باب 7

5162CH07

# مبادلے اور اجتماع
# (PERMUTATIONS AND COMBINATIONS)

❖ تحقیق کے تمام نتائج ریاضی ہی کی صورت میں سامنے آئے ہیں اس کی وجہ یہ ہے کہ ریاضی کے علاوہ رہنمائی کا کوئی اور ذریعہ دستیاب نہیں ہے۔ ڈارون ❖



## 7.1 تعارف (Introduction)

جیکب برنولی
(1654-1705)

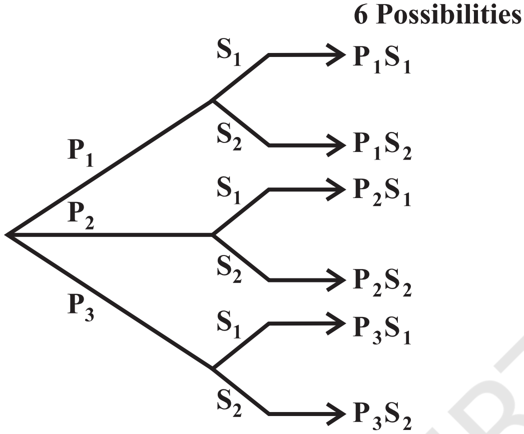
مان لیجئے آپ کے پاس ایک سوٹ کیس ہے جس میں نمبر والا تالہ ہے۔ نمبر والے تالے میں 10 ہندسے جو 0 سے 9 تک ہیں۔ تالا اس وقت کھولا جا سکتا ہے جب چار خاص ہندسے ایک خاص اور الگ انداز میں ایک تواتر میں ہوں۔ کسی طرح آپ اس ہندسوں کے خاص تواتر کو بھول جاتے ہیں۔ آپ کو صرف پہلا ہندسہ یاد رہتا ہے جو 7 ہے۔ تالے کو کھولنے کیلئے آپ کسی تین ہندسوں والے تواتر کی جانچ کریں گے۔ اسکا جواب دینے کیلئے آپ فوراً باقی 9 اعداد کو لے کر تمام ممکن ترتیبوں کی فہرست بنانا شروع کر دیں گے جہاں تین ہندسے ایک ساتھ ہوں۔ لیکن یہ طریقہ بہت ہی پریشانی والا اور مشکل ہے کیونکہ تواتروں کی ممکن تعداد بہت زیادہ ہو سکتی ہے۔ یہاں اس سبق میں ہم گننے کے کچھ بنیادی طریقے دیکھیں گے جو ہمیں اس سوال کا جواب دینے میں مدد کریں گے۔ دراصل یہ طریقہ نمبروں کو مختلف انداز میں لگانے اور چننے میں بغیر فہرست بنائے ہماری مدد کریں گے۔ پہلے اقدام کے طور پر ہم ایک اصول کی جانچ کرتے ہیں جو ان طریقوں کو سیکھنے میں سب سے بنیادی ہے۔

## 7.2 گنتی کا بنیادی اصول (Fundamental principle of counting)

ہم ذیل مسئلہ پر غور کرتے ہیں: موہن کے پاس 3 پتلونیں اور 2 قمیص ہیں۔ وہ کتنے مختلف جوڑوں میں پتلون اور قمیص

پہن سکتا ہے۔ پتلون چننے کے تین طریقہ ہیں کیونکہ اس کے پاس 3 پتلون موجود ہیں۔ اسی طرح ایک قمیص بھی دو طریقوں سے چنی جاسکتی ہے۔ پتلون کی ہر ایک پسند کیلئے قمیص کی دو پسندیں ہیں اسلئے پتلون اور قمیض کے $2 \times 3 = 6$ جوڑے ہیں۔

ہم پتلون کو $P_1$، $P_2$، $P_3$ کا نام دیتے ہیں اور دو قمیصوں کو $S_1$ اور $S_2$ کا تب یہ چھ ممکنات کو ذیل شکل (تصویر) کے ذریعے دکھایا جا سکتا ہے۔ تصویر 7.1

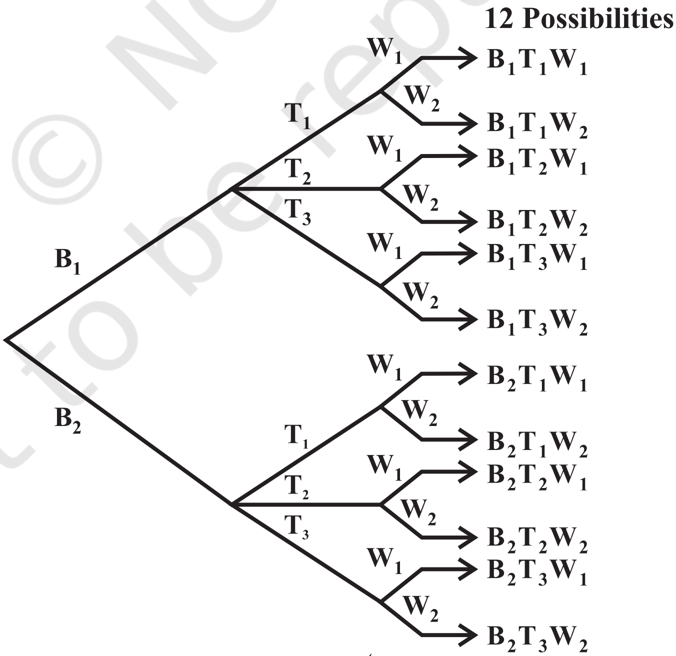


شکل 7.1

ہمیں اس طرح کے دوسرے مسئلہ پر غور کرنا چاہیے۔

شبنم کے پاس 2 اسکول بیگ (تھیلے)، 3 کھانے کے ڈبے اور 2 پانی کی بوتلیں ہیں۔ کتنے طریقہ سے وہ ان اشیاء کو لے جاسکتی ہے (ہر ایک میں سے ایک چن کر)

ایک اسکول بیگ دو مختلف طریقوں سے چنا جا سکتا ہے۔ اسکول بیگ چننے کے بعد، ایک کھانے کا ڈبہ تین مختلف طریقوں سے چنا جاسکتا ہے۔ یہاں $2 \times 3 = 6$ اسکول بیگ



شکل 7.2

اور کھانے کے ڈبے کے جوڑے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک جوڑے کے لیے ایک پانی کی بوتل '2' مختلف طریقوں سے چنی جاسکتی ہے۔ یہاں $2 \times 6 = 12$ مختلف طریقے ہیں جن کے ذریعے شبنم ان اشیاء کو اسکول لے جاسکتی ہے۔ اگر ہم اسکول بیگوں کا نام $B_1$ اور $B_2$ رکھیں۔ تین کھانے کے ڈبوں کا $T_1$ ، $T_2$ ، $T_3$ اور دو پانی کی بوتلیں $w_1$ ، $w_2$ یہ ممکنات ذیل تصویر کے ذریعے دکھائی اور سمجھائی جاسکتی ہیں۔

دراصل مندرجہ بالا دئے گئے مسائل درج ذیل میں دئے گئے اصول نافذ کرکے حل کئے جاتے ہیں جسے ہم گنتی کا بنیادی اصول کہتے ہیں، یا سادہ طور پر ضرب کا اصول، جو یہ کہتا ہے۔

اگر ایک وقوعہ m مختلف طریقوں میں واقع ہوتا ہے، اس کے بعد دوسرا وقوعہ n مختلف طریقوں میں واقع ہوتا ہے، تو وقوعوں کے واقع ہونے کی کل تعداد دی گئی ترتیب $m \times n$ ہے۔

مندرجہ بالا اصول کسی بھی محدود عدد کے وقوعوں کے لئے اصول کلیہ کی حیثیت رکھتا ہے۔ مثال کے طور '3 وقوعوں کیلئے اصول اسطرح ہے:

اگر ایک وقوعہ m مختلف طریقوں میں واقع ہوسکتا ہے، اس کے بعد دوسرا وقوعہ n مختلف طریقوں میں واقع ہوسکتا ہے، اس کے بعد تیسرا وقوعہ p مختلف طریقوں میں واقع ہوسکتا ہے تو وقوعوں کے واقع ہونیکی کل تعداد دی گئی ترتیب میں $m \times n \times p$ ہے'

پہلے مسئلہ میں، ایک پتلون اور ایک قمیص کو پہننے کے مطلوبہ طریقے مندرجہ ذیل ہیں وقوعہ کی جانشینی کے مختلف طریقوں کی تعداد سے واقع ہونا تھا

(i) ایک پتلون انتخاب کرنے کا وقوعہ

(ii) ایک قمیص انتخاب کرنے کا وقوعہ

دوسرا مسئلہ میں، مطلوبہ طریقوں کی تعداد، مندرجہ ذیل وقوعوں کی جانشینی کے واقع ہونے کے مختلف طریقوں کی تعداد تھی:

(i) ایک اسکول بیگ انتخاب کرنے کا وقوعہ

(ii) ایک کھانے کا ڈبہ انتخاب کرنے کا وقوعہ

(iii) یک پانی کی بوتل انتخاب کرنے کا وقوعہ

یہاں دونوں مسئلوں (کیسوں) میں' وقوعہ ہر ایک مسئلہ (Problem) میں بہت سی ممکن ترتیب میں مل سکتے ہیں۔ لیکن ہمیں کوئی بھی ایک ممکن ترتیب چننی ہے اور وقوعوں کے واقع ہونے کے مختلف طریقوں کی تعداد کی گنتی کرنی ہے۔

**مثال 1** چار حروفی الفاظ کی تعداد معلوم کیجیے خواہ بامعنی ہو یا بے معنی جو لفظ ROSE کے حروف کو استعمال کر کے بنائے جائیں جہاں حروف کے دوہرانے کی اجازت نہیں ہے۔

**حل** یہاں اتنے حروف ہیں جتنے 4 خالی جگہوں کو بھرنے کے طریقے 4 الفاظ سے □□□□ ، اس بات کو دھیان میں رکھتے ہوئے کہ الفاظ کو دہرانے کی اجازت نہیں ہے۔ پہلی جگہ چار (4) مختلف طریقوں سے کوئی بھی چار الفاظ R، O، S، E لیکر بھری جاسکتی ہے۔ اسکے بعد دوسری جگہ بچے ہوئے 3 الفاظ سے 3 مختلف طریقوں سے بھری جاسکتی ہے۔ اسکے بعد تیسری جگہ 2 مختلف طریقوں سے بھری جاسکتی ہے۔ اسکے بعد چوتھی جگہ صرف ایک طریقہ سے بھری جاسکتی ہے اسطرح 4 جگہوں کو بھرنے کے طریقوں کی تعداد ضرب کے اصول سے $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ہے اس لئے الفاظ کی مطلوبہ تعداد 24 ہے۔

> **نوٹ** اگر حروف کو دہرانے کی اجازت ہوتی' تو کتنے الفاظ بنتے؟ اسے آسانی سے سمجھا جاسکتا ہے کہ 4 جگہوں میں سے ہر ایک اپنے جانشینوں سے 4 مختلف طریقوں سے بھری جا سکتی ہے۔ اس لئے الفاظ کی مطلوبہ تعداد $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$

**مثال 2** 4 جھنڈے مختلف رنگوں کے دیئے ہوئے ہیں' اگر ایک اشارے (Signal) میں دو جھنڈے درکار ہوں جس میں ایک دوسرے کے نیچے ہو تو بتایئے اس سے کتنے اشارہ بن سکتے ہیں؟

**حل** اتنے ہی اشارے ہوں گے جتنے کہ دو خالی ▭ جگہوں کو بھرنے کے طریقے ہیں چار مختلف رنگوں کے جھنڈوں کی جانشینی۔ اوپری خالی جگہ کو 4 میں سے ایک جھنڈے سے چار مختلف طریقوں سے بھرا جاسکتا ہے۔ اسکے بعد نیچے کی خالی جگہ باقی مختلف 3 جھنڈوں سے 3 مختلف طریقوں سے بھری جا سکتی ہے۔ اسلئے ضرب کے اصول سے اشاروں کی مطلوبہ تعداد

$$4 \times 3 = 12$$

**مثال 3** اعداد 1، 2، 3، 4، 5 سے کتنے دو اعداد والے جفت اعداد بنائے جاسکتے ہیں اگر اعداد کو دہرایا جائے؟

**حل** دو خالی جگہوں کو جانشینی میں بھرنے کے اتنے ہی طریقے ہوں گے جتنے کے 5 دیئے ہوئے اعداد کے، یہاں ہم اکائی کی جگہ سے بھرنا □□ شروع کرتے ہیں کیونکہ اس جگہ کے لئے ہم صرف 2 اور 4 میں سے انتخاب کر سکتے ہیں اور یہ صرف دو طریقے سے ہوسکتا ہے' اس کے بعد دہائی والی جگہ کسی بھی 5 مختلف طریقوں سے 5 اعداد سے بھری جا سکتی ہے کیونکہ اعداد کو

دہرایا جا سکتا ہے۔ اس لئے ضرب کے اصول سے مطلوبہ دو اعداد والا مثبت عدد $5 \times 2$ i.e. 10 ہے

**مثال 4** مختلف نشانوں کی تعداد معلوم کیجئے جو کم سے کم دو جھنڈوں سے بنائے جا سکتے ہیں اور جو اس طریقے کہ (ایک دوسرے کے نیچے ہو) ایک سیدھے ڈنڈے پر اگر 5 مختلف جھنڈے موجود ہیں۔

**حل** ایک نشان 2 جھنڈوں، 3 جھنڈوں، 4 جھنڈوں یا 5 جھنڈوں سے بن سکتا ہے۔ اب ہم ان ممکن نشانوں کی گنتی کرتے ہیں جن میں 2 جھنڈے 3 جھنڈے، 4 جھنڈے اور 5 جھنڈے موجود ہوں اور پھر اس تعداد کو جمع کرتے ہیں۔

دو نشانے والے اتنے ہی جھنڈے ہوں گے جتنے کہ 2 خالی جگہوں کو بھرنے کے طریقے 5 موجود جھنڈوں سے

ضرب کے اصول سے طریقوں کی تعداد $5 \times 4 = 20$

اسی طرح 3 جھنڈوں والے نشان کی تعداد بھی اتنی ہی ہوگی جتنے کہ 3 خالی جگہوں کو جانشینی میں 5 جھنڈوں سے بھرنے کے طریقے

طریقوں کی تعداد $5 \times 4 \times 3 = 60$ ہے

اسی طرح گنتے ہوئے ہمیں ملتا ہے

4 جھنڈے والے نشانوں کی تعداد $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

اور 5 جھنڈے والے نشانوں کی تعداد $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

اسلئے نشانوں کی مطلوبہ تعداد $= 20 \times 60 \times 120 \times 120 = 230$

## مشق 7.1

1. 1، 2، 3، 4 اور 5 سے تین ہندسوں والے کتنے اعداد بن سکتے ہیں۔ اگر مان لیا جائے کہ
   (i) ہندسوں کو دہرانے کی اجازت ہے؟
   (ii) ہندسوں کے دہرانے کی اجازت نہیں ہے؟
2. 1، 2، 3، 4، 5، 6 سے کتنے دو ہندسوں والے مثبت اعداد بنائے جا سکتے ہیں اگر کوئی ہندسہ کو دہرایا نہ جا سکے؟
3. انگریزی کے پہلے دس حروف استعمال کر کے 4 حروف والے کتنے ضابطہ بنائے جا سکتے ہیں، اگر کوئی حرف دوبارہ استعمال نہ کیا جائے؟

4. 0 سے 9 تک ہندسوں کا استعمال کر کے 5 ہندسوں والے کتنے ٹیلیفون نمبر بنائے جا سکتے ہیں اگر ہر نمبر 67 سے شروع ہو اور کوئی بھی ہندسہ ایک بار سے زیادہ نہ دکھائی دے؟

5. ایک سکہ کو تین بار اچھالا گیا اور نتیجہ کو محفوظ کر لیا گیا۔ یہاں کتنے ممکن نتیجہ ہو سکتے ہیں؟

6. 5 جھنڈے مختلف رنگوں کے دیئے ہوئے ہیں، کتنے مختلف نشان بنائے جا سکتے ہیں اگر ہر نشان میں دو جھنڈے درکار ہیں، ایک دوسرے کے نیچے ہے؟

## 7.3 مبادلہ (Permutations)

پچھلے سیکشن کی مثال 1 میں، ہم حقیقت میں مختلف ممکن حروف مثال کے طور پر Rose کی ترتیبوں کو شمار کر رہے ہیں وغیرہ وغیرہ۔ یہاں اس فہرست میں ہر ترتیب دوسرے سے الگ ہے۔ دوسرے الفاظ میں حروفوں کے لکھنے کی ترتیب اہم ہے۔ ہر ترتیب 4 مختلف حروف کو ایک وقت میں لیکر ایک مبادلہ کہلاتا ہے۔ اگر اب ہمیں تین الفاظ والے حروف کی تعداد معلوم کرنی ہے۔ معنی یا بے معنی والے جو لفظ Number کے حروف سے بنتا ہے۔ جہاں حروف کا دہرانا ممکن نہیں ہے۔ (یا اجازت نہیں ہے) یا ہمیں NUM، NMU، MUN، NUB کی ترتیب (انتظام) گننے کی ضرورت ہے وغیرہ وغیرہ۔ یہاں ہم چھ مختلف حروف کو ایک ساتھ لیکر مبادلوں کی گنتی کر رہے ہیں۔ مطلوبہ الفاظ کی تعداد $6 \times 5 \times 4 = 120$ (ضرب کا اصول استعمال کر کے) اگر حروف کو دوہرانے کی اجازت دے دی جائے تو الفاظ کے مطلوبہ نمبر $6 \times 6 \times 6 = 216$ ہوں گے۔

**تعریف 1** اشیاء کی تعداد میں سے کچھ یا ساری اشیاء کی ایک خاص ترتیب مبادلہ کہلاتی ہے

مبادلہ دی ہوئی اشیاء میں سے سب یا کچھ کا ایک مرتب مجموعہ ہوتا ہے۔

### 7.3.1 مبادلہ جب تمام اشیاء مختلف ہوں

### *(Permutations whens all the objects are distinct)*

**مسئلہ 1** $n$. مختلف اشیاء کے مبادلوں کی تعداد ایک ساتھ $r$ اشیاء لینے پر جہاں $0 < r \le n$ اور جب اشیاء دہرائی نہیں جاتیں $n(n-1)(n-2)......(n-r+1)$ ہے جسے ${}^nP_r$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

**ثبوت** یہاں اتنے ہی مبادلے ہوں گے جتنے کہ $r$ خالی جگہوں میں $\square\square\square\ldots\square$ کو $n$ اشیاء سے بھرنے کے طریقے

ہیں۔ پہلی جگہ $n$ طریقوں سے بھری جاسکتی ہے اس کے بعد دوسری جگہ $(n-1)$ طریقوں سے بھری جاسکتی ہے۔ اسکے بعد تیسری جگہ $(n-2)$ طریقوں سے بھری جاسکتی ہے، ....، rth جگہ $[n-r+1]$ طریقوں سے بھری جاسکتی ہے $r$ خالی جگہوں کو سلسلہ وار بھرنے کے کل طریقے ہیں $n(n-1)(n-2).....[n-(r-1)]$ یا $n(n-1)(n-2)......(n-r+1)$

یہ عبارت $^nP_r$ کیلئے بے ڈھنگی یا بھدی (Cumbersome) ہے اور ہمیں ایک علامتی اظہار چاہئے جو اس عبارت کی لمبائی کو چھوٹا کر سکے علامت $n!$ (جسے ہم $n$ ضربیہ یا ضربیہ $n$ پڑھیں گے) ہمارے بچاؤ میں آئی ہے۔ اب ہم پڑھیں گے کہ $n!$ کا حقیقت میں کیا مطلب ہے۔

### 7.3.2 ضربیہ علامت (Factorial notation)

علامت $n!$ پہلے $n$ طبعی اعداد کی ضرب کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کا مطلب $n! = 1\times2\times3\times4\times....\times(n-1)\times n$ کی ضرب $n!$ سے ظاہر کی جاتی ہے۔ ہم اس علامت کو $n$ ضربیہ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس لئے $...\times(n-1)\times n = n!$

$$1=1!$$

$$1\times2=2!$$

$$1\times2\times3=3!$$

$$1\times2\times3\times4=4!$$ وغیرہ

ہم بتاتے ہیں $0!=1$

ہم لکھ سکتے ہیں $5! = 4!\times5 = 3!\times4\times5 = 2!\times3\times4\times5$

$$= 1!\times2\times3\times4\times5$$

صاف طور پر، $n$ طبعی اعداد کیلئے

$$n! = n(n-1)!$$

$$= n(n-1)(n-2)! \quad \text{جبکہ} \quad (n\geq2)$$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)! \quad \text{جبکہ} \quad (n\geq3)$$

اور اس کے آگے

**مثال 5** قیمت معلوم کیجیے (i) 5! (ii) 7! (iii) 7!-5!

**حل** (i) $120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

(ii) $5040 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$

(iii) $4920 = 5040 - 120 = 7! - 5!$

**مثال 6** قیمت معلوم کیجیے (i) $\frac{7!}{5!}$ ، $\frac{12!}{10!(2-r)!}$

**حل** (i) ہمارے پاس ہے $\frac{7!}{5!} = \frac{5! \times 6 \times 7}{5!}$ $42 = 7 \times 6$

اور (ii) $\frac{12!}{(10!)(2!)} = \frac{(10!) \times 11 \times 12}{(10!) \times (2)} = 66 = 11 \times 6$

**مثال 7** $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ کو حل کیجیے، جبکہ $n=5$، r 2

**حل** ہمیں حل کرنا ہے۔

$\frac{5!}{2!(5-2)!} =$ (کیونکہ $n=5$ ، $r=2$)

ہمارے پاس ہے $\frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$

**مثال 8** اگر $\frac{1!}{8!} + \frac{1!}{9!} = \frac{x!}{10!}$ ، $x$ معلوم کیجیے

**حل** ہمارے پاس ہے $\frac{1!}{8!} + \frac{1}{8! \times 9} = \frac{x}{8! \times 910}$

اس لئے $\frac{x}{10 \times 9} = \frac{1}{9} \times 1$ یا $\frac{x}{10 \times 9} = \frac{10}{9}$

اس لئے x=100 ہے

## مشق 7.2

.1 قیمت نکالئے

(i)8! (ii)3!-4!

.2 کیا $7!=4!+3!$؟

.3 قیمت نکالیے $\frac{8!}{2!\times 6!}$

.4 اگر $\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=\frac{x}{8!}$، x معلوم کرو۔

.5 قیمت معلوم کیجیے $\frac{n!}{(n-r)!}$ جبکہ

(i,) $n=6$،$r=2$ (ii,) $n=9$،$r=5$

### 7.3.3 ${}^np_r$ کیلئے ضابطے کا اشتقاق (Derivation of the formula for ${}^np_r$)

$${}^np_r=\frac{n!}{(n-r)!},\quad o<r\le n$$

اب ہمیں پیچھے کی طرف چلنا چاہئے جہاں ہم نے ذیل فارمولہ نکالا تھا

$${}^np_r\ n(n1)(n-2)......(n-r+1)n$$

شمار کنندہ اور نسب نماں کو $3\times 21$ ...... (n-r)(n-r-1) سے ضرب کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$${}^np_r=\frac{n(n-)(n-2)...(n-r+1)(n-r)(n-r-1)...3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1)...3\times 2\times 1\times}=\frac{n!}{(n-r)!}!$$

اس لئے $n=>r<0$ جہاں، $\frac{n!}{(n-r)!}$

یہ پچھلی عبارت سے ${}^{n}p_{r}$ کیلئے بہت زیادہ آسان ہے.

خاص طور پر جب $r=ns$، $n!$ $={}^{n}p_{r}=\frac{n!}{0!}$

مبادلہ کو گننا صرف ان طریقوں کی تعداد گننا ہے جن میں کچھ یا ساری اشیاء کو بیک وقت از سر نو ترتیب دی جائے۔ صاف طور پر بغیر اشیاء کے ترتیب دینا ایسا ہی ہے جیسا کہ تمام اشیاء کو پیچھے چھوڑنا اور ہم جانتے ہیں کہ ایسا کرنے کا صرف ایک ہی راستہ ہے۔ اسلئے ہمارے پاس ہوسکتا ہے ہم رکھ سکتے ہیں

$$^{n}p_o = 1 = \frac{n!}{n!} = \frac{n!}{(n-o)!}$$

اس لئے فارمولا $r=0$ کیلئے بھی موزوں ہے

اس لئے $O<R<N$، $^{n}p_o = \frac{n!}{(nr)!}$

**مسئلہ 2** $n$ مختلف اشیاء کیلئے جبکہ $r$ بیک وقت لی جائیں۔ مبادلوں کی تعداد $n^r$ ہے، جہاں دہرانے کی اجازت ہے۔

ثبوت تقریباً مسئلہ I جیسا ہے اور یہ پڑھنے والے کیلئے چھوڑا جارہا ہے کہ وہ اسے حل کرے۔

یہاں ہم کچھ مسئلہ پچھلے سیکشن کے فارمولہ $^{n}P_r$ کا استعمال کرکے حل کررہے ہیں تاکہ اس کی اہمیت کا اندازہ لگایا جاسکے۔

مثال 1 مطلوبہ لفظوں کی تعداد $^{4}p_4 = 4! = 24$. یہاں دہرانے کی اجازت نہیں ہے اگر دہرانے کی اجازت ہوتو مطلوبہ الفاظ کی تعداد $4^4 = 256$ ہوگی۔

تین حروف والے الفاظ کی تعداد جو کہ لفظ Number کے حروف سے بنا ہے $= {}^{6}p_3 = \frac{6!}{3!} = 6\times5\times4 = 120$

یہاں اس کیس میں بھی دہرانے کی اجازت نہیں ہے۔ اگر دہرانے کی اجازت دے دی جائے تو مطلوبہ الفاظ کی تعداد $= 6^3 = 216$ ہوگی۔

12 لوگوں کے جب ایک گروپ سے ایک چیرمین یا وائس چیرمین چنا جائے اور یہ مان لیا جائے کہ ایک آدمی ایک پوزیشن سے زیادہ پر قابض نہیں ہوسکتا تو ان طریقوں کی تعداد صاف طور پر $^{12}P_2 = \frac{12!}{10!} = 11\times12 = 132$

## 7.3.4 مبادلے جب تمام اشیاء الگ نہیں ہیں (Permutations when all the objects are not distincts objects)

مان لیجئے ہمیں لفظ Root کے حروف کو از سر نو ترتیب دیکر ہمیں ان طریقوں کی تعداد معلوم کرنی ہے۔ اس کیس میں لفظ کے حروف سارے مختلف نہیں ہیں، 'Os' دو ہیں جو ایک ہی طرح کے ہیں۔ عارضی طور پر ہم 2 Os کو مختلف مان لیں، مان لیا $O_1$ اور $O_2$ اس کیس میں 4 مختلف حروف کی مبادلوں کی تعداد جبکہ سب ایک ساتھ لئے گئے ہوں $=4!$ ان میں سے ایک مبادلہ $RO_1O_2T$ پر غور کیجئے۔ اس مبادلہ کے مطابق ہمارے پاس 2! مبادلہ $RO_1O_2T$ اور $RO_2O_1T$ ہیں جو حقیقت میں وہ مبادلہ ہوں گے اگر $O_1$ اور $O_2$ کو ایک نہ سمجھا جائے اس کا مطلب اگر $O_1$ اور $O_2$ ایک ہی O ہیں۔

اس لئے، مبادلوں کی مطلوبہ تعداد $= \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$

| مبادلے جب $O_1$ اور $O_2$ ایک ہی O ہیں | مبادلے جب $O_1$ ، $O_2$ الگ ہیں |
|---|---|
| ROOT | $RO_1O_2T$, $RO_2O_1T$ |
| TOOR | $TO_1O_2R$, $RO_2O_1R$ |
| ROTO | $RO_1TO_2$, $RO_2TO_1$ |
| TORO | $TO_1RO_2$, $TO_2RO_1$ |
| RTOO | $RTO_1O_2$, $RTO_2O_1$ |
| TROO | $TRO_1O_2$, $TRO_2O_1$ |
| OORT | $O_1O_2RT$, $O_2O_1TR$ |
| OROT | $O_1RO_2T$, $O_2RO_1T$ |
| OTOR | $O_1TO_2R$, $O_2TO_1R$ |
| ORTO | $O_1RTO_2$, $O_2RTO_1$ |
| OTRO | $O_1TRO_2$, $O_2TRO_1$ |
| OOTR | $O_1O_2TR$, $O_2O_1TR$ |

اب ہمیں لفظ INSTITUTE کے حروف کو ازسرنو ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد معلوم کرنی چاہئے۔ اس صورت میں 9 الفاظ ہیں جن میں I دوبار آیا ہے اور T تین بار ہے۔

عارضی طور پر ہم ان حروف کو الگ سمجھتے ہیں اور انہیں $I_1$ ، $I_2$ ، $T_1$ ، $T_2$ ، $T_3$ کا نام دیتے ہیں۔

اس کیس میں 9 مختلف حروف کے مبادلوں کی تعداد جب سب ایک ساتھ لئے جائیں تو !9 ہے

اسی طرح کے ایک مبادلہ پر غور کیجئے مان لیا $I_1NT_1SI_1T_2UET_3$ یہاں اگر $I_1$ اور $I_2$ ایک ہیں اور $T_1$ ، $T_2$ ، $T_3$ ایک ہیں اسلئے $I_1$ اور $I_2$ کو !2 طریقہ سے ترتیب دی جاسکتی ہے اور $T_1$ ، $T_2$ ، $T_3$ کو !3 طریقے سے اسلئے مبادلہ $3! \times 2!$ بالکل ایسا ہی مبادلہ ہوگا جو $I_1NT_1ST_2UET_3$ مبادلہ کے مطابق چنا گیا ہے۔ اس لیے مختلف مبادلوں کی تعداد $\frac{9!}{2!3!}$ ہوگی۔

ہم مندرجہ ذیل مسئلوں کو (بغیر ثبوت کے) بیان کر سکتے ہیں۔

**مسئلہ 3** $n$ اشیاء کے مبادلوں کی تعداد، جہاں $p$ اشیاء بالکل ایک طرح کی ہیں اور باقی سب الگ ہیں $\frac{n!}{p!}$

حقیقت میں، ہمارے پاس زیادہ عام مسئلہ ہیں۔

**مسئلہ 4** n اشیاء کے مبادلوں کی تعداد، جہاں $p_1$ اشیاء ایک طرح کی ہیں $p_2$ دوسری طرح کی ہیں ۔۔۔ $p_k$ اشیاء $k^{th}$ طرح کی اور باقی الگ۔ اگر ان میں سے ایک بھی مختلف قسم کی ہے $\frac{n!}{p_1!p_2!p_3!\dots P_K!}$

**مثال 9** لفظ ALLAHABAD میں حروف کے مبادلوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

**حل** یہاں 9 اشیاء (حروف) ہیں جن میں سے $4A's$ ، $2L's$ اور باقی سب الگ ہیں۔

$$\text{اسلئے مبادلوں کی مطلوبہ تعداد} = \frac{9!}{4!2!} = \frac{5\times6\times7\times8\times9}{2} = 7560$$

**مثال 10** 1 سے 9 تک کے ہندسہ استعمال کر کے چار ہندسوں والے کتنے اعداد بنائے جاسکتے ہیں اگر ہندسوں کو دہرانے کی اجازت نہ ہو؟

**حل** یہاں ترتیب اہم رول ادا کرتی ہے مثال کے طور پر 1234 اور 1324 دو مختلف نمبر ہیں۔ اسلئے یہاں اتنے ہی 4 ہندسوں والے نمبر ہوں گے جتنے کہ 9 مختلف ہندسوں سے بننے والا مبادلہ جبکہ 4 الگ الگ ہندسوں کو ایک ساتھ لیا جائے

$$\text{اسلئے مطلوبہ 4 ہندسوں والے اعداد } {}^9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9\times8\times7\times6 = 3024$$

**مثال 11** 100 اور 1000 کے بیچ کتنے اعداد موجود ہیں جو 5,4,3,2,1,0 ہندسوں سے بنتے ہیں اگر ہندسوں کے دہرانے کی اجازت نہ ہو؟

**حل** 100 اور 1000 کے بیچ (درمیان) میں ہر نمبر تین ہندسوں کا ہے ہمیں پہلے 6 ہندسوں والے مبادلوں کو گنتا ہے جب 3 ہندسوں کو ایک ساتھ لیا جائے یہ تعداد $^6p_3$ ہوگی لیکن ان مبادلوں میں وہ اعداد بھی شامل ہوں گے جہاں '0' 100' جگہ ہے۔ مثال کے طور پر 092، 042، ۔۔۔ وغیرہ اس طرح کے اعداد ہیں جو حقیقت میں 2 ہندسوں والے اعداد ہیں اور اس طرح کے نمبروں کی تعداد $^6p_3$ سے نفی کرنی (گھٹانی) ہوگی مطلوبہ نمبر حاصل کرنے کیلئے۔ اس طرح کے نمبروں کی تعداد معلوم کرنے کیلئے ہم 0 کو سیکڑے (سوویں) 's 100' ۔۔۔ جگہ رکھتے ہیں اور بچے ہوئے 5 ہندسوں کو از سرنو ترتیب دیکر 2 کو ایک ساتھ لیتے ہیں۔ یہ $^5p_2$ ہے اسلئے،

مطلوبہ عدد $^6p_3 - {}^5p_2 = \frac{6!}{3!} - \frac{5!}{3!}$

$$= 6\times5\times4 = 120 - 20 = 100$$

**مثال 12** n کی قیمت معلوم کیجئے تاکہ

(i) $np_5 = 42^n p_3, n > 4(i)$ (ii) $\frac{np_4}{n-{}^1P_4} = \frac{5}{3,}n > 4(ii)$

**حل** (i) دیا ہوا ہے $^nP_5 = 42^n p_3$

یا n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=42n(n-1)(n-2)

کیونکہ n>4 so n (n-1) (n-2)>0 اسلئے دونوں طرف n(n-1)(n-2) سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے:

(n-3) (n-4)=42

یا $n^2 - 7n - 30 = 0$

یا (n-10)(n+3)

یا n-10=0 یا n+3=0

یا n=10 یا n=-3

کیونکہ n منفی نہیں ہوسکتا۔ اسلئے n=10

(ii) دیا ہوا ہے $\frac{5}{3} = \frac{np_4}{n-1p_4}$

اس لئے $3n(n-1)(n-2)(n-3) = 5(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

یا $3n = 5(n-4)$ [as (n-1) (n-2) (n-3) (n-4 ]

یا $n=10$

**مثال 13** $r$ معلوم کیجئے اگر $5\,{}^4P_r = 65\ P_{(R-1)}$

**حل** ہمارے پاس ہے $5\,{}_4P_r = 6\,{}^5P_{R-1}$

یا $$5 \times \frac{4!}{(4-r)!} = 6 \times \frac{5!}{(5-r+1)!}$$

یا $$\frac{5!}{(4-r)!} = \frac{65!}{(5-r+1)(5-r)(5-r-1)!}$$

یا $(6-r)(5-r) = 6$

یا $r^2 - 11r + 24 = 0$

یا $(r-8)(r-3) = 0$

یا $r = 8$ یا $r = 3$

اس لئے $r = 8,3$

**مثال 14** لفظ DAUGHTER سے بننے والے 8 حروف والے تمام مختلف مبادلوں کی تعداد معلوم کیجئے تاکہ

(i) تمام Vowels حروف ایک ساتھ ہوں (ii) تمام Vowels ایک ساتھ نہ ہوں

**حل** (i) لفظ DAUGHTER میں 8 مختلف حروف ہیں جن میں 3 Vowels ہیں جن کے نام ہیں U,A اور E کیونکہ Vowels ایک ساتھ آتے ہیں، ہم فی الحال اس صورت حال میں ہم ان اشیاء (AUE) کو ایک ساتھ سمجھتے ہیں۔ یہ اکیلی اشیاء (حرف) 5 باقی حروف (اشیاء) کے ساتھ 6 اشیاء گنا جائے گا پھر ہم ان سب اشیاء کو ایک ساتھ لیکر مبادلوں کی گنتی کریں گے۔

یہ تعداد $6! = {}^6P_6$ ہوگئی۔اس میں سے ہر ایک مبادلہ کے مطابق ہمارے پاس !3 مبادلہ ہوں گے جو تین Vowels A,U,E کو ایک ساتھ لیکر بنتے ہیں

(ii) اگر ہمیں وہ مبادلے گننے ہوں جس میں تمام Vowels کبھی بھی ایک ساتھ نہ ہوں تو ہمیں سب سے پہلے وہ تمام ممکن انتظامات معلوم کرنے ہوں گے جن میں 8 حروف کو ایک ساتھ لیا گیا ہے جو !8 طریقوں سے کیا جا سکتا ہے۔ پھر ہمیں اس نمبر سے اس مبادلہ کی تعداد کو گھٹانا ہوگا جن میں Vowels ایک ساتھ ہیں۔

اسلئے مطلوبہ تعداد (نمبر) $= 8! - 6! x 3! = 6!(7 \times 8 - 6)$

$= 2 \times 6!(28 - 3)$

$= 6! \times 50 = 720 \times 50 = 3600$

**مثال 15** کتنے طریقے سے 4 لال 3 پیلی اور 2 ہری ٹکیوں (قرص discs) کو ایک قطار میں ترتیب دی جا سکتی ہے تاکہ ایک رنگ کی ٹکیوں کی پہچان نہ ہو سکے؟

**حل** ٹکیوں کی کل تعداد 9=2+3+4-9 ٹکیوں میں سے پہلی طرح کی ہیں (لال) 3 دوسری طرح کی ہیں (پیلی) اور 2 تیسری طرح کی ہیں (ہری) اسلئے

ترتیب (انتظامات) کی تعداد $= \dfrac{9!}{4!3!2!} = 1260$

**مثال 16** لفظ INDEPENDENCE کے حروف کی ترتیب کی تعداد معلوم کیجئے اس ترتیب میں کتنے:

(i) لفظ P سے شروع ہوتے ہیں؟

(ii) کیا تمام Vowels ایک ساتھ نمایاں ہوتے ہیں؟

(iii) کیا Vowels کبھی بھی ایک ساتھ نمایاں نہیں ہوتے؟

(iv) کیا لفظ I سے شروع ہوتے ہیں اور P پر ختم ہوتے ہیں

**حل** یہاں 12 حروف ہیں جن میں N 3 بار آیا ہے E چار بار آیا ہے' D دو بار آیا ہے اور باقی سبھی مختلف ہیں اسلئے مطلوبہ

ترتیب (انتظامات) کی تعداد $= \dfrac{12!}{3!4!2!} = 1663200$

(i) مان لیجئے ہم P کو انتہائی بائیں طرف مقرر کرتے ہیں، ہم تب باقی 11 حروف کی ترتیب کو گنتے ہیں اسلئے لفظوں کی

مطلوبہ تعداد جو p سے شروع ہوتی ہے $= \dfrac{11!}{3!2!4!} = 138600$

(ii) دیئے ہوئے لفظ میں 5 Vowels ہیں جن میں 4 E's میں اور I کیونکہ انہیں ہمیشہ ایک ساتھ واقع ہونا ہے، اسلئے ہم انہیں وقتی طور پر ایک شے EEEEI مانتے ہیں۔۔۔یہ اکیلی اشیاء دوسری باقی 7 اشیاء کے ساتھ ملکر 8 اشیاء بناتی ہے یہ 8 اشیاء (حروف) جن میں 3Ns ہیں اور 2 DS ہیں از سر نو ترتیب سے $\dfrac{8!}{3!2!}$ طریقہ میں رکھی جاسکتی ہے۔ان میں سے ہر ایک ترتیب کے مطابق' 5 Vowels E,E,E,E, اور I کو از سر نو ترتیب سے $\dfrac{5!}{4!}$ طریقہ میں لکھا جاسکتا ہے۔اس لئے ضرب کے اصول سے مطلوبہ ترتیبوں کی تعداد $= \dfrac{8!}{3!2!} \times \dfrac{5!}{4!} = 16800$

(iii) مطلوبہ انتظاموں (ترتیبوں) کی تعداد

= انتظاموں کی کل تعداد (بغیر کسی روک ٹوک کے) انتظاموں کی وہ تعداد جہاں تمام Vowels ایک ساتھ واقع ہوتے ہیں۔

$= 1663200 - 16800 = 146400$

(iv) مان لیجئے ہم I اور P انتہائی آخری سروں پر مقرر کرتے ہیں (I بائیں طرف والے سرے پر اور P دائیں طرف والے سرے پر) ہمارے پاس 10 حروف بچے ہیں۔

اس لئے مطلوبہ انتظاموں کی تعداد $= \dfrac{10!}{3!2!4!} = 12600$

## مشق 7.3

1. 1 تا 9 ہندسہ استعمال کرکے 3 ہندسوں والے کتنے اعداد بن سکتے ہیں اگر کوئی بھی ہندسہ دہرایا نہ جائے؟
2. چار ہندسوں والے کتنے اعداد ہیں جبکہ کوئی ہندسہ دہرایا نہ جائے؟
3. 1، 2، 3، 4، 6، 7، ہندسوں کو استعمال کرکے 3 ہندسوں والے کتنے جفت اعداد بنائے جاسکتے ہیں؟
4. چار ہندسوں والے اعداد کی تعداد معلوم کیجئے جو ہندسوں 1، 2، 3، 4، 5، سے بنتے ہیں اگر کوئی ہندسہ دہرایا نہ جائے ان

میں سے کتنے جفت ہوں گے؟

5. 8لوگوں کی کمیٹی سے ہم کتنے طریقے سے ایک چیرمین اور ایک وائس چیرمین چن سکتے ہیں یہ مانتے ہوئے کہ ایک آدمی ایک سے زیادہ مقام حاصل نہیں کرسکتا؟

6. n معلوم کیجئے اگر $^{n-1}p_3 : {}^{n}p_4 = 1 : 9$

7. r معلوم کیجئے اگر (i) $^{5}p_r = 2\ {}^{6}p_{r-1}$ (ii) $^{5}p_r = {}^{6}p_r$

8. کتنے الفاظ معنی یا بغیر معنی کے لفظ EQUATION کے حروف کو استعمال کر کے بنائے جا سکتے ہیں ہر حرف کا صرف ایک بار استعمال کیا جائے؟

9. کتنے الفاظ، معنی یا بغیر معنی کے لفظ MONDAY کے حروف کو استعمال کر کے بنائے جا سکتے ہیں یہ مانتے ہوئے کہ کوئی حرف دہرایا نہ جائے اگر

(i) 4 حروف کا ایک ساتھ استعمال کیا جائے؟ (ii) تمام حروف کا ایک ساتھ (بیک وقت) استعمال کیا جائے؟

(iii) تمام حروف استعمال کیے جائیں لیکن پہلا حرف ایک Vowel ہے

10. لفظ MISSISSIPPI کے حروف میں کتنے مختلف مبادے ہوں گے جہاں چار I's ایک ساتھ نہیں آئیں گے؟

11. لفظ PERMUTATIONS کے حروف کتنے طریقوں سے ترتیب دیئے جا سکتے ہیں اگر (i) لفظ P سے شروع ہو اور S پر ختم ہو (ii) تمام Vowels ایک ساتھ

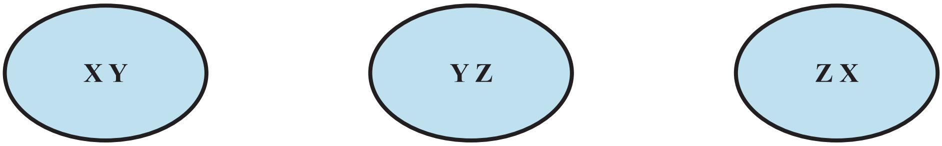
(iii) P اور S کے درمیان ہمیشہ 4 حروف ہوں

## 7.4 اجتماع (Combinations)

اب ہم یہ مانتے ہیں کہ 3 لان ٹینس (Lawn tennis) کھلاڑیوں X، Y، Z، کا ایک گروپ ہے دو کھلاڑیوں پر مشتمل ایک ٹیم بنانی ہے یہ ہم کتنے طریقوں سے کر سکتے ہیں کیا X اور Y کھلاڑیوں کی ٹیم Y اور X کھلاڑیوں سے الگ ہے یہاں ترتیب کی اہمیت نہیں ہے حقیقت میں صرف تین ممکن طریقے ہیں جن سے ٹیم بنائی جا سکتی ہے یہ xy، yz اور zx ہیں۔

یہاں ہر انتخاب 3 مختلف اشیاء جن میں 2 بیک وقت لی گئی ہوں اجتماع کہلاتا ہے اجتماع میں ترتیب کی اہمیت نہیں ہے

اب کچھ اور مثالوں پر غور کرتے ہیں۔




شکل 7.3

12 آدمی (لوگ) ایک کمرہ میں ملتے ہیں اور ایک۔ایک دوسرے سے ہاتھ ملاتا ہے ہم کس طرح ہاتھ ملانے کی تعداد معلوم کرسکتے ہیں۔ x،y سے ہاتھ ملا رہا ہے اور y،x سے دو الگ ہاتھ ملاتا نہیں ہے یہاں ترتیب کی اہمیت نہیں ہے یہاں اتنے ہی ہاتھ ملیں گے جتنے کہ 12 مختلف اشیاء کے اجتماع جب کہ 2 کو بیک وقت لیا جائے۔

7 نقاط ایک دائرہ پر واقع ہیں۔ان نقاط کو جوڑوں میں ملا کر کتنے قوسی وتر کھینچے جائیں گے؟ اتنے ہی قوسی وتر ہوں جتنے کہ 7 مختلف اشیاء کے اجتماع 2 کو بیک وقت لیا جائے۔

اب ہم n مختلف اشیاء کے لیے جبکہ r کو بیک وقت لیا جائے ایک فارمولہ حاصل کرتے ہیں جسکے ذریعہ اجتماع کی تعداد معلوم کی جائے گی، جسے $^nc_r$ سے ظاہر کیا جائے گا۔

مان لیجئے ہمارے پاس 4 مختلف اشیاء A، B اور C اور D ہیں۔ 2 کو بیک وقت لیکر اگر ہمیں اجتماع بنانا ہے تو یہ AB، AC، AD، BC، BD، CD ہوں گے یہاں AB اور BA ایک ہی طرح کے اجتماع ہیں کیونکہ ترتیب اجتماع کو نہیں بدلتی اس وجہ سے ہم نے BA، AC، DA، CB، BD' اور DC کو اس فہرست میں شامل نہیں کیا ہے۔ یہاں 6 اجتماع ہونگے جو 4 مختلف اشیاء میں سے 2 کو بیک وقت لیتے ہیں یعنی $= {}^4c_2 = 6.$ ۔

فہرست میں ہر ایک اجتماع کے مطابق ہم !2 مبادلوں پر آسکتے ہیں کیونکہ ہر اجتماع میں 2 اشیاء کو !2 طریقوں سے از سر نو ترتیب دی جاسکتی ہے اسلیئے مبادلوں کی تعداد = $2!\times {}^4c_2$

دوسری طرف 4 مختلف اشیاء کے اجتماع کی تعداد جبکہ 2 کو ایک ساتھ لیا جائے = $^4P_2$

اسلئے $^4P_2 = {}^4C_2 \times 2!$ یا $^4C_2 = \dfrac{4!}{(4-2)!2!}$

اب ہم یہ مانتے ہیں کہ ہمارے پاس 5 مختلف اشیاء A، B، C، D، E موجود ہیں۔اگر تین کو ایک ساتھ لیکر ہمیں ایک اجتماع بنانا ہے تو وہ یہ ہونگے ABC، ABD، ABE، ACD، BCE، CDE، ACE، ACD، ADE، BDE ان میں سے ہر

ایک اجتماع کے مطابق !3 اجتماع ہیں، کیونکہ ہر ایک اجتماع میں اشیاء کو !3 طریقہ سے ازسرنو ترتیب دیا جاسکتا ہے اسلئے اجتماعوں کی کل تعداد ث $3! \times 5c_3$ ص

اسلئے $3! \times 5c_3 = {}^5P_3$

یا $${}^5C_3 = \frac{5!}{(5-3)3!}$$

یہ مثالیں یہ بتاتی ہیں کہ مندرجہ ذیل مبادلہ اور اجتماع کے درمیان رشتہ بتاتا ہے مسئلہ 5

**مسئلہ 5** ${}^np_r = {}^nC_r, r!, 0 \text{ p } r \le n$

**ثبوت** ${}^nc_r$ کے ہر اجتماع کے مطابق ہمارے پاس !r اجتماع ہیں، کیونکہ r اشیاء ہر ایک اجتماع میں !r طریقوں سے رکھی جاسکتی ہیں۔

اس لئے n مختلف اشیاء کے جبکہ r یک وقت لی جاسکیں اجتماع کی کل تعداد ${}^nc_r \times r!$ ہے دوسری یہ ${}^nP_r$ ہے

اسلئے ${}^nPr = {}^nC_r \times r! \; o < r \le n$

**ریمارک 1.** اوپر سے $\frac{n!}{(n\text{-}r)!} = {}^nC_r \times r!$ یعنی ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r!)!}$

خاص طور پر اگر $r = n$ $${}^nc_n = \frac{n!}{n!o!} = 1$$

2. ہم ${}^nc_o = 1$ کی تعریف بیان کرتے ہیں اسکا مطلب ہے n مختلف اشیاء جن میں سے کچھ لیا جائے اجتماع کی تعداد ہے اجتماعوں کو گننا ایسا ہی ہے جیسا کہ ان طریقوں کی تعداد کا گننا جن میں کچھ یا ساری اشیاء کو ایک ساتھ منتخب کرلیا جائے، کسی کو نہ چننے کا مطلب ہے سب اشیاء کو چھوڑ دیا جائے اور ہم جانتے ہیں کہ ایسا کرنے کا صرف ایک ہی طریقہ ہے اس طریقہ کہ ہم کہتے ہیں ${}^nc_o = 1$

3. جیسا کہ $\frac{n!}{o!(n\text{-}o)!} = 1 = 1 = {}^nc_o$ فارمولہ $\frac{n!}{r1(n-r)!} = r = o^nc_r$ کیلئے بھی صحیح ہے

اس لئے $${}^nc_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, o \le r \le n$$

4. $${}^{n}C_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r!)r!}$$

یعنی n اشیاء میں سے r اشیاء کو چننا ایسا ہی ہے جیسا کہ (n-r) اشیاء کو چھوڑ دینا

5. ${}^{n}c_{a} = {}^{n}c_{b} \Rightarrow a =$ یا $n = a \times b$ یعنی $a = n - b$

مسئلہ 6. ${}^{n}c_{r} \times {}^{n}c_{r-1} = {}^{n+1}c_{r}$ کو ثابت کیجیے

حل ہمارے پاس ہے

$${}^{n}c_{r} \times {}^{n}c_{r-1} = \frac{n1}{r!(n-r)!} \times \frac{n!}{(r-1)!(n-r\times 1)!}$$

$$= \frac{n!}{r\times(r-1)!(n-r)!} \times \frac{n!}{(r-1)!(n-r\times 1)(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-s)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-e+1)}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} = {}^{n+1}C_{r}$$

مثال 17 اگر ${}^{n}c_{9} = {}^{n}c_{8}$ ہوتو ${}^{n}c_{17}$ معلوم کیجیے

حل ہمارے پاس ہے ${}^{n}c_{9} = {}^{n}c_{8}$

ie $$\frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{8!(n-8)!}$$

یا $$\frac{1}{9} \quad \frac{1}{9} = \frac{1}{n-8}$$

$n-8=9.$ یا $n=17$ یا

اس لئے ${}^{n}c_{17} = {}^{17}C_{17} = 1$

**مثال 18** 2 مرد اور 3 عورتوں سے 3 لوگوں کی ایک کمیٹی بنی ہے۔ یہ کتنے طریقہ سے بن سکتی ہے؟ ان میں سے کتنی کمیٹیوں میں ایک آدمی اور 2 عورتیں ہوں گی؟

**حل** یہاں ترتیب معنی نہیں رکھتی۔ اسلئے، ہمیں اجتماعوں کی تعداد معلوم کرنیکی ضرورت ہے۔ کمیٹیوں کی اتنی ہی تعداد ہوگی جتنا کہ 5 مختلف کو لوگوں کے جن میں 3 کو ایک بار چنا جائے اجتماعوں کی تعداد اسلیے مطلوبہ طریقوں کی تعداد۔

$$10 = \frac{4\times5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = {}^5c_3 =$$

اب 1 آدمی 2 آدمیوں میں سے، $^2c_1$ طریقہ سے چنا جاسکتا ہے دو عورتیں تین عورتوں میں سے $^3C_2$ طریقہ سے چنی جاسکتی ہیں اسلیے کمیٹیوں کی مطلوبہ تعداد $= {}^3c_2\times{}^2c_1 = \frac{3!}{2!1!}\times\frac{2!}{1!1!} = 6$

**مثال 19** کھلنے والی ایک گڈی کے 52 پتوں میں سے 4 پتّوں کو چننے کے کتنے طریقہ ہیں ان میں سے کیسے

(i) 4 پتے ایک ہی طرح کے ہوں گے؟

(ii) 4 پتّے 4 الگ الگ طرح کے ہوں؟

(iii) تصویر والے پتے

(iv) دو کالے پتے (کارڈس) ہوں اور 2 لال پتے (کارڈس) ہوں۔

(v) تمام پتے ایک رنگ کے ہوں

**حل** 52 پتوں میں سے 4 پتوں کو چننے کے اتنے ہی طریقے ہونگے جتنے کہ $5_2$ مختلف اشیاء کے اجتماع سے جبکہ 4، کو ایک ساتھ لیا جائے اسلئے مطلوبہ طریقوں کی تعداد $^{52}C_4 = \frac{521}{4!48!} = \frac{49\times5o\times51\times5o}{2\times3\times4}$

$=270725$

(i) تاش (پتے) کی چار قسمیں ہیں۔ اینٹ، حکم، چڑیا، پان اور ہر طرح کے 13 پتے ہیں۔ اسلئے 4 اینٹ چننے کے $^{13}C_4$ طریقے ہیں۔ اسی طرح 4 حکم کے پتے چننے $^{13}C_4$ طریقے ہیں۔ 4 چڑیا چننے کے $^{13}C_4$ طریقے ہیں اور چار پان چننے کے $^{13}C_4$ طریقے ہیں $=13c_4+13c_4+13C_4+13c_4$

$$=4\times\frac{13!}{4!9!} = 286o$$

(ii) ہر جوڑے میں 13 پتے ہیں یا ہر طریقے کے 13 پتے ہیں۔

اسلئے اینٹ کے 13 پتوں میں سے ایک پتا چننے کے $13c_1$ طریقے ہیں، پان کے 13 پتوں میں سے ایک کارڈ چننے کے $13c_1$ طریقے ہیں حکم کے 13 پتوں میں سے ایک کارڈ چننے کے $13c_1$ طریقے ہیں چڑیا کے 13 پتوں میں سے ایک پتا چننے کے $13c_1$ طریقے ہیں۔ اسلئے ضرب کے اصول سے مطلوبہ طریقوں کی تعداد

$$=13c_1\times 13c_1\times 13c_1\times 13c_1=13^{4.}$$

(iii) تصویر والے (چہرے والے) 12 پتے ہیں اور 12 پتوں میں سے 4 پتے چننے ہیں یہ $12c_4$ طریقوں سے ہوسکتا ہے اسلیے

مطلوبہ طریقوں کی تعداد $\dfrac{12!}{4!8!}=494$

(iv) 26 پتے (کارڈ) لال ہیں اور 26 پتے کالے ہیں۔ اسلئے مطلوبہ طریقوں کی تعداد $=\times 26c_2\times 26c_2$

$$=\left\{\frac{261}{2!24!}\right\}^2=(325)^2=105625$$

(v) 26 لال پتوں میں سے 4 لال پتے $^{26}c_4$ طریقوں سے چنے جاسکتے ہیں۔ 26 کالے پتوں میں سے 4 کالے پتے $^{26}c_4$ طریقوں سے چنے جاسکتے ہیں۔

اسلیے مطلوبہ طریقوں کی تعداد $=26c_4+26C_4$

$$=\frac{26}{4!22!}\times 2=299$$

## مشق 7.4

1. اگر $nc_8=nc_2$ تو $nc_2$ معلوم کیجیے
2. n معلوم کیجیے اگر

$2nc_3 : nc_2;=12:1$ (i) $\qquad$ (ii) $2nc_3:nc_2;=11:1$ (ii,

3. ایک دائرہ پر موجود 21 نقاط سے کتنے قوسی وتر کھینچے جاسکتے ہیں۔
4. 5 لڑکے اور 4 لڑکیوں میں سے 3 لڑکے اور 3 لڑکیوں کی ٹیم کتنے طریقے سے چنی جاسکتی ہے؟

.5 6 سرخ گیندوں، 5 سفید گیندوں اور 5 نیلی گیندوں میں سے 9 گیندیں چننے کے کتنے طریقے ہیں اگر ہر چناؤ میں 3 گیندیں ہر رنگ کی ہیں

.6 52 پتّوں کی ایک گڈی سے 5 پتّوں کے اجتماع کے کتنے طریقے ہیں اگر ہر ایک اجتماع میں بالکل '1' اِیکہ ہو؟

.7 17 کھلاڑیوں میں سے 11 کھلاڑیوں پر مشتمل کرکٹ کتنے طریقے سے چنی جاسکتی ہے جس میں صرف 5 کھلاڑی بال کر سکتے ہیں اگر کرکٹ کی 11 کھلاڑیوں کی ٹیم میں بالکل 4 بالرس ہوں؟

.8 ایک تھیلے میں 5 کالی اور 6 سرخ گیندیں ہیں۔ ان طریقوں کی تعداد معلوم کریں جن میں 2 کالی اور تین سرخ گیندیں چنی جاسکیں

.9 ایک طالب علم کتنے طریقوں سے 5 کورسوں والا پروگرام چن سکتا ہے اگر 9 کورس موجود ہوں اور دو خاص کورس ہر طالب علم کے لیے ضروری ہیں۔

## متفرق مثالیں

**مثال 20** لفظ INVOLUTE کے حروف سے 3 Vowels اور 2 بغیر Vowels والے، جن کا مطلب نکل سکے یا نہ نکل سکے کتنے الفاظ بن سکتے ہیں؟

**حل** لفظ INVOLUTE میں 4 Vowels ہیں I، O، E، U، اور 4 غیر Vowels ہے N، V، L، اور T۔

4 میں سے 3 Vowels چننے کے طریقے = $^4C_3=4$

4 میں سے 2 non vowels چننے کے طریقے = $^4C_2=6$

اسلیے 3 Vowels غیر Vowels چننے کے اجتماع کی تعداد $4 \times 6=25$

اب 24 اجتماع میں سے ہر ایک میں 5 حروف ہیں جو آپس میں !5 طریقوں سے ترتیب دئے جاسکتے ہیں۔ اس لیے مختلف مطلوبہ الفاظ کی تعداد = $24 \times 5! = 2880$

**مثال 21** ایک گروپ 4 لڑکیوں اور 7 لڑکوں پر مشتمل ہے۔ کتنے طریقوں سے ایک 5 ممبروں کی ٹیم چنی جاسکتی ہے اگر ٹیم میں (i) کوئی لڑکی نہ ہو؟ (ii) کم سے کم ایک لڑکا اور ایک لڑکی ہو؟ (iii) کم سے کم تین لڑکیاں ہوں۔

**حل** (i) کیونکہ ٹیم میں کوئی لڑکی نہیں ہوگی، اسلئے صرف لڑکے چننے ہیں۔ 5 لڑکے 7 لڑکوں میں سے $7c_5$ طریقے سے چنے جا سکتے ہیں۔ اسلئے مطلوبہ طریقوں کی تعداد $= 7c_5 = \frac{71}{512!} = \frac{6\times 7}{2} = 21$

(ii) کیونکہ ہر ٹیم میں کم سے کم 1 لڑکا اور 1 لڑکی ہو۔ اسلئے ٹیم میں یہ موجود ہو سکتے ہیں۔

(a) 1 لڑکا اور 4 لڑکیاں (b) 2 لڑکے اور تین لڑکیاں۔

(c) 3 لڑکے اور 2 لڑکیاں (d) 4 لڑکے اور ایک لڑکی۔

1 لڑکا اور 4 لڑکیاں $4c_4 \times 7c_1$ طریقے سے چنے جا سکتے ہیں۔

2 لڑکے اور 3 لڑکیاں $4c_3 \times 7c_2$ طریقے سے چنے جا سکتے ہیں۔

3 لڑکے اور 2 لڑکیاں $4c_2 \times 7c_3$ طریقے سے چنے جا سکتے ہیں۔

4 لڑکے اور ایک لڑکی $4c_1 \times 7c_4$ طریقے سے چنے جا سکتے ہیں۔

اسلئے مطلوبہ طریقوں کی تعداد

$$^7C_1 \times {}^4C_4 + {}^7C_2 \times {}^4C_3 + {}^7C_3 \times {}^7C_2 + {}^7C_4 \times {}^4C_1 =$$

$$441=7+84+210+140$$

(iii) کیونکہ ٹیم میں کم سے کم 3 لڑکیاں ہونی چاہئیں، اسلیے ٹیم میں یہ ہونا چاہیے۔

(a) 3 لڑکیاں اور 2 لڑکے یا (b) 4 لڑکیاں اور 1 لڑکا

یہ بات نوٹ کر لیجئے کہ ٹیم میں 5 لڑکیاں نہیں ہو سکتی ہیں۔ کیونکہ گروپ میں صرف چار لڑکیاں ہیں۔

3 لڑکیاں اور 2 لڑکے $7c_2 \times 4c_3$ طریقوں سے چنے جا سکتے ہیں۔

4 لڑکیاں اور 1 لڑکا $7c_1 \times 4c_4$ طریقے سے چنے جا سکتے ہیں۔

اسلئے طریقوں کی مطلوبہ تعداد $^7C_1 \times {}^4C_4 + 4C_3 \times 7C_2 = 84+7=91$

**مثال 22** لفظ AGAIN کے حروف کا استعمال کر کے کتنے الفاظ بنائے جا سکتے ہیں جن کا مطلب نکلے یا نہ نکلے۔ اگر ان الفاظ کو لغت میں لکھا جائے۔ تو 50 واں لفظ کیا ہوگا؟

**حل** لفظ AGAIN میں 5 حروف میں جن میں A دو بار آتا ہے۔ اسلئے مطلوبہ الفاظ کی تعداد = $\frac{5!}{2!}=60$ وہ الفاظ حاصل کرنے کیلئے جو A سے شروع ہوتے ہیں۔ ہم حروف A کو انتہائی بائیں طرف لکھتے ہیں۔ پھر ہم بچے ہوئے 4 حروف کو از سر نو ترتیب دیتے ہیں۔ ان 4 حروف کو بیک وقت 4 بار لیکر اتنے ہی انتظامات ہوں گے جتنے کہ 4 مختلف اشیاء 4 بار بیک وقت لیکر اجتماع کی تعداد۔ اسلئے ان لفظوں کی تعداد جو A سے شروع ہوتے ہیں $=4!=24$- پھر G سے شروع ہونے والے الفاظ $=\frac{4!}{2!}=12$ جیسا کہ G کو انتہائی بائیں طرف رکھنے پر۔ اب ہمارے پاس حروف A، A، I، اور N بچے ہیں۔ اسطرح اگلے حرف I سے شروع کر کے 12 الفاظ بنیں گے۔ ابھی تک حاصل کیے گئے الفاظ کی کل تعداد $= 24 \times 12 \times 12 = 18$

49 واں لفظ NAAGI ہے۔ 50 واں لفظ NAAIG ہے۔

**مثال 23** 1,2,0,2,4,2,2 ہندسوں کو استعمال کر کے 1000000 سے زیادہ کتنے اعداد بنائے جا سکتے ہیں؟

**حل** کیونکہ 1000000، 7 ہندسوں والا عدد ہے اور جو ہندسے استعمال کرنے میں ان کی تعداد بھی 7 ہے اسلئے جو نمبر بنے گا وہ بھی صرف 7 ہندسوں کا ہوگا۔ ساتھ ہی اعداد 1000000 سے بڑے ہونے چاہئیں۔ اسلئے وہ کسی ایک 1، 2 یا 4 سے شروع ہونے چاہیے۔

ان اعداد کی تعداد جو '1' شروع ہوتے ہیں $\frac{6!}{2!\ \ 3!}=\frac{6\times5\times4}{2}=60$ جبکہ '1' انتہائی بائیں طرف رکھا ہوا ہے باقی ہندسے جو از سر نو ترتیب دینے ہیں 0، 2، 2، 2، 4، 4 جن میں 3 بار 2 ہے اور 2 بار 4 ہے۔

کل تعداد جو 2 سے شروع ہو رہے ہیں $=\frac{6!}{2!\ \ 2!}=\frac{6\times5\times4\times3}{2}=180$

اور 4 سے شروع ہونے والے اعداد کی کل تعداد $=\frac{6!}{3!}=6\times5\times4\times3=120$

اسلئے مطلوبہ اعداد کی تعداد $=60+180+120=360$

## متبادل طریقہ (Alternative Method)

صاف طور پر 7 ہندسوں والے انتظاموں کی تعداد $=\frac{7!}{3!2!}=420$ لیکن ان میں وہ اعداد بھی شامل ہیں جن میں '0' انتہائی

بائیں طرف ہے۔ ہر انتظاموں کی تعداد $\frac{6!}{3!2!}$ (جن میں '0' کو انتہائی بائیں طرف رکھا گیا ہے) =60 اس لئے اعداد کی مطلوبہ تعداد $420 - 60 = 360$

**مثال 24** 5 لڑکیوں اور 3 لڑکوں کو کس طرح بیٹھایا جائے تا کہ 2 لڑکے ایک ساتھ نہ بیٹھیں۔

**حل** ہمیں سب سے پہلے 5 لڑکیوں کو بیٹھانا ہے اور یہ 5! طریقوں سے ممکن ہے۔ ان میں سے ہر ایک انتظام کے لیے، تین لڑکے 'X' مارک پر بیٹھ سکتے ہیں $\times G \times G \times G \times G \times G \times$

یہاں 6 'X' مارک جگہیں ہیں اور 3 لڑکے $^{P}C_3$ طریقے سے بیٹھ سکتے ہیں۔ اس لیے، ضرب کے اصول سے طریقوں کی کل تعداد $= {}^6P_3 \times 5! = \frac{6!}{3!} \times 5!$

## متفرق مشق

1. لفظ Daughter کے حروف سے کتنے الفاظ جس کا مطلب نکلتا ہو یا نہ نکلتا ہو، 2 Vowels اور 3 غیر Vowels والے بنائے جاسکتے ہیں؟
2. لفظ Equation کے حروف سے کتنے الفاظ جن کا مطلب نکلتا ہو یا نہ نکلتا ہو بنائے جاسکتے ہیں جن میں Vowels اور غیر Vowels ایک ساتھ واقع (occur) ہوں؟
3. 9 لڑکوں اور 4 لڑکیوں میں سے 7 ممبر کی ایک کمیٹی بنی ہے۔ یہ کتنے طریقہ سے ہوسکتا جبکہ کمیٹی ذیل ممبروں پر مشتمل ہے۔
   (i) صرف 3 لڑکیاں؟ (ii) کم سے کم تین لڑکیاں؟ (iii) زیادہ سے زیادہ تین لڑکیاں؟
4. اگر لفظ EXAMINATION کے حروف سے بننے والے تمام مختلف مبادلوں کی لغت کی طرح فہرست بنائی جائے، تو اس فہرست میں کتنے الفاظ ہوں گے E کے شروع ہونے سے پہلے؟
5. '0'1'2'3'5'7 اور 9 سے کتنے 6 ہندسوں والے اعداد بن سکتے ہیں جو 10 سے تقسیم ہوں اور کوئی ہندسہ دہرایا نہ جائے؟
6. انگریزی کے حروف تہجی (alphabets) میں 5 Vowels اور 21 غیر Vowels ہیں۔ دو مختلف Vowels 2 اور غیر مختلف Vowels والے کتنے الفاظ انگریزی کے حروف تہجی سے بن سکتے ہیں؟
7. ایک امتحان میں ایک سوالوں کے پرچے میں 12 سوال دو حصوں، حصہ I اور حصہ II میں بانٹا گیا ہے۔ حصہ I میں 5 اور

حصہ II میں بالترتیب 5 اور سات (7) سوال ہیں۔ طلباء کو کل 8 سوال حل کرنے ہیں جس میں کم سے کم 3 سوال ہر حصہ سے ہوں۔ طلباء کتنے طریقوں سے سوالات چن سکتے ہیں؟

**.8** 52 پتوں کی ایک گڈی سے 5 پتوں کا ایک اجتماع چنے کی تعداد معلوم کیجیے اگر 5 پتوں کے ہر سیٹ میں یقینی طور پر ایک بادشاہ (king) ہو۔

**.9** 5 آدمیوں اور 4 عورتوں کو اس طرح ایک قطار میں بیٹھانا ہے تا کہ عورتیں جفت جگہ پر بیٹھیں۔ اس طرح کے کتنے طریقے ممکن ہیں؟

**.10** 25 طلباء کی ایک کلاس سے 10 کو ایک تفریحی سفر کے لیے چنا ہے۔ 3 طلباء ایسے ہیں جنھوں نے یہ طے کیا ہے یا تو وہ تینوں جائیں گے یا پھر کوئی نہیں۔ کتنے طریقے سے تفریحی سفر کے لیے پارٹی چنی جاسکتی ہے؟

**.11** لفظ Assassination کے حروف کو کتنے طریقے سے ترتیب دی جاسکتی ہے تا کہ تمام 'S' ایک ساتھ آجائیں؟

## خلاصہ (Summary)

- گنتی کا بنیادی اصول: اگر ایک وقوعہ m مختلف طریقوں سے واقعہ ہوتا ہے، اس کے اور دوسرا وقوعہ n مختلف طریقوں سے واقع ہوتا ہے۔ وقوعہ کے واقع ہونے کی کل تعداد کی $m \times n$ ہے۔
- n مختلف اشیاء کے مبادلوں کی تعداد جب کہ اشیاء کو r بار لیا جائے اور ساتھ ہی دہرانے کی اجازت نہ ہو $^{n}p_{r}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور $^{n}p_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$، جبکہ $0 \le r \le n$
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
- $n! = n \times (n-1)!$
- n مختلف اشیاء کے مبادلوں کی تعداد جب کہ اشیاء کو r بار لیا جائے اور دہرانے کی اجازت ہو $n^r$ ہے۔

- n اشیاء کے مبادلوں کی تعداد جب سب اشیاء کو ایک ساتھ لیا جائے، جہاں $p_1$ اشیاء پہلی طرح کی ہیں، $p_2$ اشیاء دوسری طرح کی ،.....، pk اشیاء K طرح کی اور اگر کوئی باقی ہیں اور تمام مختلف ہیں یہ ہے $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!....p_k!}$

- مختلف اشیاء کی اجتماع کی تعداد جنھیں r بار لیا جائے $^nC_r$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اور $^nC_r$ یہ ہے

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ 0 \le r \le n$$

## تاریخ کے اوراق سے (Historical Note)

مبادلہ اور اجتماع کی سوچ کو زمانہ قدیم سے نکالا جا سکتا ہے جب ہندوستان میں جینی مذہب (Jainism) آیا تھا اور ممکن ہے اس سے پہلے سے۔ لیکن اس کا سہرا جینیوں کے سر بندھتا ہے جنھوں نے اس کے Subject matter کو ایک خود کفیل عنوان ریاضی میں دیا جس کا نام ویکلپا (Vikalpa) تھا۔

جینیوں میں مہاویرا (850AD) شاید دنیا میں سب سے پہلا ریاضی داں تھا جس نے مبادلہ اور اجتماع کو ایک عام ضابطہ (formula) دیا تھا۔

چھٹی صدی بی سی، میں سش ریتا (Sushruta) نے اپنے دوائیوں کے کام میں سش ریتا سمہیتا (Sushruta Samhita) نے دعوی کیا (بتایا) کہ 63 اجتماع، مختلف ذائقوں سے بنائے جا سکتے ہیں جب کہ ایک کو ایک بار لیا جائے، دو ایک بار لیا جائے وغیرہ وغیرہ۔ پنگالا (Pingala) ایک سنسکرت کے اسکالر نے تیسری صدی بی سی کے قریب ایک اجتماع کی تعداد نکالنے کا طریقہ دیا جس میں ایک کو ایک بار میں۔ دو کو ایک بار میں وغیرہ وغیرہ جس کام کا نام چھانڈا ستر (Chhanda Sutra) تھا۔ بھاسکر آچاریہ (Bhaskaracharya) جو کہ 1114AD میں پیدا ہوئے تھے نے مبادلہ اور اجتماع کے Subject matter کو انکا پاشا (Anka Pasha) کے نام سے اپنے مشہور کام لیلا وتی Lila Vati میں دیا ہے۔ عام فارمولے $^nC_r$ اور $^nP_r$ جو پہلے ہی مہاویر، بھاسکر آچاریہ دے چکے تھے کے علاوہ کچھ خاص مسئلہ اور حل مضمون کے مطابق دئے۔

ہندوستان کے باہر، مبادلہ اور اجتماع کا Subject matter اپنی مؤدبانہ شروعات چین میں مشہور کتاب I-King (بدلاؤ کی کتاب) کے ذریعہ کر چکا تھا۔ اس کام کا تقریبا وقت بتانا تو مشکل ہے۔ کیونکہ 213، بی سی میں بادشاہ نے حکم دیا

تھا کہ تمام کتابوں اور مسودے جو بھی ملک میں موجود ہیں جلا دیا جائے جو کہ قسمت سے مکمل نہیں ہو سکا Greeks اور بعد میں Latin مصنفوں نے کچھ بکھرا ہوا کام مبادلہ اور اجتماع پر کیا۔

کچھ عربی اور Hebrew مصنف مبادلہ اور اجتماع کی سوچ کو اجرام فلکی (astronomy) کے مطالع میں استعمال کرتے ہیں۔ ربیعہ بن عذار (Rabbi ben Ezra) نے جن سیاروں کو جانا جاتا تھا انکے اجتماع کی تعداد معلوم کی جبکہ دو کو ایک ساتھ لیا جائے۔ تین ایک ساتھ لیا جائے وغیرہ وغیرہ۔ یہ 1140AD کے اریب قریب تھا۔ ایسا لگتا ہے کہ ربیعہ بن عذار فارمولہ $^nC_r$ نہیں جانتا تھا حالانکہ وہ یہ جانتا تھا کہ $^nC_r = {}^nC_{n-r}$ کی کچھ خاص قیمتوں کے 1321 A.D لیوی بین جرسن (Levi Ben Gerson) ایک دوسرا Hebrew مصنف نے فارمولہ $^nP_r$، $^nP_n$ کے لیے دیئے۔

پہلی مکمل کتاب جس نے مبادلہ اور اجتماع کو subject matter کو مکمل تسلیم کیا وہ ارس کنجک ٹنڈی (Ars Conjectandi) کتاب ہے جسے سوئیزرلینڈ کے جیکب برنولی (Jacob Benroulli)(1654-1705AD) نے لکھا ہے اور 1713AD میں اس کے انتقال کے بعد (Posthumously) شائع ہوئی ہے۔ اس کتاب میں مبادلہ اور اجتماع کی ضروری تھیوری ہے جو آج جانی جاتی ہے۔