ (iii) $10a = 70$ (iv) $\frac{b}{5} = 6$
(v) $\frac{3t}{4} = 15$ (vi) $7m + 7 = 77$ (vii) $\frac{x}{4} - 4 = 4$ (viii) $6y - 6 = 60$
(ix) $\frac{z}{3} + 3 = 30$

5۔ (i) p اور 4 کی حاصل جمع 15 ہے (ii) m میں سے 7 گھٹانے پر 3 حاصل ہوتا ہے
(iii) m کا دوگنا 7 ہے (iv) ایک عدد کا پانچواں حصہ 3 ہے
(v) ایک عدد کا تین-پانچواں 6 ہے (vi) ایک عدد p کے تین گنے میں جب 4 کو جمع کریں تو 25 حاصل ہوگا
(vii) ایک عدد p کے چار گنے سے 2 گھٹانے پر 8 حاصل ہوتا ہے
(viii) ایک عدد 8 کے آدھے میں 2 جوڑنے پر 8 حاصل ہوگا

6. (i) $5m + 7 = 37$ (ii) $3y + 4 = 49$ (iii) $2l + 7 = 87$ (iv) $4b = 180°$

مشق 4.2

1۔ (a) دونوں طرف 1 جوڑنا؛ $x = 1$ (b) دونوں طرف سے 1 گھٹانا؛ $x = -1$
(c) دونوں طرف 1 جوڑنا؛ $x = 6$ (d) دونوں طرف سے 6 گھٹانا؛ $x = -4$
(e) دونوں طرف 4 جوڑنا؛ $y = -3$ (f) دونوں طرف 4 جوڑنا؛ $y = 8$
(g) دونوں طرف سے 4 گھٹانا؛ $y = 0$ (h) دونوں طرف سے 4 گھٹانا؛ $y = -8$

2۔ (a) دونوں طرف 3 سے تقسیم کرنا؛ $l = 14$ (b) دونوں طرف 2 سے ضرب کرنا؛ $b = 12$

(c) دونوں طرف 7 سے ضرب کرنا؛ $p = 28$ (d) دونوں طرف 4 سے تقسیم کرنا؛ $x = \frac{25}{4}$

(e) دونوں طرف 8 سے تقسیم کرنا؛ $y = \frac{36}{8}$ (f) دونوں طرف 3 سے ضرب کرنا؛ $z = \frac{15}{4}$

(g) دونوں طرف 5 سے ضرب کرنا؛ $a = \frac{7}{3}$ (h) دونوں طرف 20 سے تقسیم کرنا؛ $t = -\frac{1}{2}$

3۔ (a) مرحلہ 1: دونوں طرف 2 جوڑنا
مرحلہ 2: دونوں طرف 3 سے تقسیم کرنا؛ $n = 16$

(b) مرحلہ 1: دونوں طرف سے 7 گھٹانا
مرحلہ 2: دونوں طرف 5 سے تقسیم کرنا؛ $m = 2$

(c) مرحلہ 1: دونوں طرف 3 سے ضرب کرنا
مرحلہ 2: دونوں طرف 20 سے تقسیم کرنا؛ $p = 6$

(d) مرحلہ 1: دونوں طرف 10 سے ضرب کرنا
مرحلہ 2: دونوں طرف 3 سے تقسیم کرنا؛ $p = 20$

4. (a) $p = 10$ (b) $p = 9$ (c) $p = 20$ (d) $p = -15$ (e) $p = 8$ (f) $s = -3$
(g) $s = -4$ (h) $s = 0$ (i) $q = 3$ (j) $q = 3$ (k) $q = -3$ (l) $q = 3$

مشق 4.3

1. (a) $y=8$ (b) $t=\frac{-18}{5}$ (c) $a=-5$ (d) $q=-8$ (e) $x=-4$
(f) $x=\frac{5}{2}$ (g) $m=\frac{1}{2}$ (h) $z=-2$ (i) $l=\frac{4}{9}$ (j) $b=12$

2. (a) $x=2$ (b) $n=12$ (c) $n=-2$ (d) $x=-4$ (e) $x=0$

3. (a) $p=\frac{14}{5}$ (b) $p=\frac{6}{5}$ (c) $t=2$ (d) $p=7$ (e) $m=2$

4۔ (a) ممکن مساوات ہیں $10x+2=22;\ \frac{x}{5}=\frac{2}{5};\ 5x-3=7$

(b) ممکن مساوات ہیں $3x=-6;\ 3x+7=1;\ 3x+10=4$

مشق 4.4

1. (a) $8x+4=60;\ x=7$ (b) $\frac{x}{5}-4=3;\ x=35$ (c) $\frac{3}{4}y+3=21;\ y=24$

(d) $2m-11=15;\ m=13$ (e) $50-3x=8;\ x=14$

(f) $\frac{x+19}{5}=8;\ x=21$ (g) $\frac{5n}{2}-7=23;\ n=12$

(g) $\frac{5n}{2} - 7 = \frac{11}{2}$; $n = 5$

2۔ (a) سب سے کم اسکور=40 (b) 70° ہر ایک کا (c) سچن:132رن، راہل:66رن

3۔ (i) 6 (ii) 15سال (iii) 25 4۔ 30

مشق 5.1

1. (i) 70° (ii) 27° (iii) 33°

2. (i) 75° (ii) 93° (iii) 26°

3۔ (i) تکمیلی (ii) اتمامی (iii) تکمیلی
(iv) تکمیلی (v) اتمامی (vi) اتمامی

4۔ 45° 5۔ 90° 6۔ $\angle 2$ اتنے ہی ناپ سے بڑھے گا جتنے ناپ سے $\angle 1$ گھٹے گا۔

7۔ (i) نہیں (ii) نہیں (iii) ہاں 8۔ 45° سے کم

9۔ (i) ہاں (ii) نہیں (iii) ہاں (iv) ہاں (v) ہاں (vi) $\angle$COB

10. (i) $\angle 1, \angle 4; \angle 5, \angle 2 + \angle 3$ (ii) $\angle 1, \angle 5; \angle 4, \angle 5$

11۔ $\angle 1$ اور $\angle 2$ متصل زاویے نہیں ہیں کیونکہ ان کے راس مشترکہ نہیں ہیں۔

12. (i) $x = 55°, y = 125°, z = 125°$ (ii) $x = 115°, y = 140°, z = 40°$

13۔ (i) 90° (ii) 180° (iii) تکمیلی (iv) خطّی جوڑا (v) برابر
(vi) منفرجہ زاویے

14. (i) $\angle$AOD, $\angle$BOC (ii) $\angle$EOA, $\angle$AOB (iii) $\angle$EOB, $\angle$EOD
(iv) $\angle$EOA, $\angle$EOC (v) $\angle$AOB, $\angle$AOE; $\angle$AOE, $\angle$EOD; $\angle$EOD, $\angle$COD

مشق 5.2

1۔ (i) نظیری زاویوں کی خصوصیت (ii) متبادل داخلی زاویوں کی خصوصیت
(iii) قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کا جوڑ تکمیلی ہے۔

2. (i) $\angle 1, \angle 5; \angle 2, \angle 6; \angle 3, \angle 7; \angle 4, \angle 8$ (ii) $\angle 2, \angle 8; \angle 3, \angle 5$
(iii) $\angle 2, \angle 5; \angle 3, \angle 8$ (iv) $\angle 1, \angle 3; \angle 2, \angle 4; \angle 5, \angle 7; \angle 6, \angle 8$

3. $a = 55°; b = 125°; c = 55°; d = 125°; e = 55°; f = 55°$

4. (i) $x = 70°$ (ii) $x = 100°$

5. (i) $\angle DGC = 70°$ (ii) $\angle DEF = 70°$

6۔ (i) l، m کے متوازی نہیں ہے۔ (ii) l، m کے متوازی نہیں ہے۔
(iii) l، m کے متوازی ہے۔ (iv) l، m کے متوازی نہیں ہے۔

مشق 6.1

1۔ ارتفاع، وسطانیہ، نہیں

مشق 6.2

1. (i) 120° (ii) 110° (iii) 70° (iv) 120° (v) 100°
(vi) 90°

2. (i) 65° (ii) 30° (iii) 35° (iv)60° (v)50° (vi) 40°

مشق 6.3

1. (i) 70° (ii) 60° (iii)40° (iv)65° (v)60° (vi) 30°

2. (i) $x = 70°, y = 60°$ (ii) $x = 50°, y = 80°$ (iii) $x = 110°, y = 70°$
(iv) $x = 60°, y = 90°$ (v) $x = 45°, y = 90°$ (vi) $x = 60°, y = 60°$

مشق 6.4

1۔ (i) ناممکن (ii) ممکن (iii) ناممکن

2۔ (i) ہاں (ii) ہاں (iii) ہاں

3۔ ہاں 4۔ ہاں 5۔ نہیں 6۔ 3 اور 27 کے درمیان

مشق 6.5

1. 26 سینٹی میٹر 2. 24 سینٹی مسر 3. 9 میٹر 4. (i) اور (iii) 5. 18 میٹر
6. (ii)
7. 98 سینٹی میٹر 8. 68 سینٹی میٹر

مشق 7.1

1۔ (a) ان کی لمبائی ایک ہی ہے۔ (b) 70° (c) m∠A = m∠B

3. ∠A ↔ ∠F, ∠B ↔ ∠E, ∠C ↔ ∠D,

$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{FE}$, $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{ED}$, $\overline{AC} \leftrightarrow \overline{FD}$

4. (i) ∠C (ii) $\overline{CA}$ (iii) ∠A (iv) $\overline{BA}$

مشق 7.2

1۔ (a) SSS مماثل کا معیار (b) SAS مماثل کا معیار

(c) ASA مماثل کا معیار (d) RHS مماثل کا معیار

2. (a) (i) PE (ii) EN (iii) PN (b) (i) EN (ii) AT

(c) (i) ∠RAT = ∠EPN (ii) ∠ATR = ∠PNE

3۔ (i) دیا گیا ہے (ii) دیا گیا ہے (iii) مشترک (vi) SAS مماثل کا اصول

4۔ نہیں

5۔ ΔWON 6۔ ΔBTA, ΔTPQ 9۔ BC = QR، ASA مماثل کا معیار

مشق 8.1

1. (a) 10:1 (b) 500:7 (c) 100:3 (d) 20:1

2۔ 12 کمپیوٹرس 3۔ (i) راجستھان:190 لوگ، یوپی:830 لوگ (ii) راجستھان

مشق 8.2

1. (a) 12.5% (b) 125% (c) 7.5% (d) $28\frac{4}{7}\%$

2. (a) 65% (b) 210% (c) 2% (d) 1235%

3. (i) $\frac{1}{4}$,25% (ii) $\frac{3}{5}$; 60% (iii) $\frac{3}{8}$;37.5%

4۔ (a) 37.5 (b) $\frac{3}{5}$ منٹ یا 36 سیکنڈ (c) 500 روپے (d) 0.75 کلوگرام یا 750 گرام

5۔ (a) 12000 (b) 9,000 روپے (c) 1250 کلومیٹر (d) 20منٹ (e) 500لیٹر

6۔ (a) 0.25 $\frac{1}{4}$ (b)1.5; $\frac{3}{2}$ (c) 0.2; $\frac{1}{5}$ (d) 0.05; $\frac{1}{20}$ **7.** 30%

8. 40%; 6000 **9.** ₹ 40,000 **10.** 5 میچ

مشق 8.3

1۔ (a) نفع = ₹75؛ نفع% = 30 (b) نفع = ₹ 1500؛ نفع% = 12.5

(c) نفع = 500؛ نفع % = 20 (d) نقصان = ₹100؛ نقصان % = 40

2. (a) 75%; 25% (b) 20%, 30%, 50% (c)20%; 80% (d)12.5%; 25%; 62.5%

3. 2% **4.** $5\frac{5}{7}\%$ **5.** ₹ 12,000 **6.** ₹ 16,875

7. (i) 12% (ii) 25 g **8.** ₹ 233.75 **9.** (a) ₹1,632 (b) Rs 8,625

10. 0.25% **11.** Rs 500

مشق 9.1

1. (i) $\frac{-2}{3},\frac{-1}{2},\frac{-2}{5},\frac{-1}{3},\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{-3}{2},\frac{-5}{3},\frac{-8}{5},\frac{-10}{7},\frac{-9}{5}$

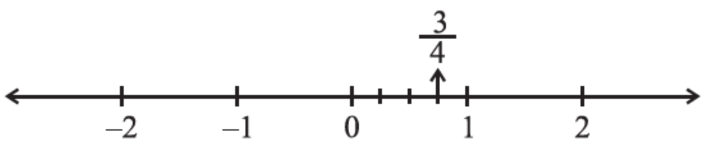
(iii) $\frac{-35}{45}\left(=\frac{-7}{9}\right),\frac{-34}{45},\frac{-33}{45}\left(=\frac{-11}{15}\right),\frac{-32}{45},\frac{-31}{45}$ (iv) $\frac{-1}{3},\frac{-1}{4},0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}$

2. (i) $\frac{-15}{25},\frac{-18}{30},\frac{-21}{35},\frac{-24}{40}$ (ii) $\frac{-4}{16},\frac{-5}{20},\frac{-6}{24},\frac{-7}{28}$

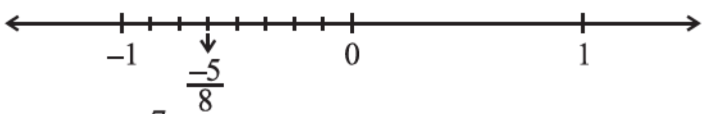
(iii) $\frac{5}{-30},\frac{6}{-36},\frac{7}{-42},\frac{8}{-48}$ (iv) $\frac{8}{-12},\frac{10}{-15},\frac{12}{-18},\frac{14}{-21}$

3. (i) $\frac{-4}{14},\frac{-6}{21},\frac{-8}{28},\frac{-10}{35}$ (ii) $\frac{10}{-6},\frac{15}{-9},\frac{20}{-12},\frac{25}{-15}$ (iii) $\frac{8}{18},\frac{12}{27},\frac{16}{36},\frac{28}{63}$

4. (i)

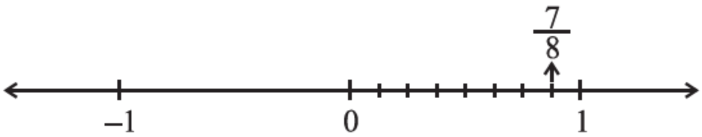


(ii)



(iii)

(iv)



5۔ P ظاہر کررہا ہے $\frac{7}{3}$ Q ظاہر کررہا ہے $\frac{8}{3}$ R ظاہر کررہا ہے $\frac{-4}{3}$ S ظاہر کررہا ہے $\frac{-5}{3}$

6۔ (ii), (iii), (iv), (v)

7. (i) $\frac{-4}{3}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-11}{18}$ (iv) $\frac{-4}{5}$

8. (i) $<$ (ii) $<$ (iii) $=$ (iv) $>$ (v) $<$ (vi) $=$ (vii) $>$

9. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}$ (iii) $\frac{2}{-3}$ (iv) (v) $-3\frac{2}{7}$

10. (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}$ (iii) $\frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{7}$

مشق 9.2

1. (i) $\frac{-3}{2}$ (ii) $\frac{34}{15}$ (iii) $\frac{17}{30}$ (iv) $\frac{82}{99}$

(v) $\frac{-26}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}$ (vii) $\frac{34}{15}$

2. (i) $\frac{-13}{72}$ (ii) $\frac{23}{63}$ (iii) $\frac{1}{195}$ (iv) $\frac{-89}{88}$ (v) $\frac{-73}{9}$

3. (i) $\frac{-63}{8}$ (ii) $\frac{-27}{10}$ (iii) $\frac{-54}{55}$ (iv) $\frac{-6}{35}$ (v) $\frac{6}{55}$ (vi) 1

4. (i) -6 (ii) $\frac{-3}{10}$ (iii) $\frac{4}{15}$ (iv) $\frac{-1}{6}$ (v) $\frac{-14}{13}$

(vi) $\frac{91}{24}$ (vii) $\frac{-15}{4}$

مشق 11.1

1. (i) 150000 مربع سینٹی میٹر (ii) 1,500,000,000 روپے

2. 6400 مربع سینٹی میٹر **3.** 20 میٹر **4.** 525 مربع سینٹی میٹر ; 15 سینٹی میٹر **5.** 40 میٹر

6۔ 31 مربع سینٹی میٹر 7۔ 1050 مربع سینٹی میٹر ; 35 سینٹی میٹر 8۔ ₹ 284

مشق 11.2

1. (a) 28 مربع سینٹی میٹر (b) 15 مربع سینٹی میٹر (c) 8.75 مربع سینٹی میٹر (d) 24 مربع سینٹی میٹر (e) 8.8 مربع سینٹی میٹر

2. (a) 6 مربع سینٹی میٹر (b) 8 مربع سینٹی میٹر (c) 6 مربع سینٹی میٹر (d) 3 مربع سینٹی میٹر

3. (a) 12.3 سینٹی میٹر (b) 10.3 سینٹی میٹر (c) 5.8 سینٹی میٹر (d) 1.05 سینٹی میٹر

4. (a) 11.6 سینٹی میٹر (b) 80 سینٹی میٹر (c) 15.5 سینٹی میٹر

5. (a) 91.2 مربع سینٹی میٹر (b) 11.4 سینٹی میٹر

6۔ BM کی لمبائی = 30cm؛ DL کی لمبائی = 42cm

7۔ ΔABC کا رقبہ = 30 مربع سینٹی میٹر؛ AD کی لمبائی = $\frac{60}{13}$ سینٹی میٹر

8۔ ΔABC کا رقبہ = 27 مربع سینٹی میٹر؛ CE کی لمبائی = 7.2 سینٹی میٹر

مشق 11.3

1. (a) 88 سینٹی میٹر (b) 176 ملی میٹر (c) 132 سینٹی میٹر

2. (a) 616 مربع ملی میٹر (b) 1886.5 مربع میٹر (c) $\frac{550}{7}$ مربع سینٹی میٹر

3. 1886.5 مربع میٹر؛ 24.5 میٹر
4. 528 روپے؛ 132 میٹر
5. 21.98 مربع سینٹی میٹر

6. 70.65 روپے؛ 4.71 میٹر
7. 25.7 سینٹی میٹر
8. Rs 30.14 (approx.)

9. دائرہ؛ 11 سینٹی میٹر؛ 154 مربع سینٹی میٹر؛ 7 سینٹی میٹر
10. 536 مربع سینٹی میٹر
11. 23.44 مربع سینٹی میٹر

12. 78.5 مربع سینٹی میٹر 5 سینٹی میٹر
13. 879.20 مربع میٹر
14. ہاں

15. 56.52 میٹر؛ 119.32 میٹر
16. 200 وقت
17. 94.2 سینٹی میٹر

مشق 11.4

1. 0.675ha؛ 1750 مربع میٹر
2. 1176 مربع میٹر
3. 30 مربع سینٹی میٹر

4. (i) 63 مربع میٹر (ii) ₹12,600
5. (i) 116 مربع میٹر (ii) ₹ 31,360

6. 0.99 ha; 1.2 ha
7. (i) 441 مربع میٹر (ii) ₹48,510
8. 9.12 سم، ہاں

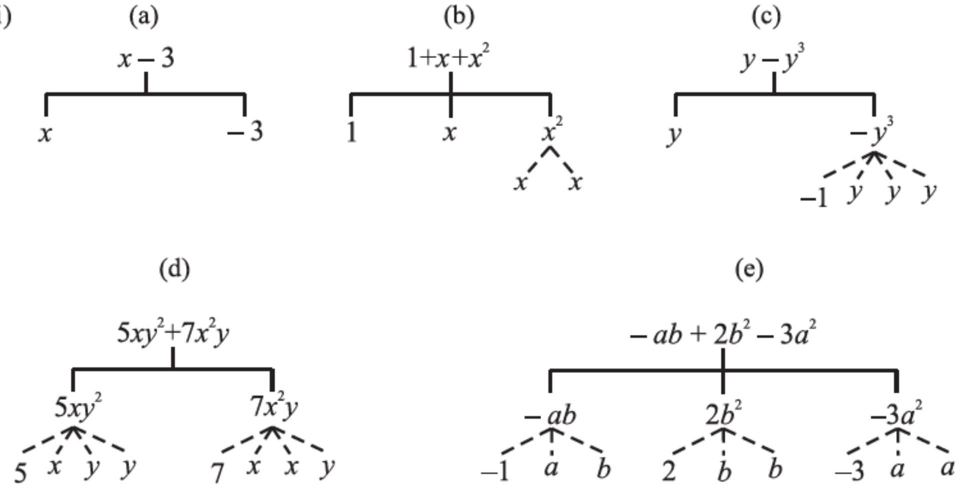
9. (i) 50 مربع میٹر (ii) 12.56 مربع میٹر (iii) 37.44 مربع میٹر (iv) 12.56 میٹر

10. (i) 110 مربع سینٹی میٹر (ii) 11.66 مربع سینٹی میٹر؛ 150 مربع سینٹی میٹر

مشق 12.1

1. (i) $y - z$ (ii) $\frac{1}{2}(x + y)$ (iii) z^2 (iv) $\frac{1}{4}pq$ (v) $x^2 + y^2$
(vi) 5 + 3 ملی میٹر
(vii) $10 - yz$ (viii) $ab - (a + b)$

2. (i)



(ii)

	عبارت	ارکان	اجزائے ضربی
(a)	$-4x+5$	$-4x$ 5	$-4, x$ 5
(b)	$-4x+5y$	$-4x$ $5y$	$-4, x$ $5, y$
(c)	$5y+3y^2$	$5y$ $3y^2$	$5, y$ $3, y, y$
(d)	$xy+2x^2y^2$	xy $2x^2y^2$	x, y $2, x, x, y, y$
(e)	$pq+q$	pq q	p, q q
(f)	$1.2ab-2.4b+3.6a$	$1.2ab$ $-2.4b$ $3.6a$	$1.2, a, b$ $-2.4, b$ $3.6, a$
(g)	$\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}, x$	$\frac{3}{4}, x$
(h)	$0.1p^2+0.2q^2$	$\frac{1}{4}$ $0.1p^2$ $0.2q^2$	$\frac{1}{4}$ $0.1, p, p$ $0.2, q, q$

3۔

	عبارت	ارکان	ضریب
(i)	$5 - 3t^2$	$-3t^2$	-3
(ii)	$1 + t + t^2 + t^3$	t t^2 t^3	1 1 1
(iii)	$x + 2xy + 3y$	x $2xy$ $3y$	1 2 3
(iv)	100m +1000n	100m 1000n	100 1000
(v)	$-p^2q^2 + 7pq$	$-p^2q^2$ $7pq$	-1 7
(vi)	$1.2a + 0.8b$	$1.2a$ $0.8b$	1.2 0.8
(vii)	$3.14r^2$	$3.14r^2$	3.14
(viii)	$2(l + b)$	$2l$ $2b$	2 2
(ix)	$0.1y + 0.01y^2$	$0.1y$ $0.01y^2$	0.1 0.01

4۔ (a)

	عبارت	x والے ارکان	x کے ضریب
(i)	$y^2x + y$	y^2x	y^2
(ii)	$13y^2 - 8yx$	$-8yx$	$-8y$
(iii)	$x + y + 2$	x	1
(iv)	$5 + z + zx$	zx	z
(v)	$1 + x + xy$	x xy	1 y
(vi)	$12xy^2 + 25$	$12xy^2$	$12y^2$
(vii)	$7 + xy^2$	xy^2	y^2

(b)

	عبارت	y^2 والے ارکان	y^2 کے ضریب
(i)	$8-xy^2$	$-xy^2$	$-x$
(ii)	$5y^2+7x$	$5y^2$	5
(iii)	$2x^2y-15xy^2+7y^2$	$-15xy^2$ $7y^2$	$-15x$ 7

5۔ (i) دورکنی (ii) یک رکنی (iii) تین رکنی (iv) یک رکنی
(v) تین رکنی (vi) دورکنی (vii) دورکنی (viii) یک رکنی
(ix) تین رکنی (x) دورکنی (xi) دورکنی (xii) تین رکنی

6۔ (i) یکساں (ii) یکساں (iii) غیر یکساں (iv) یکساں
(v) غیر یکساں (vi) غیر یکساں

7. (a) $-xy^2, 2xy^2; -4yx^2, 20x^2y; 8x^2, -11x^2, -6x^2; 7y, y; -100x, 3x; -11yx, 2xy$

(b) $10pq, -7qp, 78qp; 7p, 2405p; 8q, -100q;$
$-p^2q^2, 12q^2p^2; -23, 41; -5p^2, 701p^2; 13p^2q, qp^2$

مشق 12.2

1. (i) $8b-32$ (ii) $7z^3+12z^2-20z$ (iii) $p-q$ (iv) $a+ab$
(v) $8x^2y+8xy^2-4x^2-7y^2$ (vi) $4y^2-3y$

2. (i) $2mn$ (ii) $-5tz$ (iii) $12mn-4$ (iv) $a+b+3$
(v) $7x+5$ (vi) $3m-4n-3mn-3$ (vii) $9x^2y-8xy^2$
(viii) $5pq+20$ (ix) 0 (x) $-x^2-y^2-1$

3. (i) $6y^2$ (ii) $-18xy$ (iii) $2b$ (iv) $5a+5b-2ab$
(v) $5m^2-8mn+8$ (vi) x^2-5x-5
(vii) $10ab-7a^2-7b^2$ (viii) $8p^2+8q^2-5pq$

4. (a) $x^2+2xy-y^2$ (b) $5a+b-6$

5. $4x^2-3y^2-xy$

6. (a) $-y + 11$ (b) $2x + 4$

مشق 12.3

1. (i) 0 (ii) 1 (iii) –1 (iv) 1 (v) 1

2. (i) –1 (ii) –13 (iii) 3 **3.**(i) –9 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1

4. (i) 8 (ii) 4 (iii) 0 **5.**(i) –2 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 2

6. (i) $5x - 13; -3$ (ii) $8x - 1; 15$ (iii) $11x - 10; 12$ (iv) $11x + 7; 29$

7. (i) $2x+4;\ 10$ (ii) $-4x + 6; -6$ (iii) $-5a + 6;11$ (iv) $-8b + 6; 22$

(v) $3a - 2b - 9; -8$

8. (i) 1000 (ii) 20 **9.** –5 **10.** $2a^2 + ab + 3;\ 38$

مشق 12.4

1۔

قطعات کی تعداد	ہندسوں کی تعداد	علامت
26	5	6
51	10	
501	100	
16	5	4
31	10	
301	100	
27	5	8
52	10	
502	100	

2. (i) $2n - 1 \rightarrow 100^{th} : 199$

(ii) $3n + 2 \rightarrow 5^{th} : 17;$

$10^{th} : 32;$

$100^{th}: 302$

(iii) $4n+1 \rightarrow 5^{th}: 21;$

$10^{th}: 41;$

$100^{th}: 401$

(iv) $7n+20 \rightarrow 5^{th}: 55;$

$10^{th}: 90;$

$100^{th}: 720$

(v) $n^2+1 \rightarrow 5^{th}: 26;$

$10^{th}: 101$

مشق 13.1

1.	(i) 64	(ii) 729	(iii) 121	(iv) 625	
2.	(i) 6^4	(ii) t^2	(iii) b^4	(iv) $5^2 \times 7^3$	
	(v) $2^2 \times a^2$	(vi) $a^3 \times c^4 \times d$			
3.	(i) 2^9	(ii) 7^3	(iii) 3^6	(iv) 5^5	
4.	(i) 3^4	(ii) 3^5	(iii) 2^8	(iv) 2^{100}	(v) 2^{10}
5.	(i) $2^3 \times 3^4$	(ii) 5×3^4	(iii) $2^2 \times 3^3 \times 5$	(iv) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$	
6.	(i) 2000	(ii) 196	(iii) 40	(iv) 768	(v) 0
	(vi) 675	(vii) 144	(viii) 90000		
7.	(i) – 64	(ii) 24	(iii) 225	(iv) 8000	
8.	(i) $2.7 \times 10^{12} > 1.5 \times 10^8$		(ii) $4 \times 10^{14} < 3 \times 10^{17}$		

مشق 13.2

1.	(i) 3^{14}	(ii) 6^5	(iii) a^5	(iv) 7^{x+2}	(v) 5^3	(vi) $(10)^5$
	(vii) $(ab)^4$	(viii) 3^{12}	(ix) 2^8	(x) 8^{t-2}		
2.	(i) 3^3	(ii) 5^3	(iii) 5^5	(iv) 7×11^5	(v) 3^0 or 1	(vi) 3

(vii) 1 (viii) 2 (ix) $(2a)^2$ (x) a^{10} (xi) a^3b (xii) 2^8

3. (i) غلط ; $10 \times 10^{11} = 10^{12}$ and $(100)^{11} = 10^{22}$ (ii) غلط ; $2^3 = 8, 5^2 = 25$

(iii) غلط ; $6^5 = 2^5 \times 3^5$ (iv) صحیح ; $3^0 = 1, (1000)^0 = 1$

4. (i) $2^8 \times 3^4$ (ii) $2 \times 3^3 \times 5$ (iii) $3^6 \times 2^6$ (iv) $2^8 \times 3$ **5.** (i) 98

(ii) $\frac{5t^4}{8}$ (iii) 1

مشق 13.3

1. $279404 = 2 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

$3006194 = 3 \times 10^6 + 0 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

$2806196 = 2 \times 10^6 + 8 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

$120719 = 1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

$20068 = 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

2. (a) 86045 (b) 405302 (c) 30705 (d) 900230

3. (i) 5×10^7 (ii) 7×10^6 (iii) 3.1865×10^9 (iv) 3.90878×10^5

(v) 3.90878×10^4 (vi) 3.90878×10^3

4. (a) $3.84 \times 10^8 \, m$ (b) 3×10^8 m/s (c) 1.2756×10^7 m

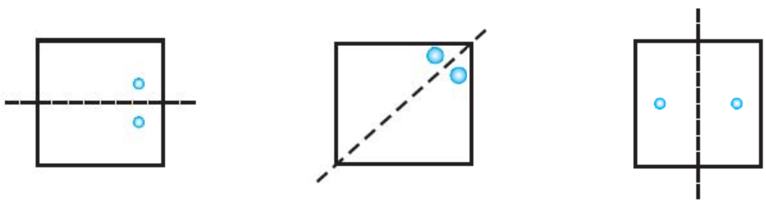
(d) 1.4×10^9 m (e) 1×10^{11} (f) 1.2×10^{10} years

(g) 3×10^{20} m (h) 6.023×10^{22} (i) 1.353×10^9 km^3

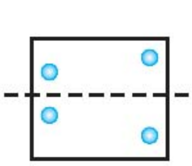
(j) 1.027×10^9

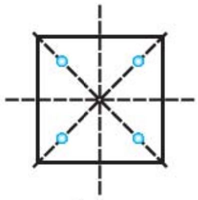
مشق 14.1

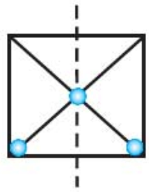
1-

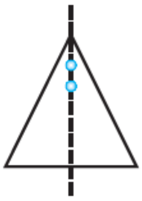


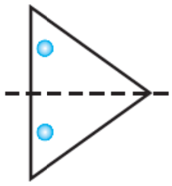
(a) (b) (c)

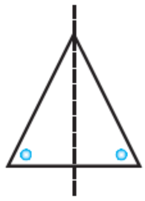

(d)

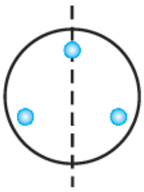

(e)

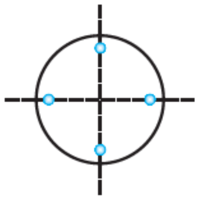

(f)


(g)


(h)

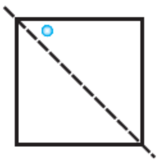

(i)

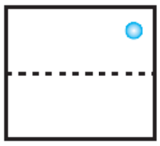

(j)

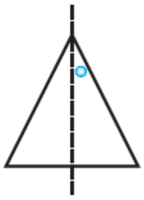

(k)

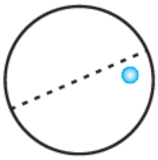
(l)

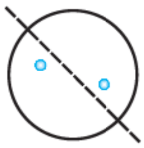
-2


(a)

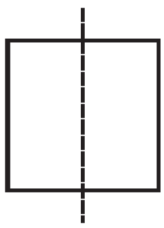

(b)

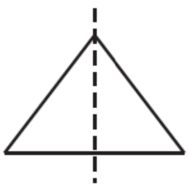

(c)

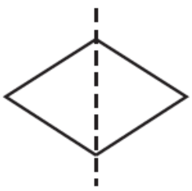

(d)

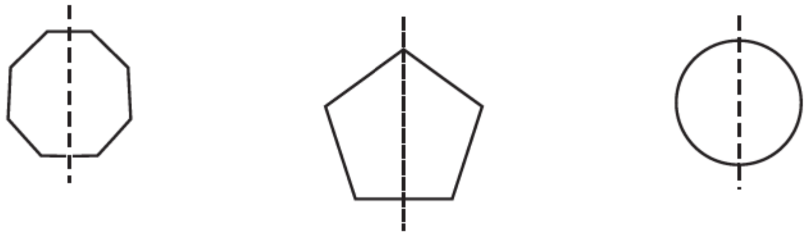

(e)

-3


(a) مربع

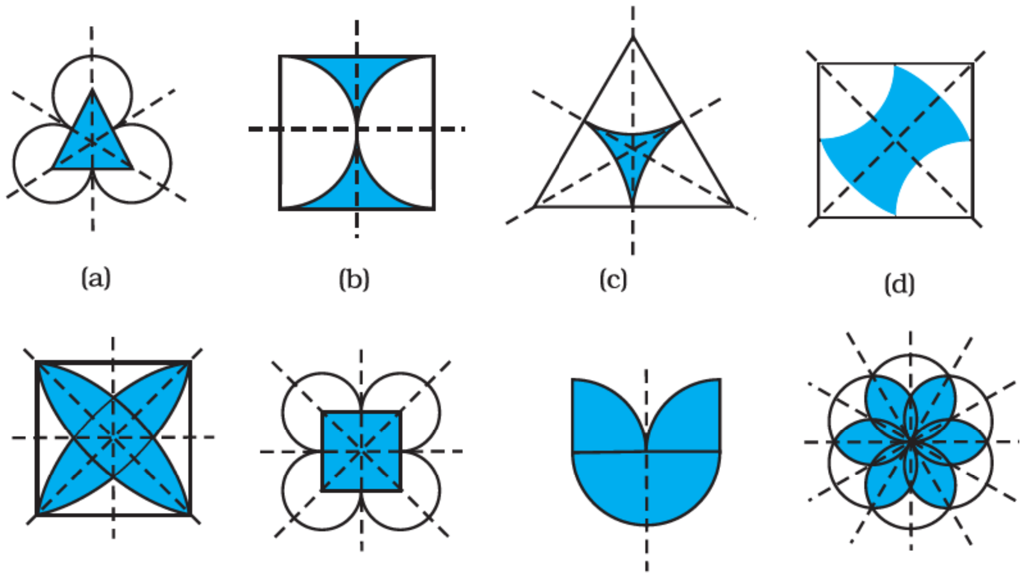

(b) مثلث


(c) معین



(d) دائرہ (e) پانچ ضلعی (f) آٹھ ضلعی

4۔



(a) (b) (c) (d)

(e) (f) (g) (h)

7. (a) 3 (b) 1 (c) 0 (d)4 (e) 2 (f) 2

(g) 0 (h) 0 (i) 6 (j) لامحدود،بہت سے

8. (a) A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y (b) B, C, D, E, H, I, O, X

(c) O, X, I, H

10۔ (a) وسطانیہ (b) قطر

مشق 14.2

1. (a), (b), (d), (e), (f)

2. (a) 2 (b) 2 (c)3 (d) 4 (e) 4 (f) 5

(g) 6 (h) 3

مشق 14.3

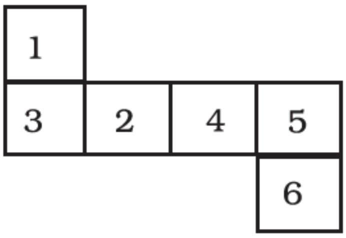
3۔ ہاں　　5۔ مربع　　6۔ 120°, 180°, 240°, 300°, 360°

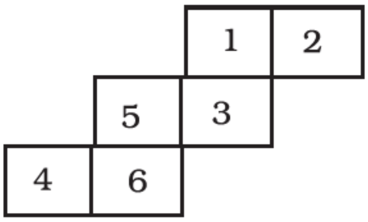
7۔ (i) ہاں　　(ii) نہیں

مشق 15.1

1۔ (ii)، (iii)، (iv)، (v) کے خاکے کعب بنائیں گے۔

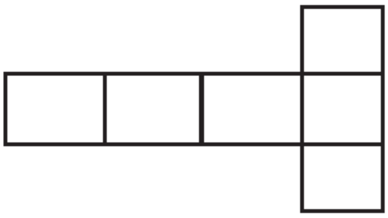
2۔

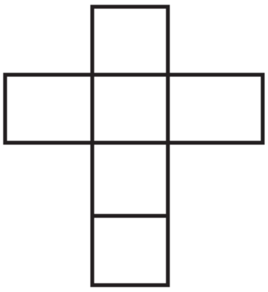




3۔ نہیں، کیونکہ متقابل رخوں کا ایک جوڑا 1 اور 4 ہے جس کا حاصل جمع 7 نہیں ہے اور دوسرا متقابل رخوں کا جوڑا 3 اور 6 ہے جس کا حاصل جمع بھی 7 نہیں ہے۔

4۔ تین رخ





5. (a) (ii)　　(b) (iii)　　(c) (iv)　　(d) (i)

ذہن الجھانے والے سوال

1۔ عددی پہیلیاں حل کیجیے

(i) بتائیے کہ میں کون ہوں! میں کون ہوں!

مجھ میں سے آٹھ نکالیے

اور ایک درجن تقسیم کیجیے

کرکٹ کی ایک ٹیم حاصل کرنے کے لیے

(ii) ایک عدد کے 6 گنے میں 4 جوڑیئے

64 حاصل کرنے کے لیے

پورے انعام کے آپ حقدار

اگر آپ فوراً بتائیں صحیح جواب

2۔ معمّے حل کیجیے

(i) جنگل میں ایک پرانا پیپل کا پیڑ تھا

اس پیڑ کی شاخیں تھیں دس اور تین

ہر شاخ پر رہتی تھیں چڑیاں چودہ

گورئیں بھوری، کوے کالے، اور طوطے ہرے

کوے طوطوں کے دو گنے تھے

گورّئیں کوؤں کی دوگنی تھیں

ہم حیران کہ پرندے ہر قسم کے کتنے

کیا آپ نہیں چاہ رہے ہماری مدد کرنا

(iii) میرے پاس پانچ روپیے اور 2 روپیے کے سکوں کی تعداد 5 روپیے والے سکوں کی دوگنی ہے۔ میرے پاس کل رقم 108 روپے ہے بتایئے کہ میرے پاس پانچ روپیے والے سکے کتنے ہیں اور کتنے 12 روپیے والے سکے ہیں؟

3۔ میرے پاس 3 ماندیں ہیں اور ہر ایک ماند میں 2 چٹائیاں ہیں ہر چٹائی پر 2 بلیاں بیٹھی ہیں۔ ہر ایک بلی پروں والی دو ٹوپیاں پہنے ہوئے ہیں۔ ہر ایک ٹوپی پر دو بڑے چوہے پڑے ہوئے ہیں اور ہر ایک چوہے پر دو چمگادڑیں بسیرہ کئے ہوئے ہیں۔ بتایئے میری ناندوں میں کل کتنی چیزیں ہیں؟

4۔ 27 چھوٹے کعبوں کو جوڑ کر ایک بڑا کعب بنایا گیا، بڑے کعب کے باہری حصے کو پیلے رنگ سے رنگا گیا۔ ان 27 کعبوں میں سے کتنے پیلے رنگ سے رنگے گئے ہیں۔

(i) صرف ایک رخ پر؟

(ii) دو رخوں پر؟

(iii) تین رخوں پر؟

5۔ راہل اپنے باغ میں ایک پیڑ کی اونچائی معلوم کرنا چاہتا ہے۔ اس نے اپنی اونچائی اور سائے کی نسبت (Ratio) معلوم کی۔ یہ 4:1 تھی۔ اس کے بعد اس نے پیڑ کا سایہ ناپا۔ یہ 15 فٹ تھا۔ تب پیڑ کی اونچائی کیا ہوگی؟

6۔ لکڑی کے تین بلاک کاٹنے میں لکڑی کاٹنے والے کو 12 منٹ لگے۔ اس کو ایسے ہی 5 بلاک کاٹنے میں کتنا وقت لگے گا؟

7۔ ایک کپڑا دھونے پر 0.5% سکڑ جاتا ہے۔ یہ کسر کیا ہے؟

8۔ سمیتا کی امی کی عمر 34 سال ہے۔ آج سے 2 سال کے بعد والدہ کی عمر سمیتا کی اس وقت کی عمر کا 4 گنا ہوگی۔ سمیتا کی اس وقت کیا عمر ہوگی؟

9۔ مایا، مادھورا اور محسنہ دوست ہیں اور ایک ہی کلاس میں پڑھتی ہیں۔ جغرافیہ کے ایک کلاس ٹسٹ میں مایا کو 25 میں سے 16 اور مادھورا نے 20 نمبر حاصل کیے۔ ان کا اوسط اسکور 19 تھا۔ بتائیے کہ محسنہ کو کتنے نمبر ملے؟

جوابات

1۔ (i) 140 (ii) 10

2۔ (i) گورئیں:140 کوے:52 طوطے:26

(ii) ₹5 کے سکے=12 ₹2 کے سکے=24

3۔ 124 4۔ (i) 6 (ii) 10 (iii) 8 5۔ 60فٹ

6۔ 24منٹ 7۔ $\frac{1}{200}$ 8۔ 7سال 9۔ 21