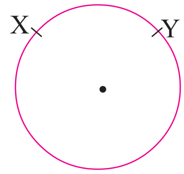
আমার ছোটো ভাইয়ের বন্ধু রাবেয়া আমাদের সঙ্গে এই মজার কাজে যোগ দিল। সে তার একজোড়া বৃত্তাকার চুড়ির সাহায্যে কতকগুলি বৃত্ত আঁকল। কিন্তু তারি 1 টি চুড়ি ভেঙে 2 টুকরো হয়ে গেল।

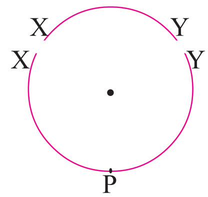
আমি ভাঙা টুকরোদুটি জুড়ে বা পাশাপাশি রেখে আগের বৃত্তাকার চুড়ি পাওয়ার চেষ্টা করি।

চুড়িটি X ও Y বিন্দুতে ভেঙে যাওয়ায় X থেকে Y পর্যন্ত একটি বৃত্তের টুকরো পেয়েছি।




**4** বৃত্তের এই টুকরোকে কী বলা হয়?

X থেকে Y পর্যন্ত বৃত্তের টুকরোকে **বৃত্তচাপ (Arc)** বলে এবং লেখা হয় $\overset{\frown}{XY}$। এই ছোটো দৈর্ঘ্যের চাপটি **উপচাপ (Minor Arc)** এবং বড়ো দৈর্ঘ্যের চাপটি **অধিচাপ (Major Arc)**। উপচাপটির নাম $\overset{\frown}{XY}$ এবং অধিচাপটির নাম $\overset{\frown}{XPY}$



যদি দুটি বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য সমান হয়, সেক্ষেত্রে কী পাব?

দুটি বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য সমান হলে X ও Y বিন্দু দুটি বৃত্তের কোনো ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হবে এবং সেক্ষেত্রে **অর্ধবৃত্ত (Semi circle)** পাব।

আবার সম্পূর্ণ বৃত্তটির দৈর্ঘ্যই হলো **পরিধি (Circumference)**।

আমার ভাই রাবেয়ার আঁকা বৃত্তে একটি জ্যা AB এঁকেছে যা ওই বৃত্তের ব্যাস নয় এবং এর ফলে বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি যে দু-ভাগে বিভক্ত হয়েছে প্রতিটি ভাগে আলাদা রং দিয়েছে।

**5** AB জ্যা বৃত্তাকার ক্ষেত্রটিকে যে দুটি ভাগে ভাগ করেছে, প্রতিটি ভাগকে কী বলা হয়?

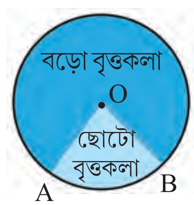
প্রতিটি ভাগকে **বৃত্তাংশ (Segment)** বলা হয়।
অর্থাৎ কোনো বৃত্তের একটি জ্যা ও একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রকে **বৃত্তাংশ (Segment)** বলে।

চিত্রে দেখছি দুই ধরনের বৃত্তাংশ পেয়েছি। একটি বড়ো বৃত্তাংশ ও অপরটি ছোটো বৃত্তাংশ। এই বড়ো বৃত্তাংশটি **অধিবৃত্তাংশ (Major Segment)** এবং ছোটো বৃত্তাংশটি **উপবৃত্তাংশ (Minor Segment)**।

আমি একটি বৃত্ত এঁকেছি যার কেন্দ্র O এবং বৃত্তের উপর যে-কোনো দুটি বিন্দু A ও B-এর সঙ্গে কেন্দ্র O যোগ করে দুটি ব্যাসার্ধ OA এবং ______ পেয়েছি।

**6** এই OA ও OB ব্যাসার্ধ এবং বৃত্তচাপ $\overset{\frown}{AB}$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে কী বলা হয়?

O কেন্দ্রীয় বৃত্তের OA ও OB ব্যাসার্ধ এবং $\overset{\frown}{AB}$ বৃত্তচাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা (Sector)** বলা হয়।

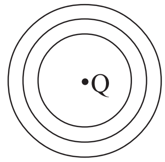



অর্থাৎ যে-কোনো বৃত্তের দুটি ব্যাসার্ধ এবং বৃত্তচাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা (Sector)** বলা হয়। এর ফলে দুটি বৃত্তকলা পাব। একটি বড়ো বৃত্তকলা **(Major Sector)** এবং অপরটি ছোটো বৃত্তকলা **(Minor Sector)**।

যদি দুটি বৃত্তকলা সমান হয় আমরা অর্ধবৃত্তাকার ক্ষেত্র পাব এবং সেক্ষেত্রে বৃত্তকলার ব্যাসার্ধ দুটি এবং বৃত্তচাপ কেমন হবে নিজে এঁকে লিখি।

আমার বন্ধু রুমা বোর্ডে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু Q-কে কেন্দ্র করে পাশের ছবির মতো অনেকগুলি বৃত্ত আঁকল।

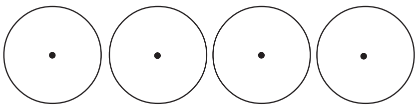
**7** একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে আলাদা আলাদা দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে যে অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কন করতে পারব তাদের কী বলে?




এইসব বৃত্তকে **এককেন্দ্রীয় বৃত্ত (Concentric Circles)** বলা হয়।

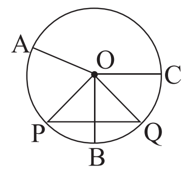
দেখছি, এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট নয়।

**8** নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে আলাদা আলাদা বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্ত আঁকলে কী পাই দেখি।



এদের সমান বা **সর্বসম বৃত্ত (Equal or congruent Circles)** বলা হয়।

## কষে দেখি 3.1




1. পাশের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবি দেখি এবং কোন কোন ব্যাসার্ধ PAQ বৃত্তাংশে অবস্থিত লিখি।

2. **নীচের [ ]-এ বুঝে লিখি:**

   (i) একটি বৃত্তে [ ] বিন্দু আছে।

   (ii) বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা [ ]।

   (iii) জ্যা বৃত্তাকার ক্ষেত্রকে দুটি [ ] বিভক্ত করে।

   (iv) বৃত্তের সকল ব্যাস [ ] বিন্দুগামী।

   (v) দুটি বৃত্তাংশ সমান হলে তাদের বৃত্তচাপ দুটির দৈর্ঘ্য [ ] হবে।

   (vi) একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের বৃত্তকলা হলো বৃত্তচাপ এবং দুটি [ ] -এর দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চল।

   (vii) বৃত্তের বাইরের কোনো বিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য অপেক্ষা [ ]।

3. স্কেল ও পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে একটি বৃত্ত এঁকে কেন্দ্র, জ্যা, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, উপচাপ, অধিচাপ নির্দেশ করি।

4. **সত্য না মিথ্যা লিখি:**

   (i) বৃত্ত একটি সামতলিক চিত্র।

   (ii) বৃত্তাংশ (Segment) একটি সামতলিক ক্ষেত্র।

   (iii) বৃত্তকলা (Sector) একটি সামতলিক ক্ষেত্র।

   (iv) জ্যা একটি সরলরেখাংশ।

   (v) চাপ একটি সরলরেখাংশ।

   (vi) একটি বৃত্তে সসীম সংখ্যক একই দৈর্ঘ্যের জ্যা আছে।

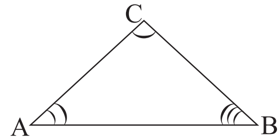
   (vii) একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটিই বৃত্ত আঁকা সম্ভব।

   (viii) দুটি সর্বসম বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য সমান।

বাড়ির চাবিগুলি আলাদা আলাদা চাবির রিং-এ ভরে একটি বড়ো গোলাকার শক্ত পিচবোর্ডে আটকে আমাদের পড়ার ঘরের এককোণে ওরা টাঙিয়ে দিল। কিন্তু অনেকগুলি ছোটো-বড়ো নানান দৈর্ঘ্যের অতিরিক্ত লম্বা শক্ত তামার তার এদিকে ওদিকে ছড়িয়ে ছিটিয়ে পড়ে আছে।

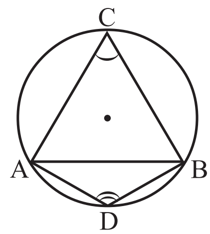
আমার ভাই তীর্থ একটি লম্বা শক্ত তামার তারের সঙ্গে অপর দুটি তামার তার আটকে ABC ত্রিভুজ তৈরি করল।

দেখছি, AB সরলরেখাংশ C বিন্দুতে ∠ACB উৎপন্ন করেছে। এই কোণটি AB-এর দ্বারা C বিন্দুতে উৎপন্ন সম্মুখ কোণ।




একইভাবে BC সরলরেখাংশ ____ বিন্দুতে ____ উৎপন্ন করেছে। ∠BAC, BC-এর দ্বারা ____ বিন্দুতে উৎপন্ন সম্মুখ কোণ এবং CA সরলরেখাংশ ____ বিন্দুতে ____ উৎপন্ন করেছে। ∠ABC, AC-এর দ্বারা B বিন্দুতে উৎপন্ন ____ কোণ।

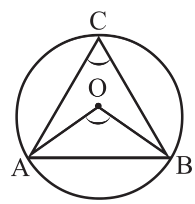
আমার বন্ধু পূজা এক মজার কান্ড করল। সে কতকগুলি কাঠি একটি বৃত্তাকার রিং-এর মধ্যে পাশের চিত্রের মতো আটকে দিল।




দেখছি, বৃত্তকার চাবির রিং-এ AB জ্যা বৃত্তের C বিন্দুতে সম্মুখ কোণ ∠ACB এবং AB জ্যা বৃত্তের D বিন্দুতে সম্মুখ কোণ ____ উৎপন্ন করেছে।

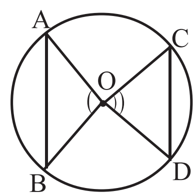
কিন্তু ∠ACB ____ ∠ADB [ = / ≠ বসাই]

পাশের ছবির মতো একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকি। ওই বৃত্তে ব্যাস ছাড়া যে-কোনো একটি জ্যা AB আঁকি। AB জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে ও বৃত্তের উপরের যে-কোনো বিন্দু C-তে যে দুটি সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করবে তাদের মধ্যে সম্পর্ক চাঁদার সাহায্যে মেপে লিখি। **[নিজে করি]**



আমি একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে একাধিক জ্যা এঁকে দেখি তারা কেন্দ্রে কীরূপ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে?

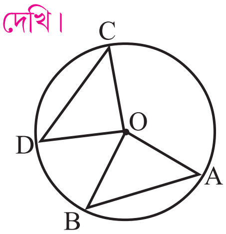
O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি জ্যা AB ও CD এঁকেছি। যেখানে AB > CD; জ্যা AB ও জ্যা CD কেন্দ্রে যথাক্রমে ∠AOB ও ____ দুটি সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে, চাঁদা দিয়ে মেপে দেখছি ∠AOB ____ ∠COD [ > / < বসাই]



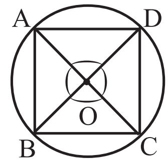
কিন্তু আমি যদি কোনো একটি বৃত্তে সমান সমান দৈর্ঘ্যের কতকগুলি জ্যা আঁকি, তারা কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করবে কিনা তা এঁকে ও চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখি।

আমি O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি সমান সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD এঁকেছি যারা কেন্দ্রে যথাক্রমে ____ ও ____ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে।

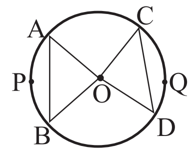
চাঁদা দিয়ে মেপে দেখছি, ∠AOB ____ ∠COD [ = / ≠ বসাই]



পাশের ছবিতে ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি কেন্দ্রে যে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে চাঁদা দিয়ে মেপে তাদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।




**হাতেকলমে**




(i) আমি একটি যে-কোনো বৃত্ত আঁকলাম যার কেন্দ্র O

(ii) ওই বৃত্তে দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD আঁকলাম।

(iii) AB ও CD জ্যা দুটি যথাক্রমে $\overset{\frown}{APB}$ ও $\overset{\frown}{CQD}$ চাপ দুটি ছিন্ন করেছে

এবং কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle AOB$ ও $\angle COD$ সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে।

(iv) কাঁচি দিয়ে OAPB এবং OCQD বৃত্তকলা দুটি কেটে নিয়ে একটির উপর অপরটি বসিয়ে দেখছি বৃত্তকলা দুটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যাচ্ছে।

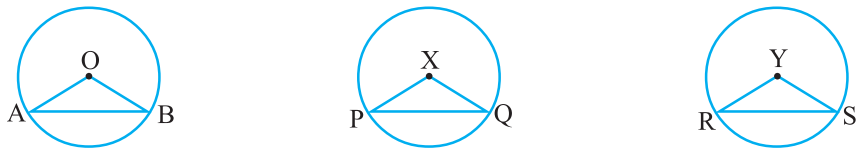
$\therefore$ পেলাম : $\overset{\frown}{APB}$ ও $\overset{\frown}{CQD}$ চাপ দুটি সমান।

এবং $\angle AOB = \angle COD$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, কোনো একটি বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা সমান দৈর্ঘ্যের চাপ ছিন্ন করে এবং কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।

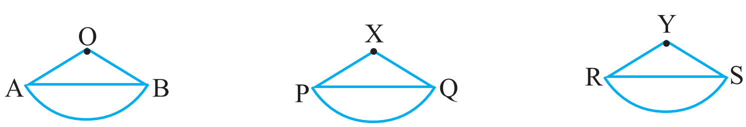
রাবেয়া তার খাতায় অনেকগুলি সর্বসম বৃত্ত এঁকেছে। অর্থাৎ বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ☐ (সমান / অসমান)

রাবেয়ার আঁকা সমান বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা এঁকে কী পাই দেখি?




O কেন্দ্রীয়, X কেন্দ্রীয় ও Y কেন্দ্রীয় সর্বসম বৃত্তগুলিতে যথাক্রমে AB, PQ ও RS সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন সম্মুখ কোণগুলি মেপে দেখছি, $\angle AOB$ ☐ $\angle PXQ$ ☐ $\angle RYS$ [ = / $\neq$ বসাই]

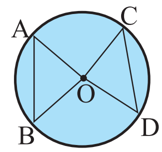
আমি হাতেকলমে সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একাধিক বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যাগুলি আঁকি এবং জ্যাগুলি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করেছে, সেই কোণগুলি চাপসমেত কেটে নিয়ে একটি অপরগুলির উপর বসিয়ে মিলিয়ে দেখছি,




সমান সমান বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা সমান দৈর্ঘ্যের চাপ ছিন্ন করে এবং কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে

**[হাতেকলমে নিজে করি]**

কিন্তু বিপরীতে অর্থাৎ যদি কোনো বৃত্তের একাধিক জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহলে জ্যাগুলির মধ্যে কী ধরনের সম্পর্ক হবে হাতেকলমে পরীক্ষা করে দেখি।




আমি একটি বৃত্ত এঁকেছি যার কেন্দ্র O; এই O কেন্দ্রীয় বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিয়ে ভাঁজ করে কেন্দ্রে এমন দুটি কোণ ∠AOB ও ∠COD তৈরি করেছি যাতে ∠AOB = ∠COD হয়।

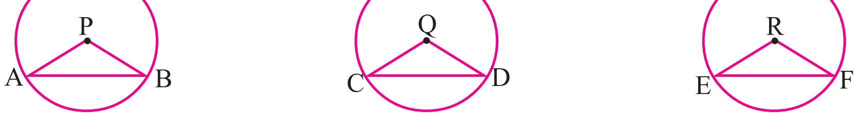
A ও B বিন্দুতে এবং C ও D বিন্দুতে সুতো আটকে বা কাঠি দিয়ে AB ও CD-র দূরত্ব মেপে দেখছি, AB ☐ CD [ = / ≠ বসাই]

∴ হাতেকলমে দেখছি, বৃত্তের একাধিক জ্যা কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে জ্যাগুলির দৈর্ঘ্য সমান হয়।

আমি অন্য যে-কোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকি এবং ওই বৃত্তে এমন একাধিক জ্যা আঁকি যারা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করেছে। এবার স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি জ্যাগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর ☐ ।**[নিজে মেপে লিখি]**

∴ পেলাম, কোনো বৃত্তে যে সকল জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দৈর্ঘ্য সমান।

তীর্থ তার খাতায় অনেকগুলি সমান বৃত্ত এঁকেছে যাদের কেন্দ্র P, Q ও R; আমি তীর্থের আঁকা বৃত্তে কতকগুলি জ্যা AB, CD ও EF আঁকলাম যারা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করেছে অর্থাৎ ∠APB = ∠CQD = ∠ERF



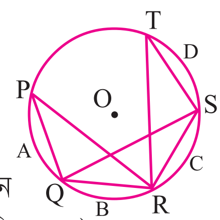

স্কেলের সাহায্যে মেপে দেখছি, AB ☐ CD ☐ EF [ = / ≠ বসাই] **[নিজে এঁকে ও মেপে বসাই]**

∴ পেলাম, সমান বৃত্তের যে সকল জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দৈর্ঘ্য সমান।

যেহেতু দৈর্ঘ্য সমান সুতরাং তাদের দ্বারা ছিন্ন চাপের দৈর্ঘ্যও ☐ (সমান / অসমান)।

একই বৃত্তে দুটি চাপ দ্বারা কেন্দ্রে দুটি সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন হলে চাপ দুটির দৈর্ঘ্য সমান হবে অর্থাৎ জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান হবে। **[হাতেকলমে কাগজ কেটে যাচাই করি]**

**প্রয়োগ : 1.** একটি বৃত্তে PQ, QR, RS এবং ST জ্যা। যদি PQ = QR = RS = ST হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, PR = QS = RT




**প্রদত্ত :** O কেন্দ্রীয় বৃত্তে PQ, QR, RS এবং ST জ্যা এবং PQ = QR = RS = ST

**প্রমাণ করতে হবে:** PR = QS = RT

**প্রমাণ :** PQ = QR সুতরাং, $\overset{\frown}{PAQ} = \overset{\frown}{QBR}$ .... (i) (যেহেতু, একই বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা সমান দৈর্ঘ্যের চাপ ছিন্ন করে)

আবার, QR = RS সুতরাং, $\overset{\frown}{QBR} = \overset{\frown}{RCS}$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই, $\overset{\frown}{PAQ} + \overset{\frown}{QBR} = \overset{\frown}{QBR} + \overset{\frown}{RCS}$

সুতরাং $\overset{\frown}{PQR} = \overset{\frown}{QRS}$ ∴ PR = QS (যেহেতু একই বৃত্তের চাপ দুটি দৈর্ঘ্যে সমান সুতরাং জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান)

আবার, RS = ST সুতরাং, $\overset{\frown}{RCS} = \overset{\frown}{SDT}$ .... (iii)

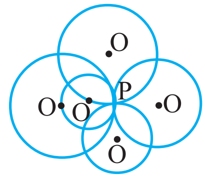
(ii) ও (iii) যোগ করে পাই, $\overset{\frown}{QBR} + \overset{\frown}{RCS} = \overset{\frown}{RCS} + \overset{\frown}{SDT}$ সুতরাং, $\overset{\frown}{QRS} = \overset{\frown}{RST}$ ∴ QS = RT

∴ PR = QS = RT (প্রমাণিত)

আজ আমরা কিছু বন্ধু মিলে ঠিক করেছি এক মজার খেলা খেলব। আমাদের কিছু বন্ধু রীতা, মাসুদ, দীপ্তার্ক ও তাপস বোর্ডে কিছু বিন্দু আঁকবে। আমরা সেই বিন্দুগামী বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করব ও তাদের প্রকৃতি জানার চেষ্টা করব।

মাসুদ প্রথমে বোর্ডে একটি মাত্র নির্দিষ্ট বিন্দু P আঁকল।

**9** নির্দিষ্ট P বিন্দুগামী বৃত্ত আঁকি ও কী পাই দেখি।

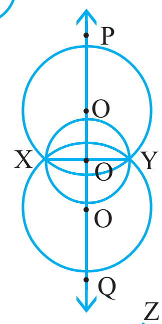



বোর্ডের যে-কোনো বিন্দু O-কে কেন্দ্র করে OP দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা P বিন্দুগামী হবে।

দেখছি, নির্দিষ্ট P বিন্দুগামী ☐ [1টি / 2টি / 3টি / অসংখ্য] বৃত্ত পাচ্ছি।

এবার রীতা বোর্ডে দুটি বিন্দু X ও Y আঁকল।

**10** X ও Y বিন্দুগামী বৃত্ত আঁকি ও কী পাই দেখি।

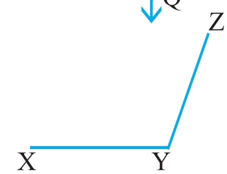



X ও Y সংযোজক সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপরের প্রতিটি বিন্দু X ও Y থেকে সমদূরবর্তী। PQ সরলরেখার ওপর যে-কোনো বিন্দু O-কে কেন্দ্র করে এবং OX বা OY দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা X ও Y বিন্দুগামী হবে। যেখানে O, PQ সরলরেখার উপর যে-কোনো বিন্দু।

∴ X ও Y বিন্দুগামী ☐ বৃত্ত অঙ্কন করতে পারব। **[নিজে আঁকি ও লিখি]**

**11** দীপ্তার্ক এবার বোর্ডে তিনটি অসমরেখ বিন্দু X, Y ও Z আঁকল।

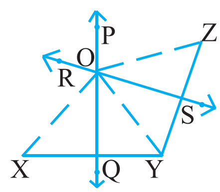
আমি এই তিনটি অসমরেখ বিন্দু X, Y ও Z দিয়ে বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করি।




প্রথমে X, Y এবং Y, Z বিন্দুগুলি যোগ করে XY ও YZ সরলরেখাংশ পেলাম।

X, Y ও Z বিন্দুগামী বৃত্ত অঙ্কনের জন্য প্রথমে কেন্দ্র নির্ণয় করি অর্থাৎ এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করি যা X, Y ও Z বিন্দুগুলি থেকে সমদূরবর্তী।

**12** কিন্তু কীভাবে X, Y ও Z বিন্দুগুলি থেকে সমদূরবর্তী বিন্দু পাব?




XY সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ আঁকলাম। এই PQ সরলরেখার ওপর প্রতিটি বিন্দু X ও Y বিন্দুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী।

আবার ZY সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS আঁকলাম। এই RS সরলরেখার ওপর প্রতিটি বিন্দু Y ও Z বিন্দুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী।

∴ XY ও YZ সরলরেখাংশদুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ ও RS এবং যেহেতু X, Y ও Z অসমরেখ বিন্দু, সুতরাং PQ ও RS সরলরেখা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করল।

∴ O বিন্দুটি X, Y ও Z বিন্দুগুলি থেকে ☐।

∴ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OX বা OY বা OZ দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলে তা X, Y ও Z বিন্দুগামী হবে।

**13** X, Y ও Z তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে কি একটিই মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব?

যেহেতু X, Y, Z অসমরেখ বিন্দু তিনটি নির্দিষ্ট, সুতরাং, XY ও YZ সরলরেখাংশ দুটি নির্দিষ্ট এবং PQ ও RS লম্বসমদ্বিখণ্ডক দুটি নির্দিষ্ট। সুতরাং PQ ও RS-এর ছেদবিন্দু O অর্থাৎ কেন্দ্র নির্দিষ্ট এবং OX ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট। নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

∴ পেলাম X, Y ও Z তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কন সম্ভব।

আমি অন্য যে-কোনো তিনটি অসমরেখ বিন্দু নিয়ে একইভাবে বৃত্ত এঁকে দেখছি তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটিই বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব। **[নিজে আঁকি]**

এবার তাপস বোর্ডে তিনটি সমরেখ বিন্দু A, B ও C আঁকল।

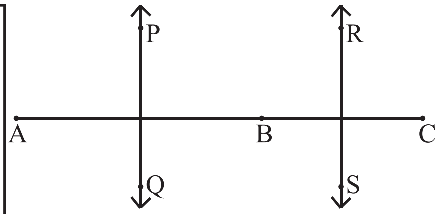
**14** A, B ও C তিনটি সমরেখ বিন্দুগামী কোনো বৃত্ত আঁকতে পারব কিনা নিজে এঁকে দেখি।

তিনটি সমরেখ বিন্দু A, B ও C নিলাম। AB-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ এবং BC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS

যেহেতু AB ও BC একই সরলরেখাংশের অংশ, তাই PQ || RS

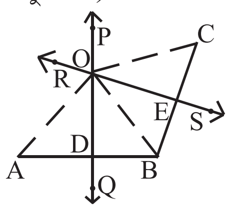
∴ PQ ও RS -এর কোনও ছেদবিন্দু পাওয়া যাবে না।

∴ তিনটি সমরেখ বিন্দু দিয়ে কোনো বৃত্ত আঁকা সম্ভব নয়।




*যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,*

**উপপাদ্য - 31.** তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব। *(প্রমাণ মূল্যায়নের অন্তর্ভুক্ত নয়)*




**প্রদত্ত :** A, B, C তিনটি অসমরেখ বিন্দু।

**প্রমাণ করতে হবে :** A, B, C তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

**অঙ্কন :** A, B বিন্দুদ্বয় ও B, C বিন্দুদ্বয় যুক্ত করি। AB ও BC সরলরেখাংশ দুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করি এবং তারা যথাক্রমে PQ ও RS সরলরেখা।

যেহেতু AB ও BC সরলরেখাংশ দুটি সমান্তরাল নয়, সুতরাং তাদের লম্বসমদ্বিখণ্ডক দুটি PQ ও RS সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এবং RS সরলরেখা AB ও BC সরলরেখাংশদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। O, A বিন্দুদ্বয়; O, B বিন্দুদ্বয় এবং O, C বিন্দুদ্বয় যুক্ত করি।

**প্রমাণ :** Δ OAD এবং Δ OBD-এর মধ্যে

AD = BD (∵ OD, AB সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক)

∠ODA = ∠ODB (∵ প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ)

OD সাধারণ বাহু ∴ Δ OAD ≅ Δ OBD (S – A – S সর্বসমতা অনুসারে)

সুতরাং OA = OB (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ)

অনুরূপে, Δ OBE ≅ Δ OCE

∴ OB = OC

সুতরাং OA = OB = OC

∴ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি A, B, C বিন্দুগামী হবে।

সুতরাং তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

A, B, C বিন্দু তিনটি নির্দিষ্ট। অতএব, AB ও BC সরলরেখাংশ দুটি নির্দিষ্ট।

সুতরাং AB ও BC সরলরেখাংশ দুটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ ও RS সরলরেখা নির্দিষ্ট।

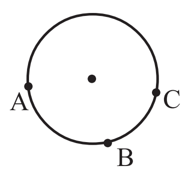
যেহেতু PQ ও RS সরলরেখা নির্দিষ্ট, সুতরাং তাদের ছেদবিন্দু O নির্দিষ্ট।

আবার যেহেতু O এবং A বিন্দুদ্বয় নির্দিষ্ট, সুতরাং OA সরলরেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট।

অতএব নির্দিষ্ট বিন্দু O-কে কেন্দ্র করে এবং নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

∴ তিনটি অসমরেখ বিন্দু A, B, C দিয়ে একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

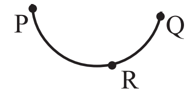
**15** আমার বোন তার হাতের বৃত্তাকার বালার সাহায্যে একটি বৃত্ত অঙ্কন করেছে। আমি এই বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করি।




বৃত্তের উপর যে-কোনো 3টি বিন্দু A, B ও C নিলাম। এবার AB ও BC সরলরেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু নির্ণয় করে বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**16** যদি কোনো বৃত্তের একটি বৃত্তচাপ আঁকা থাকে তবে কীভাবে বৃত্তটি অঙ্কন করতে পারব দেখি।

$\overset{\frown}{PQ}$ বৃত্তচাপের উপর একটি বিন্দু R নিলাম। এবার আগের মতো P, R ও Q বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করে বৃত্তটি অঙ্কন করি। **[নিজে করি]**




দেখছি, তিনটি অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটিই বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব। কিন্তু তিন-এর বেশি বিন্দু দিয়ে কি বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব?

তিনের বেশি বিন্দু দিয়ে যাচ্ছে এমন বৃত্ত আঁকা সম্ভব নাও হতে পারে। যদি সম্ভব হয় তবে বিন্দুগুলিকে **সমবৃত্তস্থ** (Concyclic) বলা হয়।

**17** কোনো চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হলে ওই চতুর্ভুজকে কী বলা হয়?

যে চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি কোনো একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত সেই চতুর্ভুজকে **বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ** (Cyclic Quadrilateral) বলা হয়।

**18** সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম কী ?

যে চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল এবং অপরজোড়া বাহু অসমান্তরাল ও সমান অর্থাৎ তির্যক বাহুদুটি সমান, তাকে সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম (Isosceles Trapezium) বলে।

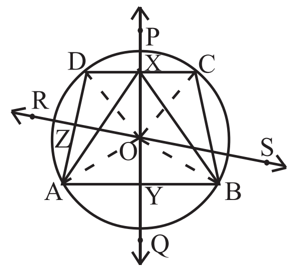
সামান্তরিক একটি ট্রাপিজিয়াম। কিন্তু এটি কি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম। **(নিজে লিখি)**

**প্রয়োগ - 2.** আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

**প্রদত্ত :** ABCD একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম। AB || DC এবং AD = BC

**প্রমাণ করতে হবে :** ABCD ট্রাপিজিয়ামের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ।

**অঙ্কন :** DC বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ এবং AD বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS অঙ্কন করলাম যারা যথাক্রমে DC কে X এবং AD কে Z বিন্দুতে ছেদ করল। PQ, AB কে Y বিন্দুতে ছেদ করল। A, X এবং B, X যুক্ত করলাম। PQ, RS কে O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দুর সঙ্গে A, B, C ও D যোগ করলাম।




**প্রমাণ :** $\Delta$ADX এবং $\Delta$BCX -এ DX = CX [$\because$ CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ]

$\angle$ADX = $\angle$BCX [$\because$ সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদুটির যে-কোনো একটি বাহু সংলগ্ন কোণগুলি সমান]

AD = BC [প্রদত্ত]

$\therefore$ $\Delta$ADX $\cong$ $\Delta$BCX [S-A-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore$ AX = BX [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

সমকোণী $\Delta$AXY এবং সমকোণী $\Delta$BXY-এ $\angle$AYX = $\angle$BYX [$\because$ AB || CD এবং CD $\perp$ PQ, $\therefore$ AB $\perp$ PQ]

অতিভুজ AX = অতিভুজ BX [আগে **প্রমাণ করা হয়েছে**] এবং XY উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।

$\therefore$ $\Delta$AXY $\cong$ $\Delta$BXY [R-H-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore$ AY = BY [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

$\therefore$ PQ, AB-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক হবে।

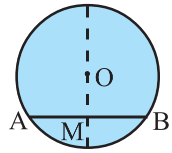
$\because$ DC-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ-এর উপর O বিন্দু অবস্থিত,

$\therefore$ DO = CO; একইভাবে, DO = AO এবং AO = BO

$\therefore$ CO = DO = AO = BO

$\therefore$ O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OC বা OD বা OA বা OB-এর সমান দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি A, B, C ও D বিন্দু দিয়ে যাবে। অর্থাৎ সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্তস্থ। **(প্রমাণিত)**

আমরা অনেকগুলি বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিয়েছি। আমার ভাই রানা কয়েকটি বৃত্তে ব্যাস নয় এরকম জ্যা এঁকেছে।




**হাতেকলমে**

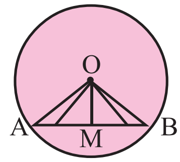
(i) আমি একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তাকার ক্ষেত্র নিলাম যার ব্যাস নয় এরূপ জ্যা AB।

(ii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি এমনভাবে ভাঁজ করলাম যাতে ভাঁজটি O বিন্দু দিয়ে যায় এবং AB সরলরেখাংশটির একটি অংশ অপর অংশের উপর থাকে। ভাঁজটি AB সরলরেখাংশকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দুটি M; OM যুক্ত করলাম।

(iii) মেপে দেখলাম $\angle OMA = \angle OMB = 1$ সমকোণ এবং $AM = BM$।

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস নয় এরূপ জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

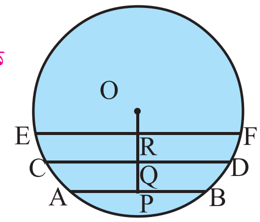
আমি অন্য যে-কোনো একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিয়ে হাতেকলমে কেন্দ্র থেকে ব্যাস নয় এরূপ জ্যা-এর উপর লম্ব টেনে দেখছি লম্বটি জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। **[নিজে করি]**




আমরা একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র নিলাম যার কেন্দ্র O এবং জ্যা AB; AB জ্যা-এর উপর অবস্থিত একাধিক বিন্দুর সঙ্গে কেন্দ্র O যোগ করলাম এবং একাধিক নানান দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশ পেলাম।

**19** কিন্তু এই একাধিক দূরত্বের মধ্যে কোনটিকে ‘কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB-এর দূরত্ব’ বলব?

এদের মধ্যে যে সরলরেখাংশটি কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB-এর উপর লম্ব তার দৈর্ঘ্যকে কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB-এর দূরত্ব বা **লম্ব দূরত্ব** (Perpendicular Distance) বলা হয়।




**20** আমি একাধিক জ্যা আঁকা অন্য একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্র নিয়ে বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যাগুলির লম্ব দূরত্ব মাপি ও কী পাই দেখি।

O কেন্দ্রীয় বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB, CD ও EF-এর উপর লম্বদূরত্ব যথাক্রমে OP, OQ ও ☐ পেয়েছি। [পাশের ছবি দেখে লিখি]

দেখছি, বৃত্তের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পেলে কেন্দ্র থেকে লম্বদূরত্ব ☐ [বৃদ্ধি / হ্রাস] পাবে।

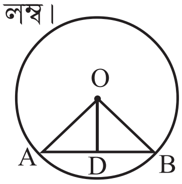
আরও দেখছি, বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা অর্থাৎ ☐ বৃত্তের কেন্দ্রগামী,

$\therefore$ সেক্ষেত্রে কেন্দ্র থেকে লম্বদূরত্ব শূন্য।   সুতরাং, পেলাম, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাসের লম্বদূরত্ব ☐।

***যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,***

**উপপাদ্য : 32.** ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর বৃত্তের কেন্দ্র থেকে লম্ব অঙ্কন করা হলে, ওই লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

**প্রদত্ত :** O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা এবং OD, AB জ্যা-এর উপর লম্ব।




**প্রমাণ করতে হবে :** OD, AB জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে অর্থাৎ $AD = DB$

**অঙ্কন :** O, A এবং O, B যুক্ত করি।

**প্রমাণ :** OD, AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

সুতরাং, $\Delta ODA$ ও $\Delta ODB$ সমকোণী।

$\therefore$ সমকোণী $\Delta ODA$ ও $\Delta ODB$ তে $\angle ODA = \angle ODB$ (প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ)

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ],এবং OD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta ODA \cong \Delta ODB$ [R-H-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore AD = DB$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ] [প্রমাণিত]

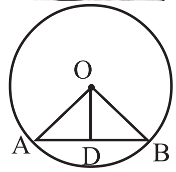
**প্রয়োগ : 3.** আমি A কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা PQ আঁকি। A থেকে PQ-এর উপর AM লম্ব আঁকি। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে PM = MQ **[নিজে এঁকে প্রমাণ করি]**

আমরা প্রমাণ করেছি যে ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর বৃত্তের কেন্দ্র থেকে লম্ব অঙ্কন করলে সেই লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(21) কিন্তু এই উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য কি সম্ভব? অর্থাৎ কোনো বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ জ্যা-এর মধ্যবিন্দু ও বৃত্তের কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখাংশ কি ওই জ্যা-এর উপর লম্ব হবে?

### হাতেকলমে

(i) প্রথমে O কেন্দ্রীয় বৃত্ত এঁকে বৃত্তাকার ক্ষেত্র কেটে নিলাম। ওই বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা AB আঁকলাম।




(ii) হাতেকলমে কাগজ ভাঁজ করে AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু নির্ণয়ের জন্য বৃত্তক্ষেত্রাকার কাগজটির AB জ্যা-কে এমনভাবে ভাঁজ করলাম যাতে A বিন্দু B বিন্দুর সঙ্গে মিশে যায়। ভাঁজ খুলে দিলাম এবং ভাঁজটি AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করল এবং ভাঁজটি O বিন্দুগামী হল। অর্থাৎ কেন্দ্র O এবং AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু D-এর সংযুক্ত সরলরেখাংশ AB জ্যা-এর উপর লম্ব।

$\therefore$ OD $\perp$ AB

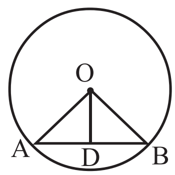
$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-কে যদি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুগামী কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহলে ওই সরলরেখা ওই জ্যা-এর উপর লম্ব হবে।

### *যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি,*

**উপপাদ্য : 33.** প্রমাণ করি যে ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-কে যদি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুগামী কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহলে ওই সরলরেখা ওই জ্যা-এর উপর লম্ব হবে।

**প্রদত্ত :** ধরি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা AB এবং D, AB-এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ AD=DB

**প্রমাণ করতে হবে :** OD $\perp$ AB অর্থাৎ OD, AB জ্যা-এর উপর লম্ব।




**অঙ্কন :** O, A এবং O, B যুক্ত করি।

**প্রমাণ :** $\Delta$OAD ও $\Delta$OBD তে

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

AD = DB [প্রদত্ত] [ D, AB-এর মধ্যবিন্দু]

এবং OD সাধারণ বাহু

$\therefore$ $\Delta$OAD $\cong$ $\Delta$ODB [সর্বসমতার বাহু-বাহু-বাহু (S-S-S) শর্তানুসারে]

$\therefore$ $\angle$ODA = $\angle$ODB [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ]

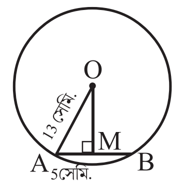
যেহেতু, OD, AB জ্যা-এর উপর দণ্ডায়মান হয়ে সমান কোণ উৎপন্ন করেছে,

সুতরাং, $\angle$ODA = $\angle$ODB = 1 সমকোণ

$\therefore$ OD $\perp$ AB [প্রমাণিত]

**প্রয়োগ : 4.** আমি সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু শর্তানুসারে $\Delta$OAD ও $\Delta$OBD সর্বসম প্রমাণ করে উপপাদ্য-33 প্রমাণ করি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 5.** নিয়ামত একটি বৃত্ত এঁকেছে যার ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 13 সেমি.। আমি এই বৃত্তে একটি 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের জ্যা AB এঁকেছি। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে এই AB জ্যা-এর দূরত্ব হিসাব করে লিখি।




ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র O; AB জ্যা-এর উপর O থেকে লম্ব OM অঙ্কন করলাম যা AB-কে M বিন্দুতে ছেদ করল।

$\therefore AM = \frac{1}{2} AB = \square$ সেমি. [$\because$ ব্যাস নয় এরকম কোনো জ্যা-এর উপর বৃত্তের কেন্দ্র থেকে লম্ব অঙ্কন করলে তা ওই জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

সমকোণী ত্রিভুজ AMO-তে

$OA^2 = AM^2 + OM^2$ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে)

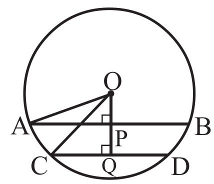
$OM^2 = OA^2 - AM^2 = (13^2 - 5^2)$ বর্গ সেমি. $\square$ বর্গ সেমি.

$\therefore OM = 12$ সেমি.

$\therefore$ পেলাম, 13 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 10 সেমি. জ্যা-এর লম্ব দূরত্ব 12 সেমি.

**প্রয়োগ : 6.** 17 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের যে জ্যা-এর কেন্দ্র থেকে দূরত্ব 8 সেমি., তার দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 7.** 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 16 সেমি. এবং 12 সেমি.। হিসাব করে দেখি, ওই দুটি জ্যা-এর মধ্যে দূরত্ব কত যদি তারা কেন্দ্রের (i) একই পার্শ্বে থাকে, (ii) বিপরীত পার্শ্বে থাকে।




(i) ধরি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. এবং AB ও CD জ্যা দুটি কেন্দ্রের একই পার্শ্বে অবস্থিত। AB ও CD-এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 16 সেমি. ও 12 সেমি.। $AB \parallel CD$

O বিন্দু থেকে CD জ্যা-এর উপর OQ লম্ব অঙ্কন করলাম যা AB জ্যা-কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু $AB \parallel CD$ এবং $OQ \perp CD$, সুতরাং $OP \perp AB$.

$\angle OPB =$ অনুরূপ $\angle OQD \quad \because \angle OQD = 90^\circ, \ \therefore \angle OPB = 90^\circ$

$\therefore AP = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 16$ সেমি. $= 8$ সেমি.

আবার $OA = 10$ সেমি.

$\therefore$ সমকোণী $\Delta APO$-তে,

$OP^2 = OA^2 - AP^2 = (10^2 - 8^2)$ বর্গ সেমি. $= \square$ বর্গ সেমি.

$\therefore OP = 6$ সেমি.

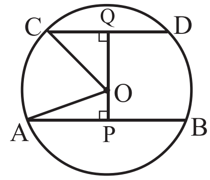
$\because \ OQ \perp CD \ \therefore CQ = \square$ **[নিজে লিখি]**

$\therefore$ সমকোণী $\Delta OCQ$ থেকে পেলাম, $OQ = \square$ [একইভাবে নিজে হিসাব করে লিখি]

$\therefore$ জ্যা AB ও CD-এর মধ্যে দূরত্ব $PQ = OQ - OP$

$= (8 - 6)$ সেমি. $= 2$ সেমি.

(ii) কিন্তু AB ও CD জ্যা দুটি যদি বৃত্তের কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে থাকত,
সেক্ষেত্রে AB ও CD জ্যা দুটির দূরত্ব $= PQ$
$= OP + OQ = (6 + 8)$ সেমি.
$= 14$ সেমি.



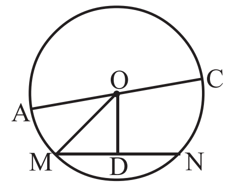

**প্রয়োগ : 8.** 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে 8 সেমি. ও 6 সেমি. দৈর্ঘ্যের দুটি সমান্তরাল জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। জ্যা দুটির মধ্যের দূরত্ব হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 9.** প্রমাণ করি, ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

**প্রদত্ত :** O কেন্দ্রীয় বৃত্তে MN ব্যাস নয় এমন যে-কোনো একটি জ্যা এবং AC একটি ব্যাস।

**প্রমাণ করতে হবে:** $AC > MN$ অর্থাৎ ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

**অঙ্কন :** কেন্দ্র O থেকে জ্যা MN-এর উপর OD লম্ব অঙ্কন করি। O, M যুক্ত করি।




**প্রমাণ :** $OM > MD$ [$\because$ OMD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং OM অতিভুজ]
বা, $OA > MD$ [$\because OA = OM$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
বা, $\frac{1}{2} AC > \frac{1}{2} MN$
বা, $AC > MN$
$\therefore$ ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা। **(প্রমাণিত)**

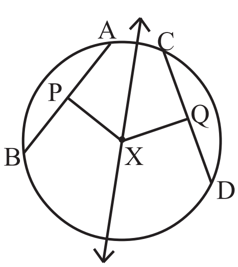
ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর। এই উপপাদ্যের সাহায্যে প্রয়োগ - 9 প্রমাণ করার চেষ্টা করি।

আমার বন্ধু মেরি X কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তে দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD এঁকেছে।

আমি X কেন্দ্র থেকে সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা AB ও CD-এর উপর দুটি লম্ব XP ও XQ অঙ্কন করলাম।

আমি হাতেকলমে কাগজ ভাঁজ করে XP ও XQ-এর মধ্যে সম্পর্ক খুঁজি।

**হাতেকলমে**




(i) একটি ট্রেসিং-পেপারে উপরের মতো X কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে দুটি সমান জ্যা AB ও CD এঁকে কেন্দ্র X থেকে দুটি লম্ব XP ও XQ টানলাম।

(ii) এবার ট্রেসিং-পেপারের বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি কেটে নিয়ে দু-ভাঁজ করলাম যাতে A বিন্দু C বিন্দুর সঙ্গে এবং B বিন্দু D বিন্দুর সঙ্গে মিশে যায়।

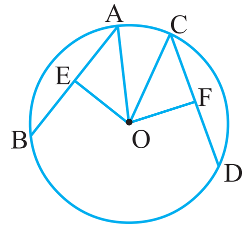
দেখছি, P বিন্দুর সঙ্গে Q বিন্দু মিশে গেছে এবং ভাঁজ খুলে দেখছি ভাঁজটি X বিন্দু দিয়ে গেছে।

$\therefore$ পেলাম $XP = XQ$

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা দুটি কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

**প্রয়োগ : 10.** যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, কোনো বৃত্তের দুটি সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

**প্রদত্ত :** O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা। কেন্দ্র O থেকে AB ও CD-এর দূরত্ব যথাক্রমে OE ও OF অর্থাৎ $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$




**প্রমাণ করতে হবে:** OE = OF

**অঙ্কন :** O, A ও O, C যুক্ত করলাম।

**প্রমাণ :** $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$ [প্রদত্ত]

$\therefore AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$ [যেহেতু, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-এর উপর লম্ব জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

আবার, AB = CD [প্রদত্ত]

$\therefore AE = CF$ ..... (i)

$\therefore$ সমকোণী $\Delta AEO$ ও সমকোণী $\Delta OFC$ -তে $\angle OEA = \angle OFC$ (প্রত্যেকটি সমকোণ)

অতিভুজ OA = অতিভুজ OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

AE = CF [(i) থেকে পাই]

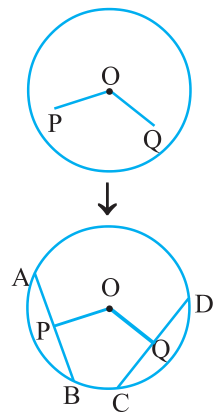
$\Delta AEO \cong \Delta CFO$ [R-H-S সর্বসমতার শর্তানুসারে]

$\therefore OE = OF$ **[প্রমাণিত]**

হাতেকলমে যাচাই করলাম ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করলাম যে, বৃত্তের দুটি সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

কিন্তু এর বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ কোনো বৃত্তের দুটি জ্যা কেন্দ্র থেকে সমান দূরত্বে থাকলে জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য কি সমান হবে? হাতেকলমে যাচাই করি ও যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি।

### হাতেকলমে




(i) একটি ট্রেসিং পেপারে O কেন্দ্রীয় বৃত্তে দুটি সমান রেখাংশ OP এবং OQ আঁকলাম। এবার দুটি জ্যা AB ও CD আঁকলাম যাতে $AB \perp OP$ এবং $CD \perp OQ$ হয়।

(ii) এবার বৃত্তাকার ক্ষেত্রবিশিষ্ট কাগজটি কেটে নিয়ে O বিন্দু বরাবর দু-ভাঁজ করলাম যাতে P বিন্দু Q বিন্দুর উপর সমাপতিত হয়। কিন্তু দেখছি AB জ্যা , CD জ্যা-এর উপর সমাপতিত হয়েছে।

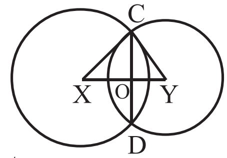
$\therefore$ পেলাম AB = CD

$\therefore$ হাতেকলমে পেলাম, বৃত্তের দুটি জ্যা-এর কেন্দ্র থেকে দূরত্ব সমান হলে জ্যা দুটির দৈর্ঘ্যও সমান হবে। **(যুক্তি দিয়ে নিজে প্রমাণ করি)**

**প্রয়োগ : 11.** প্রমাণ করি যে বৃত্তের কোনো জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক ওই বৃত্তের কেন্দ্রগামী। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 12.** প্রমাণ করি, একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুই-এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 13.** যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করি যে, তাদের কেন্দ্রদুটি তাদের সাধারণ জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর আছে।




**প্রদত্ত :** X ও Y কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদুটি পরস্পরকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং CD উহাদের সাধারণ জ্যা।

**প্রমাণ করতে হবে:** X ও Y বিন্দু দুটি সাধারণ জ্যা CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর আছে।

**অঙ্কন :** X বিন্দু থেকে CD-এর উপর XO লম্ব অঙ্কন করলাম। O এবং Y বিন্দু দুটি যোগ করলাম।

**প্রমাণ :** X কেন্দ্রীয় বৃত্তের CD জ্যা এবং $XO \perp CD$

$\therefore$ O, CD-এর মধ্যবিন্দু।

আবার, Y কেন্দ্রীয় বৃত্তের CD জ্যা এবং O, CD-এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore OY \perp CD$

যেহেতু কোনো সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটিমাত্র লম্ব অঙ্কন সম্ভব,

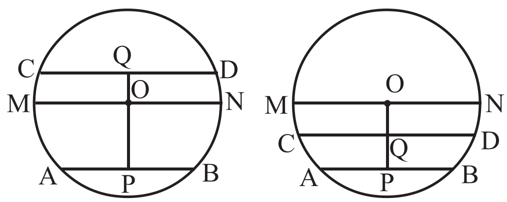
সুতরাং, XO ও OY একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সুতরাং, XY সাধারণ জ্যা CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয় X ও Y তাদের সাধারণ জ্যা CD-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর আছে।

[প্রমাণিত]

**প্রয়োগ : 14.** আমি যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে, কোনো বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রবিন্দুগামী।




**প্রদত্ত :** ধরি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি জ্যা AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল এবং AB ও CD-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q

**প্রমাণ করতে হবে:** PQ, O বিন্দুগামী

**অঙ্কন :** O, P এবং O, Q যুক্ত করলাম এবং O বিন্দু দিয়ে AB ও CD-এর সমান্তরাল সরলরেখাংশ MN অঙ্কন করলাম।

**প্রমাণ :** P, AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু। $\therefore OP \perp AB$

আবার $AB \parallel MN$, $\therefore OP \perp MN$

অনুরূপে, $OQ \perp CD$ [$\because$ Q, CD-এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore OQ \perp MN$ [$\because MN \parallel CD$]

$\therefore$ OP ও OQ উভয়েই O বিন্দুতে MN-এর উপর লম্ব।

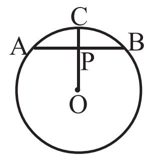
যেহেতু একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটিমাত্র লম্ব অঙ্কন করা যায়,

সুতরাং, P, O ও Q সমরেখ।

$\therefore$ PQ, বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুগামী। [প্রমাণিত]

## কষে দেখি 3.2

1. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং AB একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 8 সেমি.। O বিন্দু থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব হিসাব করে লিখি।
2. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য 26 সেমি.। O বিন্দু থেকে PQ জ্যা-এর দূরত্ব 5 সেমি.। PQ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
3. O কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের PQ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 4 সেমি. এবং O বিন্দু থেকে PQ-এর দূরত্ব 2.1 সেমি.। বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. O কেন্দ্রীয় বৃত্তে 6 সেমি. ও 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের দুটি জ্যা। যদি ছোটো দৈর্ঘ্যের জ্যাটির বৃত্তের কেন্দ্র থেকে দূরত্ব 4 সেমি. হয়, তাহলে অপর জ্যাটির কেন্দ্র থেকে দূরত্ব কত তা হিসাব করে লিখি।
5. যদি কোনো বৃত্তের একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 48 সেমি. এবং কেন্দ্র থেকে ওই জ্যা-এর দূরত্ব 7 সেমি. হয়, তবে ওই বৃত্তের কেন্দ্র থেকে যে জ্যা-এর দূরত্ব 20 সেমি., সেই জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কত হবে তা হিসাব করে লিখি।
6. পাশের O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছবিতে $OP \perp AB$; AB = 6 সেমি. এবং PC = 2 সেমি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।




7. একটি সরলরেখা দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের একটিকে A ও B বিন্দুতে এবং অপরটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। যুক্তি দিয়ে প্রমাণ করি যে AC = DB
8. প্রমাণ করি, কোনো বৃত্তের দুটি পরস্পরছেদি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করতে পারে না, যদি না উভয়েই বৃত্তের ব্যাস হয়।
9. X ও Y কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। XY-এর মধ্যবিন্দু S-এর সঙ্গে A বিন্দু যুক্ত করলাম এবং A বিন্দু দিয়ে SA-এর উপর লম্ব অঙ্কন করলাম যা বৃত্ত দুটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করল। প্রমাণ করি যে PA = AQ.
10. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের 10 সেমি. ও 24 সেমি. দৈর্ঘ্যের দুটি সমান্তরাল জ্যা AB এবং CD কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। যদি AB ও CD-জ্যা দুটির মধ্যে দূরত্ব 17 সেমি. হয়, তবে হিসাব করে বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য লিখি।

> উত্তর সংকেত : ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য r সেমি. এবং বৃত্তের কেন্দ্র থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব x সেমি.।
> $\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে CD জ্যা-এর দূরত্ব (17 – x) সেমি.। $\therefore r^2 = x^2 + 5^2$ এবং $r^2 = (17-x)^2 + (12)^2$,
> সুতরাং, $x^2 + 5^2 = (17 - x)^2 + 12^2 \;\therefore x = 12$

11. দুটি বৃত্তের কেন্দ্র P এবং Q; বৃত্ত দুটি A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু দিয়ে PQ সরলরেখাংশের সমান্তরাল সরলরেখা বৃত্ত দুটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করি যে, CD = 2PQ
12. একটি বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুটি সমান। প্রমাণ করি যে, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।
13. একটি বৃত্তের দুটি পরস্পরচ্ছেদী জ্যা-এর অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক যদি কেন্দ্রগামী হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে, জ্যা দুটি সমান।
14. প্রমাণ করি, একটি বৃত্তে দুটি জ্যা-এর মধ্যে যে জ্যাটি কেন্দ্রের নিকটবর্তী সেটির দৈর্ঘ্য অপর জ্যা-টির দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।
15. একটি বৃত্তের ভিতর যে-কোনো বিন্দু দিয়ে ক্ষুদ্রতম জ্যা কোনটি হবে তা প্রমাণ করে লিখি।

16. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান। $\angle AOB = 60^o$ হলে, $\angle COD$-এর মান
(a) $40^o$ (b) $30^o$ (c) $60^o$ (d) $90^o$

(ii) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 13 সেমি. এবং বৃত্তের একটি জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 10 সেমি.। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যা-এর দূরত্ব (a) 12.5 সেমি. (b) 12 সেমি. (c) $\sqrt{69}$ সেমি. (d) 24 সেমি.

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা। O বিন্দু থেকে AB জ্যা-এর দূরত্ব 4 সেমি. হলে, CD জ্যা-এর দূরত্ব (a) 2 সেমি. (b) 4 সেমি. (c) 6 সেমি. (d) 8 সেমি.

(iv) AB ও CD দুটি সমান্তরাল জ্যা-এর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 16 সেমি.। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হলে, জ্যা দুটির মধ্যে দূরত্ব (a) 12 সেমি. (b) 16 সেমি. (c) 20 সেমি. (d) 5 সেমি.

(v) দুটি সমকেন্দ্রীয় বৃত্তের কেন্দ্র O; একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। AC = 5 সেমি. হলে BD-এর দৈর্ঘ্য (a) 2.5 সেমি. (b) 5 সেমি. (c) 10 সেমি. (d) কোনটিই নয়।

(B) সত্য / মিথ্যা লিখি :

(i) তিনটি সমরেখ বিন্দু দিয়ে যায় এরকম একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

(ii) ABCDA ও ABCEA বৃত্ত দুটি একই বৃত্ত।

(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB এবং AC জ্যা দুটি OA ব্যাসার্ধের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হলে, $\angle OAB = \angle OAC$

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে PQ ও RS জ্যা দুটির দৈর্ঘ্যের অনুপাত 1:1 হলে, $\angle POQ : \angle ROS =$ ______

(ii) বৃত্তের কোনো জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক ওই বৃত্তের ______।

17. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.) :**

(i) 10 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের দুটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করে এবং তাদের সাধারণ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 12 সেমি.। বৃত্ত দুটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করি।

(ii) 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তে AB এবং AC দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা। বৃত্তের কেন্দ্র ABC ত্রিভুজের বাইরে অবস্থিত। AB = AC = 6 সেমি. হলে, BC জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

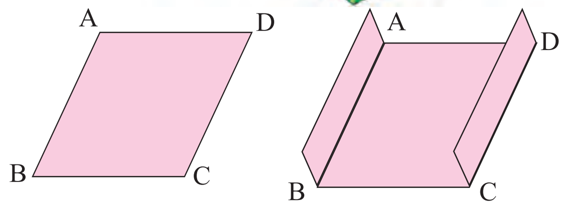
(iii) O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য সমান। $\angle AOB = 60^\circ$ এবং CD = 6 সেমি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য কত তা নির্ণয় করি।

(iv) O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ভিতর P যে-কোনো একটি বিন্দু। বৃত্তের ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং OP = 3 সেমি. হলে, P বিন্দুগামী যে জ্যাটির দৈর্ঘ্য ন্যূনতম তা নির্ণয় করি।

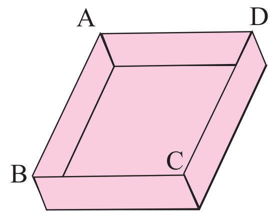
(v) P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু দিয়ে PQ-এর সমান্তরাল সরলরেখা বৃত্তদুটিকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। PQ = 5 সেমি. হলে, CD-এর দৈর্ঘ্য কত তা নির্ণয় করি।

# 4 আয়তঘন
## Rectangular Parallelopiped or Cuboid

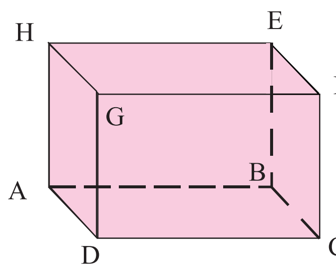
বাড়ির 'First Aid' বাক্সটি নষ্ট হয়ে গেছে। একটি নতুন 'First Aid' বাক্স তৈরি করতে হবে। তাই আজ ছুটির দিনের দুপুরে বাড়ির ছাদে আমরা ভাই বোনেরা সকলে মিলে জড়ো হয়েছি। প্রথমে একটি বাক্স তৈরির চেষ্টা করি।




আমরা প্রথমে একটি পিচবোর্ডের আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো ABCD কেটে নিলাম। সাথি অন্য দুটি একই মাপের অর্থাৎ AB দৈর্ঘ্য এবং যে-কোন প্রস্থ বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো কেটে পাশের ছবির মতো আটকে দিল।




শাকিলও সাথির মতো AD দৈর্ঘ্য ও আগের মাপের প্রস্থ বিশিষ্ট অন্য দুটি আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো কেটে পাশের চিত্রের মতো আটকে দিল।




(i)

আমি ABCD আয়তক্ষেত্রাকার টুকরোর সমান মাপের অর্থাৎ সমান দৈর্ঘ্য ও প্রস্থবিশিষ্ট আর একটি আয়তক্ষেত্রাকার টুকরো HEFG কেটে ও ABCD তলের বিপরীতে আটকে পাশের ছবির মতো বাক্স তৈরি করলাম।

(1) এইরকম ঘনবস্তু যার তলগুলি আয়তক্ষেত্রাকার এবং বিপরীত তলগুলি সমান মাপের এবং সন্নিহিত তলগুলি পরস্পর লম্ব তাকে কী বলা হয়?

এইরকম ঘনবস্তু যার প্রতিটি তল আয়তক্ষেত্রাকার এবং বিপরীত তলগুলির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান এবং সন্নিহিত তলগুলি পরস্পরের উপর লম্ব তাকে **সমকোণী চৌপল** বা **আয়তঘন** (Rectangular parallelopiped or Cuboid) বলা হয়।

দেখছি, সমকোণী চৌপলটি ABCD আয়তক্ষেত্রাকার তলের উপর দাঁড়িয়ে আছে।

(2) এই অবস্থানে ABCD তলটিকে কী বলা হয়?

এই অবস্থানে ABCD তলটি সমকোণী চৌপলের **ভূমি (base)** এবং আয়তক্ষেত্রাকার ভূমির বাহু দুটির একটি **দৈর্ঘ্য (length)** ও অপরটি **প্রস্থ (breadth)**। বুঝেছি, (i) নং সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য = AB এবং প্রস্থ = BC

(3) কিন্তু (i) নং সমকোণী চৌপলের BE-কে কী বলা হয়?

BE (i) নং সমকোণী চৌপলের **উচ্চতা (height)**।

দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা হলো সমকোণী চৌপলের মাত্রা (dimension)।

সমকোণী চৌপলের ☐ [1টি / 2টি / 3টি] মাত্রা।

আবার দেখছি, সমকোণী চৌপলের তল ☐ [4টি / 5টি / 6টি]।

∴ সমকোণী চৌপলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Whole surface area)

= 6 টি তলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

= 2 (AB×BC + AB×BE + BC×BE)

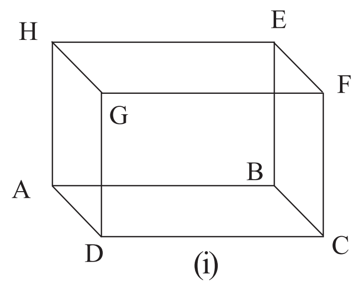
= 2 (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ + দৈর্ঘ্য × উচ্চতা + প্রস্থ × উচ্চতা)

**4** সমকোণী চৌপলের দুটি তল পরস্পরকে সরলরেখাংশে ছেদ করেছে। এই ছেদ সরলরেখাংশকে কী বলা হয়?

আয়তঘনের দুটি তলের ছেদ সরলরেখাংশকে **ধার বা প্রান্তিকী (edge)** বলা হয়।

দেখছি, আয়তঘনের 12টি **ধার**।

(i) নং আয়তঘনের ধারগুলি ছবি দেখে নিজে লিখি। [নিজে লিখি]



(i)

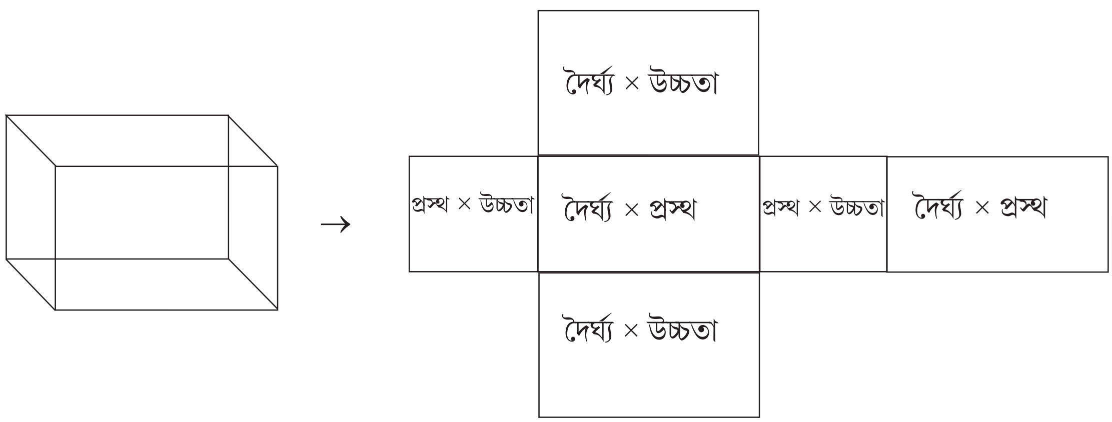
**5** আয়তঘনের ধারগুলি যে বিন্দুতে মিলিত হয়েছে তাকে কী বলা হয়?

আয়তঘনের ধারগুলি যে বিন্দুতে মিলিত হয়েছে তাকে **শীর্ষবিন্দু (Vertex)** বলা হয়।

দেখছি, আয়তঘনের ☐ [6টি / 7টি / 8টি] শীর্ষবিন্দু।

(i) নং আয়তঘনের শীর্ষবিন্দুগুলি নিজে বুঝে লিখি। [নিজে লিখি]

আমার ভাই এক মজার কাণ্ড করল। সে তার খেলনা রাখার আয়তঘনাকার বাক্সটি নিয়ে এল এবং বাক্সটির তলগুলি (Surfaces) খুলে পেল—




**প্রয়োগ : 1.** দেখছি, ভাই-এর আনা আয়তঘনাকার বাক্সের দৈর্ঘ্য 40 সেমি., প্রস্থ 25 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি.।

∴ এই আয়তঘনাকার বাক্সের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

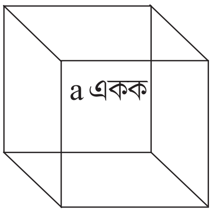
= 2 (40×25 + 40×15 + 25×15) বর্গ সেমি.

= ☐ বর্গ সেমি.

**প্রয়োগ : 2.** যে আয়তঘনাকার বাক্সের দৈর্ঘ্য 15 সেমি., প্রস্থ 12 সেমি. এবং উচ্চতা 20 সেমি. তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

আমার বন্ধু রাজিয়া তার বাড়ি থেকে একটি পিচবোর্ডের বাক্স এনেছে।

দেখছি, রাজিয়ার আনা বাক্সটির প্রতিটি তল বর্গক্ষেত্রাকার অর্থাৎ বাক্সটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান।




(6) এই ধরনের আয়তঘনকে কী বলা হয়?

যে আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান তাকে **ঘনক (Cube)** বলা হয়।

ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2 \times \{a\times a + a\times a + a\times a\}$ বর্গ একক। [যেখানে ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = a একক]

$= 2\times 3a^2$ বর্গ একক

$= 6a^2$ বর্গ একক

**প্রয়োগ : 3.** মেপে দেখছি, রাজিয়ার আনা ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 27 সেমি.।

∴ ওই ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6.(27)^2$ বর্গ সেমি. = ☐ বর্গ সেমি. **[নিজে লিখি]**

**প্রয়োগ : 4.** যে ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সেমি. সেই ঘনকটির চারপাশ রঙিন কাগজ দিয়ে মুড়তে কত বর্গ সেমি. রঙিন কাগজ লাগবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 5.** আমরা যে ঘরে বসে কাজ করছি সেই ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 7 মি., 5 মি. ও 4 মি.। ঘরটি ☐ [ঘনক আকার / আয়তঘনাকার]

ঘরটির চার দেয়াল রং করতে মোট কতটা ক্ষেত্রফল রং করতে হবে হিসাব করি।

ঘরের চার দেয়াল রং করব অর্থাৎ ঘরের মেঝে ও ছাদ রং করব না।

∴ রং করতে হবে = 2 × দৈর্ঘ্য × উচ্চতা + 2 × প্রস্থ × উচ্চতা

= 2 × 7 × 4 বর্গ মিটার + 2× 5 × 4 বর্গ মিটার

= ☐ বর্গ মিটার।

ঘরের চার দেয়ালের ক্ষেত্রফল = 2 × (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) × উচ্চতা = ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা।

**প্রয়োগ : 6.** যদি একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 150 বর্গ মিটার হয়, তবে ওই ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

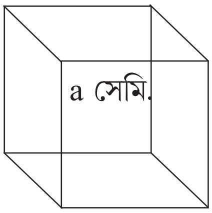
ধরি, ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a সেমি.

∴ ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $6a^2$ বর্গ সেমি.

∴ শর্তানুসারে, $6a^2 = 150$

বা, $a^2 = \frac{150}{6} =$ ☐

∴ $a = \pm 5$



কিন্তু $a \neq -5$, যেহেতু দৈর্ঘ্য সর্বদা ধনাত্মক হয়। ∴ $a = 5$; সুতরাং ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি.।

**প্রয়োগ : 7.** যদি একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 486 বর্গ মিটার হয়, তবে ওই ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করি। **[নিজে করি]**

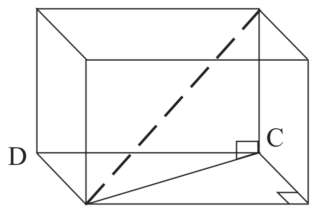
আমরা একটি 'First Aid' বাক্স তৈরি করেছি এবং পিচবোর্ডের আয়তঘনাকার ও ঘনকাকার বাক্সগুলি রঙিন কাগজের মোড়কে মুড়ে সাজিয়ে রেখেছি। আমরা ঠিক করেছি যে এই রঙিন বাক্সে আমাদের প্রয়োজনীয় জিনিসগুলি সাজিয়ে রাখব।

আমার ভাই তার কাঠের স্কেলগুলি একটি সবুজ রঙের আয়তঘনাকার বাক্সে রাখছে।

সবচেয়ে কত লম্বা স্কেল এই বাক্সে রাখতে পারব দেখি।

**7** আয়তঘনের কর্ণের দৈর্ঘ্য কীভাবে পাব?

ছবি এঁকে আয়তঘনের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের চেষ্টা করি।




ধরি, পাশের চিত্রের আয়তঘনের দৈর্ঘ্য = AB একক
প্রস্থ = BC একক
উচ্চতা = CE একক

সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর, $AC^2 = (AB^2 + BC^2)$ বর্গ একক ________ (i)

আবার সমকোণী ত্রিভুজ ACE-এর, $AE^2 = (AC^2 + CE^2)$ বর্গ একক
$= (AB^2 + BC^2 + CE^2)$ বর্গ একক [(i) থেকে পেলাম]

[একটি সরলরেখা কোনো সমতলের উপর লম্ব হলে লম্ব সরলরেখাটি সমতলকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই ছেদবিন্দুগামী এবং ওই সমতলে অবস্থিত যে-কোনো সরলরেখার উপর পূর্বোক্ত সরলরেখাটি লম্ব হবে। চিত্রে EC সরলরেখাংশটি ABCD সমতলের উপর লম্ব। সুতরাং EC সরলরেখাংশটি CB, CD ও CA সরলরেখাংশ তিনটির উপর C বিন্দুতে লম্ব। তাই, $\angle ACE = 90^\circ$]

$\therefore AE = \sqrt{AB^2+BC^2+CE^2}$ একক

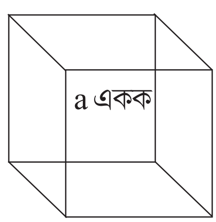
$\therefore$ আয়তঘনের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\text{দৈর্ঘ্য}^2 + \text{প্রস্থ}^2 + \text{উচ্চতা}^2}$

**প্রয়োগ : 8.** আয়তঘনাকার বাক্সের দৈর্ঘ্য 20 সেমি., প্রস্থ 15 সেমি. এবং উচ্চতা 10 সেমি. হলে তার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত হবে ?

কর্ণের দৈর্ঘ্য হবে $= \sqrt{20^2+15^2+10^2}$ সেমি. $= 5\sqrt{29}$ সেমি.।

অর্থাৎ সেক্ষেত্রে সবচেয়ে $5\sqrt{29}$ সেমি. দৈর্ঘ্যের লম্বা স্কেল ওই আয়তঘনাকার বাক্সে রাখতে পারব।

**8** কিন্তু ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য কী হবে হিসাব করে দেখি।




ধরি, ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক।

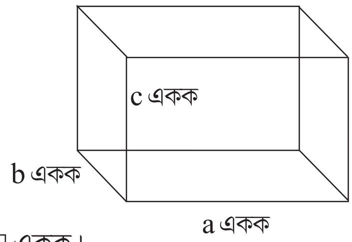
$\therefore$ ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+a^2+a^2}$ একক $= \sqrt{3}\ a$ একক

$\therefore$ ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \times$ বাহুর দৈর্ঘ্য।

$\therefore$ 5 সেমি. দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{3} \times 5$ সেমি. $= 5\sqrt{3}$ সেমি.।

**প্রয়োগ : 9.** একটি আয়তঘনাকৃতি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে a, b এবং c একক এবং $a+b+c = 25$, $ab+bc+ca = 240.5$ হলে, ঘরের মধ্যে যে বৃহত্তম দৈর্ঘ্যের দণ্ডটি রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

ঘরের দৈর্ঘ্য = a একক, প্রস্থ = b একক, উচ্চতা = c একক হলে, ঘরের মধ্যে যে বৃহত্তম দৈর্ঘ্যের দণ্ডটি রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য = ঘরটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক




$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2 \times$ ☐ [নিজে লিখি]

বা, $25^2 = a^2+b^2+c^2 + 2 \times 240.5$

$\therefore a^2+b^2+c^2 = 625 - 481 =$ ☐

$\therefore$ ঘরটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক $= \sqrt{144}$ একক = ☐ একক।

**প্রয়োগ : 10.** আমি মিতার তৈরি দুটি ঘনক, যাদের প্রত্যেকটির ধার 8 সেমি. দৈর্ঘ্যের, পাশাপাশি যুক্ত করে একটি আয়তঘন তৈরি করলাম। এইভাবে তৈরি আয়তঘনের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করি। [নিজে করি]

> **উত্তর সংকেত :** দুটি ঘনক পাশাপাশি যুক্ত করে তৈরি করা আয়তঘনের দৈর্ঘ্য = (8+8) সেমি. = 16 সেমি., প্রস্থ = 8 সেমি., উচ্চতা = 8 সেমি.

আমার বন্ধু তথাগত একটি একমুখ খোলা আয়তঘনাকার টিনের বাক্সের চারধার রং করেছে। সে ঠিক করেছে এই টিনের বাক্সে বালি ভর্তি করে ছাদের এককোণে রেখে দেবে। বাড়ির নানান কাজে বালির প্রয়োজন হয়।

(9) কিন্তু এই আয়তঘনাকার বাক্সে কতটা পরিমাণ বালি ধরবে কীভাবে পাব?

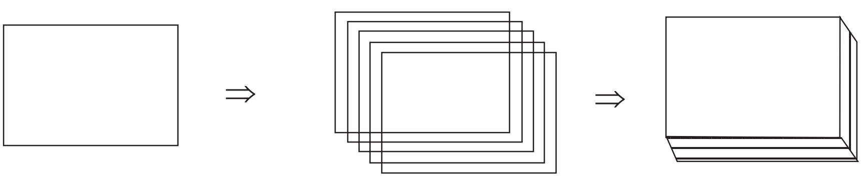
এই আয়তঘনাকার টিনের বাক্সের আয়তন-এর সমান পরিমাণ বালি এই আয়তঘনাকার বাক্সে ধরবে।

(10) এই আয়তন (Volume) কী? আয়তঘনের আয়তন কীভাবে পরিমাপ করব?

কোনো ঘনবস্তু যে পরিমাণ জায়গা জুড়ে থাকে তাকে ওই ঘনবস্তুর **আয়তন** বলা হয়।

আয়তঘনের আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

আমি অনেকগুলি একইমাপের আয়তক্ষেত্রাকার পিচবোর্ডের তল জড়ো করে একটির উপর অপরটি চাপিয়ে আয়তঘনক তৈরির চেষ্টা করলাম এবং দেখলাম, আয়তঘনের যতই উচ্চতা বাড়ছে ততই আয়তঘনের আয়তন ☐ [বাড়ছে / কমছে]।



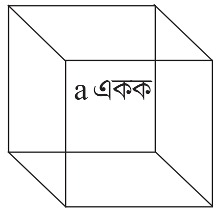
একটি আয়তক্ষেত্রাকার পিচবোর্ডের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।

$\therefore$ লিখতে পারি আয়তঘনের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল (area of the base) × উচ্চতা (height)

**প্রয়োগ : 11.** মেপে দেখছি ওই আয়তঘনাকার কৌটোর দৈর্ঘ্য 32 সেমি., প্রস্থ 21 সেমি. এবং উচ্চতা 15 সেমি.।

∴ ওই টিনে বালি ধরবে = $(32\times21\times15)$ ঘন সেমি.= $\square$ ঘন সেমি.

(11) কিন্তু যদি ওই টিনের কৌটোর প্রতিটি ধার সমান দৈর্ঘ্যের হতো তখন আয়তন কীভাবে পরিমাপ করতাম অর্থাৎ ঘনকের আয়তন কীভাবে পাব হিসাব করে দেখি।




ধরি, ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য a একক।

∴ ঘনকের আয়তন = $(a\times a\times a)$ ঘন একক = $a^3$ ঘন একক।

∴ ঘনকের আয়তন = (একটি বাহুর দৈর্ঘ্য)$^3$

**প্রয়োগ : 12.** যে ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি., তার আয়তন $\square^3$ ঘন সেমি.= $\square$ ঘন সেমি. [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 13.** একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তনের সাংখ্যমান (numerical value) সমান হলে কর্ণের দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।

ধরি, ঘনকের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = a একক।

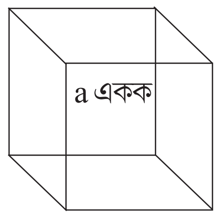
∴ ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $6a^2$ বর্গ একক এবং ঘনকের আয়তন = $a^3$ ঘন একক।

শর্তানুসারে, $a^3 = 6a^2$

বা, $a^3 - 6a^2 = 0$

বা, $a^2(a-6) = 0$

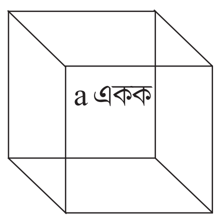
বা, $a - 6 = 0$ $[\because a \neq 0]$ $\therefore a = 6$




∴ ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{3}\times$ একটি ধারের দৈর্ঘ্য = $6\sqrt{3}$ একক.

**প্রয়োগ : 14.** একটি আয়তঘনের মাত্রাগুলি যথাক্রমে 12 সেমি., 6 সেমি. ও 3 সেমি.। ওই আয়তঘনের সমান আয়তনের একটি ঘনকের প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।

আয়তঘনের আয়তন = $(12\times6\times3)$ ঘন সেমি. = $(6\times2\times6\times3)$ ঘন সেমি. = $6^3$ ঘন সেমি.




ধরি, ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য a সেমি.।

∴ ঘনকের আয়তন = $a^3$ ঘন সেমি.।

শর্তানুসারে, $a^3 = 6^3$ $\therefore a = 6$

∴ ঘনকের প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য 6 সেমি.।

**প্রয়োগ : 15.** যদি একটি সমকোণী চৌপল আকারের ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও আয়তন যথাক্রমে 8 মি., 6 মি. এবং 192 ঘন মিটার হয়, তবে ঘরের উচ্চতা এবং চার দেয়ালের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।

ধরি, ঘরের উচ্চতা = h মিটার

∴ ঘরের আয়তন = $(8\times6\times h)$ ঘন মি.

শর্তানুসারে, $8\times6\times h = 192$

∴ h = $\square$ [নিজে হিসাব করে লিখি]

∴ ঘরের উচ্চতা 4 মিটার।

∴ ঘরের চার দেয়ালের ক্ষেত্রফল = 2 × (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) × উচ্চতা= $\square$ [নিজে হিসাব করে লিখি]

**প্রয়োগ : 16.** যদি কোনো ঘনকের একটি তলের ক্ষেত্রফল, অপর একটি ঘনকের একটি তলের ক্ষেত্রফলের 4 গুণ হয়, তবে প্রথম ঘনকটির ঘনফল দ্বিতীয় ঘনকটির ঘনফলের কতগুণ হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, প্রথম ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য = x একক এবং দ্বিতীয় ঘনকের একটি ধারের দৈর্ঘ্য = y একক।

$\therefore$ প্রথম ঘনকের 1 টি তলের ক্ষেত্রফল $x^2$ বর্গ একক এবং দ্বিতীয় ঘনকের 1 টি তলের ক্ষেত্রফল $y^2$ বর্গ একক।

শর্তানুসারে, $x^2 = 4y^2 \quad \therefore x = 2y \;\; [\because x \neq -2y]$

সুতরাং, $\dfrac{\text{প্রথম ঘনকের ঘনফল}}{\text{দ্বিতীয় ঘনকের ঘনফল}} = \dfrac{x^3}{y^3} = \dfrac{(2y)^3}{y^3} = \dfrac{8y^3}{y^3} = 8 \;\; [\because y \neq 0]$

$\therefore$ প্রথম ঘনকের ঘনফল = 8 × দ্বিতীয় ঘনকের ঘনফল।

সুতরাং, প্রথম ঘনকের ঘনফল দ্বিতীয় ঘনকের ঘনফলের 8 গুণ।

**প্রয়োগ : 17.** পাশের গ্রামের একটি আয়তাকার জলাধারের জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 18 মিটার ও 11 মিটার। সেই জলাধারে পাশের পুকুর থেকে একটি পাম্প দিয়ে জলসেচ করা হচ্ছে। পাম্পটি যদি ঘণ্টায় 39600 লিটার জলসেচ করতে পারে, তবে পাম্পটি কতক্ষণ চললে জলাধারটিতে 3.5 ডেসিমিটার উচ্চতার জল জমা হবে তা হিসাব করে লিখি। [1 লিটার = 1 ঘন ডেসিমিটার]

আয়তাকার জলাধারে 3.5 ডেসিমিটার গভীর জল জমা হলে সেই জলের আয়তন হবে (180×110×3.5) ঘন ডেসিমিটার [$\because$ 18 মিটার = 180 ডেসিমি., 11 মিটার = 110 ডেসিমি.]

= (180×110×3.5) লিটার [যেহেতু 1 লিটার = 1 ঘন ডেসিমি.]

পাম্পটি ঘণ্টায় 39600 লিটার জল ভর্তি করে।

$\therefore$ পাম্পটি চালাতে হবে $\dfrac{180\times110\times3.5}{39600}$ ঘণ্টা = $\square$ ঘণ্টা $\square$ মিনিট।

**প্রয়োগ : 18.** যদি পাম্পটি ঘণ্টায় 37400 লিটার জলভর্তি করতে পারত, তাহলে 18 মিটার দীর্ঘ ও 11 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট আয়তাকার জলাধারে 17 ডেসিমিটার উচ্চতার জল ভরার জন্য পাম্পটিকে কতক্ষণ চালাতে হতো হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 19.** 4 মিটার লম্বা, 5 ডেসিমি. চওড়া এবং 3 ডেসিমি. পুরু একটি কাঠের লগ থেকে 2 মিটার লম্বা, 2 ডেসিমি. চওড়া, 40টি তক্তা চেরাই করা হলো। চেরাই-এর ফলে 2% কাঠ নষ্ট হয়েছে। কিন্তু এখনও লগটিতে 108 ঘন ডেসিমি. কাঠ রয়ে গেছে। প্রতিটি তক্তা কতটা পুরু করে চেরাই করা হয়েছিল তা হিসাব করে লিখি।

লগটিতে কাঠ ছিল = ($\square$ × $\square$ × $\square$) ঘন ডেসিমি. = 600 ঘন ডেসিমি.

কাঠ নষ্ট হয়েছে = 600 × $\dfrac{2}{100}$ ঘন ডেসিমি. = 12 ঘন ডেসিমি.

ধরি প্রতিটি তক্তা x ডেসিমি. পুরু।

$\therefore$ 1 টি তক্তায় কাঠ আছে (20×2×x) ঘন ডেসিমি.

$\therefore$ 40 টি তক্তায় কাঠ আছে 40×(20×2×x) ঘন ডেসিমি. = 1600x ঘন ডেসিমি.।

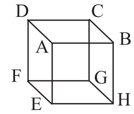
চেরাই করার পরে লগটিতে কাঠ পড়ে রয়েছে 108 ঘন ডেসিমি.।

শর্তানুসারে, 1600x + 108 + 12 = 600

$\therefore$ x = $\square$ [নিজে হিসাব করে লিখি]

$\therefore$ প্রতিটি তক্তা 0.3 ডেসিমি. বা 3 সেমি. পুরু করে চেরাই করা হয়েছিল।

## কষে দেখি 4




1. আমরা পরিবেশের 4 টি আয়তঘনাকার ও 4 টি ঘনক আকার বস্তুর নাম লিখি।
2. পাশের আয়তঘনাকার চিত্রের তলগুলি, ধারগুলি ও শীর্ষবিন্দুগুলির নাম লিখি।
3. একটি সমকোণী চৌপলাকার ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 5 মি., 4 মি. ও 3 মি. হলে, ওই ঘরে সবচেয়ে লম্বা যে দণ্ড রাখা যাবে তার দৈর্ঘ্য হিসাব করে লিখি।
4. একটি ঘনকের একটি তলের ক্ষেত্রফল 64 বর্গ মিটার হলে, ঘনকটির আয়তন হিসাব করে লিখি।
5. আমাদের বকুলতলা গ্রামে 2 মিটার চওড়া এবং 8 ডেসিমি. গভীর একটি খাল কাটা হয়েছে। যদি মোট 240 ঘন মিটার মাটি কাটা হয়ে থাকে তবে খালটি কত লম্বা হিসাব করে লিখি।
6. একটি ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ সেমি. হলে, ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হিসাব করে লিখি।
7. একটি ঘনকের ধারগুলির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি 60 সেমি. হলে, ঘনকটির ঘনফল হিসাব করে লিখি।
8. যদি একটি ঘনকের ছয়টি পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 216 বর্গ সেমি. হয়, তবে ঘনকটির আয়তন কত হবে হিসাব করে লিখি।
9. একটি সমকোণী চৌপলের আয়তন 432 ঘন সেমি.। তাকে সমান আয়তনবিশিষ্ট দুটি ঘনক-এ পরিণত করা হলে, প্রতিটি ঘনকের প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য কত হবে হিসাব করে লিখি।
10. একটি ঘনকের প্রতিটি বাহুকে 50% কমানো হলো। মূল ঘনক ও পরিবর্তিত ঘনকের ঘনফলের অনুপাত কী হবে হিসাব করে লিখি।
11. একটি সমকোণী চৌপল আকারের বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 3 : 2 : 1 এবং উহার আয়তন 384 ঘন সেমি. হলে, বাক্সটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত হবে হিসাব করে লিখি।
12. একটি চা-এর বাক্সের ভিতরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 7.5 ডেসিমি, 6 ডেসিমি. এবং 5.4 ডেসিমি.। চা ভর্তি বাক্সটির ওজন 52 কিগ্রা. 350 গ্রাম। কিন্তু খালি অবস্থায় বাক্সটির ওজন 3.75 কিগ্রা. হলে, 1 ঘন ডেসিমি. চা-এর ওজন কত হবে তা হিসাব করে লিখি।
13. একটি বর্গাকার ভূমিবিশিষ্ট পিতলের প্লেটের দৈর্ঘ্য x সেমি., বেধ 1 মিলিমি. এবং প্লেটটির ওজন 4725 গ্রাম। যদি 1 ঘন সেমি. পিতলের ওজন 8.4 গ্রাম হয়, তাহলে x-এর মান কত হবে তা হিসাব করে লিখি।
14. চাঁদমারির রাস্তাটি উঁচু করতে হবে। তাই রাস্তার দু-পাশে 30 টি সমান গভীর ও সমান মাপের আয়তঘনাকার গর্ত খুঁড়ে সেই মাটি দিয়ে রাস্তাটি উঁচু করা হয়েছে। যদি প্রতিটি গর্তের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 14 মি. এবং 8 মি. হয় এবং রাস্তাটি তৈরি করতে মোট 2520 ঘন মিটার মাটি লেগে থাকে, তবে প্রতিটি গর্তের গভীরতা হিসাব করে লিখি।
15. ঘনকাকৃতি একটি সম্পূর্ণ জলপূর্ণ চৌবাচ্চা থেকে সমান মাপের 64 বালতি জল তুলে নিলে চৌবাচ্চাটির $\frac{1}{3}$ অংশ জলপূর্ণ থাকে। চৌবাচ্চার একটি ধারের দৈর্ঘ্য 1.2 মিটার হলে, প্রতিটি বালতিতে কত লিটার জল ধরে তা হিসাব করে লিখি।
16. এক গ্রোস দেশলাই বাক্সের একটি প্যাকেটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 2.8 ডেসিমি., 1.5 ডেসিমি. ও 0.9 ডেসিমি. হলে, একটি দেশলাই বাক্সের আয়তন কত হবে হিসাব করি। [এক গ্রোস = 12 ডজন]

    কিন্তু যদি একটি দেশলাই বাক্সের দৈর্ঘ্য 5 সেমি. এবং প্রস্থ 3.5 সেমি. হয়, তবে তার উচ্চতা কত হবে হিসাব করে লিখি।

17. 2.1 মিটার দীর্ঘ, 1.5 মিটার প্রশস্ত একটি আয়তঘনাকার চৌবাচ্চার অর্ধেক জলপূর্ণ আছে। ওই চৌবাচ্চায় আরও 630 লিটার জল ঢাললে জলের গভীরতা কতটা বৃদ্ধি পাবে হিসাব করে লিখি।

18. গ্রামের আয়তক্ষেত্রাকার মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 20 মিটার এবং 15 মিটার। ওই মাঠের ভিতরে চারটি কোণে পিলার বসানোর জন্য 4 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট চারটি ঘনকাকৃতি গর্ত কেটে অপসারিত মাটি অবশিষ্ট জমির উপর ছড়িয়ে দেওয়া হলো। মাঠের তলের উচ্চতা কতটা বৃদ্ধি পেল হিসাব করে লিখি।

19. 48 মিটার লম্বা এবং 31.5 মিটার চওড়া একখণ্ড নীচু জমিকে 6.5 ডেসিমি. উঁচু করার জন্য ঠিক করা হয়েছে পাশের 27 মিটার লম্বা এবং 18.2 মিটার চওড়া একটি জমি গর্ত করে মাটি তোলা হবে। গর্তটি কত মিটার গভীর করতে হবে হিসাব করে লিখি।

20. বাড়ির তিনটি কেরোসিন তেলের ড্রামে যথাক্রমে 800 লিটার, 725 লিটার এবং 575 লিটার তেল ছিল। ওই তিনটি ড্রামের তেল একটি আয়তঘনাকার পাত্রে ঢালা হলো এবং এতে পাত্রে তেলের গভীরতা 7 ডেসিমি. হলো। ওই আয়তঘনাকার পাত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3 হলে, পাত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হিসাব করে লিখি।

    যদি ওই আয়তঘনাকার পাত্রের গভীরতা 5 ডেসিমিটার হতো, তবে 1620 লিটার তেল ওই পাত্রে রাখা যেত কিনা হিসাব করে দেখি।

21. আমাদের তিনতলা ফ্ল্যাটের তিনটি পরিবারের দৈনিক জলের চাহিদা যথাক্রমে 1200 লিটার, 1050 লিটার এবং 950 লিটার। এই চাহিদা মেটানোর পরও চাহিদার 25% জল মজুত থাকে এমন একটি ট্যাঙ্ক বসানোর জন্য মাত্র 2.5 মি. দীর্ঘ এবং 1.6 মিটার চওড়া একটি জায়গা পাওয়া গেছে। ট্যাঙ্কটি কত মিটার গভীর করতে হবে হিসাব করে লিখি।

    জায়গাটি যদি প্রস্থের দিকে আরও 4 ডেসিমি. বেশি হতো, তবে ট্যাঙ্কটি কতটা গভীর করতে হতো তা হিসাব করে লিখি।

22. 5 সেমি. পুরু কাঠের তক্তায় তৈরি ঢাকনাসহ একটি কাঠের বাক্সের ওজন 115.5 কিগ্রা.। কিন্তু চাল ভর্তি বাক্সটির ওজন 880.5 কিগ্রা.। বাক্সটির ভিতরের দিকের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 12 ডেসিমি. এবং 8.5 ডেসিমি. এবং এক ঘন ডেসিমি. চালের ওজন 1.5 কিগ্রা.। বাক্সটির ভিতরের উচ্চতা কত হিসাব করে লিখি। প্রতি বর্গ ডেসিমি. 1.50 টাকা হিসাবে বাক্সটির বাইরের চারিপাশ রং করতে কত খরচ পড়বে হিসাব করে লিখি।

23. 20 মি. দীর্ঘ এবং 18.5 মি. চওড়া একটি আয়তঘনাকার পুকুরে 3.2 মি. গভীর জল আছে। ঘণ্টায় 160 কিলোলিটার জলসেচ করতে পারে এমন একটি পাম্প দিয়ে কতক্ষণে পুকুরটির সমস্ত জলসেচ করা যাবে হিসাব করে লিখি। ওই জল যদি 59.2 মিটার দীর্ঘ এবং 40 মিটার চওড়া একটি আল দেওয়া ধান ক্ষেতে ফেলা হয়, তবে সেই জমিতে জলের গভীরতা কত হবে হিসাব করে লিখি। [1 ঘন মিটার = 1 কিলোলিটার]

24. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :**

    (A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.):

    (i) একটি সমকোণী চৌপলাকৃতি বাক্সের ভিতরের আয়তন 440 ঘন সেমি. এবং ভিতরের ভূমিতলের ক্ষেত্রফল 88 বর্গ সেমি.। বাক্সটির ভিতরের উচ্চতা

    (a) 4 সেমি. (b) 5 সেমি. (c) 3 সেমি. (d) 6 সেমি.

(ii) একটি আয়তঘনাকার গর্তের দৈর্ঘ্য 40 মি., প্রস্থ 12 মি. এবং গভীরতা 16 মি.। ওই গর্তের মধ্যে 5 মি. দৈর্ঘ্য, 4 মি. প্রস্থ এবং 2 মি. পুরু তক্তা রাখা যাবে

(a) 190 টি (b) 192 টি (c) 184 টি (d) 180 টি

(iii) একটি ঘনকের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল 256 বর্গ মিটার। ঘনকটির আয়তন

(a) 64 ঘন মি. (b) 216 ঘন মি. (c) 256 ঘন মি. (d) 512 ঘন মি.

[উত্তর সংকেত : পার্শ্বতলের সংখ্যা 4]

(iv) দুটি ঘনকের আয়তনের অনুপাত 1 : 27 হলে, ঘনক দুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত

(a) 1 : 3 (b) 1 : 8 (c) 1 : 9 (d) 1 : 18

(v) একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল s বর্গ একক এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য d একক হলে s এবং d-এর সম্পর্ক

(a) $s = 6d^2$ (b) $3s = 7d$ (c) $s^3 = d^2$ (d) $d^2 = \frac{S}{2}$

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) একটি ঘনকের প্রতিটি ধারের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে, ঘনকটির আয়তন প্রথম ঘনকের 4 গুণ হবে।

(ii) বর্ষার সময় 2 হেক্টর জমিতে বৃষ্টিপাত 5 সেমি. উচ্চতার হলে, বৃষ্টির জলের আয়তন 1000 ঘন মিটার।

[উত্তর সংকেত : 1 আর = 100 বর্গ মি., 1 হেক্টর = 100 আর]

(c) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) একটি সমকোণী চৌপলের কর্ণের সংখ্যা ________ টি।

(ii) একটি ঘনকের একটি তলের কর্ণের দৈর্ঘ্য = ________ × একটি ধারের দৈর্ঘ্য।

(iii) সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হলে সেই ঘনবস্তুর বিশেষ নাম ________।

25. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.) :**

(i) একটি আয়তঘনের তল সংখ্যা = x, ধার সংখ্যা = y, শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা = z এবং কর্ণের সংখ্যা = p হলে, $x - y + z + p$-এর মান কত তা লিখি।

(ii) দুটি আয়তঘনের মাত্রাগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4, 6, 4 একক এবং 8, (2h − 1), 2 একক। যদি আয়তঘন দুটির ঘনফল সমান হয়, তাহলে h-এর মান কত তা লিখি।

(iii) একটি ঘনকের প্রত্যেকটি ধারের দৈর্ঘ্য 50% বৃদ্ধি পেলে, ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি হবে তা হিসাব করে লিখি।

(iv) তিনটি নিরেট ঘনক যাদের প্রত্যেকটি ধারের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সেমি., 4 সেমি. এবং 5 সেমি.। ঘনক তিনটিকে গলিয়ে একটি নতুন নিরেট ঘনক তৈরি করা হলো। নতুন ঘনকটির একটি ধারের দৈর্ঘ্য কত হবে তা লিখি।

(v) একটি ঘরের দুটি সংলগ্ন দেয়ালের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 12 মি. এবং 8 মি.। ঘরটির উচ্চতা 4 মি. হলে, ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত তা হিসাব করে লিখি।

# 5 অনুপাত ও সমানুপাত
## RATIO AND PROPORTION

আজ সকাল থেকে তেঁতুলতলা গ্রামের বড়ো মাঠে মহিলাদের ফুটবল ম্যাচ হচ্ছে। প্রথমে ভারতী সংঘের মেয়েদের সঙ্গে নেতাজি সংঘের মেয়েদের ফুটবল ম্যাচ হচ্ছে। গ্রামের বিভিন্ন স্কুলের প্রচুর শিক্ষার্থী এই ম্যাচ দেখতে মাঠে এসেছে।

দেখছি, এই ফুটবল ম্যাচের দর্শকদের মধ্যে 60% ছাত্র এবং 40% ছাত্রী আছে।

আমি ও সুজয় মাঠে উপস্থিত ছাত্র ও ছাত্রীদের সংখ্যার অনুপাত (ratio) গঠন করে সমজাতীয় রাশির তুলনা করি।

ছাত্রদের সংখ্যা : ছাত্রীদের সংখ্যা = 60% : 40% = $3 \times 20 : 2 \times 20 = 3 : 2$

অর্থাৎ, একটি রাশি (quantity) অপর একটি সমজাতীয় রাশির কতগুণ বা কতভাগ তাই হলো অনুপাত।

অনুপাতের পদ দুটিকে শূন্যবাদে একই সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করলে অনুপাতের কোনো পরিবর্তন হয় না।

বুঝেছি, মাঠে উপস্থিত ছাত্রদের সংখ্যা : ছাত্রীদের সংখ্যা = a : b হলে,

$a:b = \frac{a}{b} = \frac{ak}{bk} = ak:bk\ [k\neq0]$ , এবং $a:b = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}} = \frac{a}{k} : \frac{b}{k}\ [k\neq0]$

**a ও b (b≠0) বাস্তব সংখ্যা দুটির অনুপাতের মান a : b বা $\frac{a}{b}$ ; এই a : b-কে পড়া হয় "a অনুপাত b" (a is to b); a-কে a : b-এর পূর্বপদ (Antecedent) ও b-কে উত্তর পদ (Consequent) বলা হয়।**

(1) 3:2 অনুপাতের 3 ও 2 -কে কী বলা হয়?

3:2-অনুপাতের 3 [পূর্বপদ] এবং 2 [ ] পদ।

(2) কিন্তু যে-কোনো অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদ সমান হলে কী বলা হয়?

a:b অনুপাতের a=b হলে অর্থাৎ পূর্বপদ ও উত্তরপদ সমান হলে সেই অনুপাতকে **সাম্যানুপাত** (ratio of equality) বলা হয় এবং a≠b হলে অর্থাৎ পূর্বপদ ও উত্তরপদ অসমান হলে তাকে **বৈষম্যানুপাত** (ratio of inequality) বলা হয়।

বুঝেছি, 3:2 একটি বৈষম্যানুপাত, কিন্তু 2:2 একটি সাম্যানুপাত।

(3) কিন্তু কোনো অনুপাতের মান $\frac{a}{b} > 1$ এবং $\frac{a}{b} < 1$ হলে, সেই অনুপাত দুটিকে কী বলা হয়?

কোনো অনুপাতের মান $\frac{a}{b} > 1$ হলে, ওই অনুপাতটিকে **গুরু অনুপাত** (ratio of greater inequality) এবং $\frac{a}{b} < 1$ হলে, ওই অনুপাতটিকে **লঘু অনুপাত** (ratio of less inequality) বলা হয়।

বুঝেছি, 3 : 2 অনুপাতটি গুরু অনুপাত যেহেতু $\frac{3}{2} > 1$

কিন্তু 2 : 3 অনুপাতটির $\frac{2}{3} < 1$;

∴ 2 : 3 একটি [ ] অনুপাত।

4 কোনো অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদ পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলে যে নতুন অনুপাত তৈরি হবে সেই অনুপাতকে পূর্বের অনুপাতের কী বলা হয়?

কোনো অনুপাতের পূর্বপদ ও উত্তরপদ পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে যে নতুন অনুপাত তৈরি হয় সেই অনুপাতকে পূর্বের অনুপাতের **ব্যস্ত অনুপাত** বা **বিপরীত অনুপাত** (inverse ratio) বলে।

$a:b$ অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত $b:a$

বুঝেছি, $2:3$ অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত $3:2$

আমার বন্ধু সুজয় এক মজার কাজ করল। সে ওই মাঠে বিভিন্ন সময়ের ফুটবল খেলায় উপস্থিত ছাত্রী ও ছাত্র দর্শকদের সংখ্যার 3 টি অনুপাত তার খাতায় লিখল।

সে লিখল, $5:2$ , $4:3$ , $1:2$

5 কিন্তু সুজয়ের লেখা অনুপাতগুলির পূর্বপদগুলির গুণফল পূর্বপদ এবং উত্তরপদগুলির গুণফল উত্তরপদ ধরে যে অনুপাত পাবো সেই অনুপাতকে কী বলা হয়?

দুই বা ততোধিক প্রদত্ত অনুপাতের পূর্বপদগুলির গুণফলকে পূর্বপদ এবং উত্তরপদগুলির গুণফলকে উত্তরপদ ধরে যে অনুপাত পাওয়া যাবে সেই অনুপাতকে প্রদত্ত অনুপাতগুলির **যৌগিক অনুপাত** (Compound ratio) বা **মিশ্র অনুপাত বলা** (Mixed ratio) হয়।

যেমন : $a:b$ এবং $c:d$-এর যৌগিক অনুপাত $ac:bd$

বুঝেছি, $5:2, 4:3$ এবং $1:2$-এর যৌগিক অনুপাত $(5\times4\times1):(2\times3\times2) = 20:12 = 5:3$

**প্রয়োগ : 1.** আমি নীচের অনুপাতগুলি দেখি এবং ফাঁকা ঘরে বুঝে লিখি।

| অনুপাত | সাম্যানুপাত/ বৈষম্যানুপাত | গুরু অনুপাত/ লঘু অনুপাত | ব্যস্ত অনুপাত বা বিপরীত অনুপাত |
|---|---|---|---|
| 7:5 | বৈষম্যানুপাত | গুরু অনুপাত | 5:7 |
| 6:6 | | | |
| 1:4 | | | |
| 9:2 | | | |
| 7:5, 1:4 ও 9:2-এর যৌগিক অনুপাত ☐ | | | |

**প্রয়োগ : 2.** $x:y$ অনুপাতটি কোন শর্তে লঘু অনুপাত ও কোন শর্তে গুরু অনুপাত হবে লিখি এবং $x:y$-এর সমতুল্য দুটি অনুপাত লিখি।

$x:y$ অনুপাতটি লঘু অনুপাত হবে যখন $\frac{x}{y}<1$ এবং গুরু অনুপাত হবে যখন $\frac{x}{y}>1$ হবে।

$x:y$-এর সমতুল্য দুটি অনুপাত $xk:yk$ এবং $\frac{x}{k}:\frac{y}{k}$ [যেখানে $k\neq0$]

**প্রয়োগ : 3.** আমি $pr : qr$-এর লঘিষ্ঠ আকারের ব্যস্ত অনুপাত লিখি।

$pr : qr = \frac{pr}{qr} = \frac{p}{q} = p : q$

$\therefore pr : qr$ -এর লঘিষ্ঠ আকার $= p : q$

$\therefore pr : qr$ -এর লঘিষ্ঠ আকারের ব্যস্ত অনুপাত $= q : p$

**প্রয়োগ : 4.** $x^2yp : xy^2p$ -এর লঘিষ্ঠ আকারের ব্যস্ত অনুপাত লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 5.** যদি দুটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার অনুপাতের লঘিষ্ঠ আকার $p : q$ এবং তাদের গ.সা.গু. $r$ হয়,তবে সংখ্যা দুটি কী কী হবে লিখি।

সংখ্যা দুটি $pr$ এবং $qr$.

**প্রয়োগ : 6.** যদি দুটি সংখ্যার অনুপাত $2:3$ এবং তাদের গ.সা.গু. 7 হয়, তবে সংখ্যাদুটি লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 7.** আমি নীচের অনুপাতগুলির যৌগিক অনুপাত লিখি—

(i) $a : b, p : q$ এবং $x : y$ (ii) $a : bc, b : ca, c : ab$

(i) $a : b, p : q$ এবং $x : y$ -এর যৌগিক বা মিশ্র অনুপাত

$= a \times p \times x : b \times q \times y$

$= apx : bqy$

(ii) $a : bc, b : ca$ ও $c : ab$ -এর যৌগিক বা মিশ্র অনুপাত

$= a \times b \times c : bc \times ca \times ab$

$= abc : a^2b^2c^2 = 1 : abc$ [পূর্ব ও উত্তরপদকে $abc$ দিয়ে ভাগ করে পাই]

**প্রয়োগ : 8.** $pq : r$ ও $r : pq$ -এর যৌগিক অনুপাত নির্ণয় করি ও ওই যৌগিক অনুপাতকে কী বলে লিখি।

$pq : r$ ও $r : pq$ -এর যৌগিক অনুপাত $= pq \times r : r \times pq$

$= pqr : pqr$

$= 1 : 1$ [পূর্ব ও উত্তরপদকে $pqr$ দিয়ে ভাগ করে পেলাম]

$\therefore pq : r$ ও $r : pq$ -এর যৌগিক অনুপাত সাম্যানুপাত।

**প্রয়োগ : 9.** $p^2q : r$, $q^2r : p$ ও $r^2p : q$ -অনুপাত তিনটির মিশ্র অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 10.** যদি $A : B = 4 : 5$ এবং $B : C = 6 : 7$ হয়, তবে $A : C$ নির্ণয় করি।

$A : B = 4 : 5$ এবং $B : C = 6 : 7$

$\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$ এবং $\frac{B}{C} = \frac{6}{7}$

$\therefore \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$

বা, $\frac{A}{C} = \frac{24}{35}$

$\therefore A : C = 24 : 35$

**প্রয়োগ : 11.** যদি $A : B = 3 : 7$ এবং $B : C = 8 : 5$ হয়, তবে $A : C$ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 12.** যদি A : B = 6 : 7 এবং B : C = 8 : 9 হয়, তবে A : B : C কত হবে হিসাব করে লিখি।

A : B = 6 : 7 এবং B : C = 8 : 9

$B:C = 8:9 = 1:\frac{9}{8} = 7:\frac{63}{8}$  $\therefore A:B:C = 6:7:\frac{63}{8} = 48:56:63$

অন্যভাবে, A : B : C নির্ণয় করার সময়ে প্রথমে উভয় ক্ষেত্রে B-এর মান সমান করে নিই।

B-এর দুটি মান 7 ও 8-এর ল.সা.গু. 56

$A:B = 6:7 = 6\times8:7\times8 = 48:56$

$B:C = 8:9 = 8\times7:9\times7 = 56:63$  $\therefore A:B:C = 48:56:63$

**প্রয়োগ : 13.** যদি A:B = 5:9 এবং B:C = 4:5 হয়, তবে A:B:C কত হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 14.** যদি x : y = 2 : 3 হয়, তবে (4x–y) : (2x+3y) কত হবে হিসাব করে লিখি।

x : y = 2 : 3

ধরি, x = 2p এবং y = 3p [যেখানে, p একটি বাস্তব সংখ্যা এবং $p\neq0$]

$$\therefore (4x-y):(2x+3y) = \frac{4x-y}{2x+3y} = \frac{4\times2p-3p}{2\times2p+3\times3p} = \frac{8p-3p}{4p+9p} = \frac{5p}{13p} = \frac{5}{13} = 5:13$$

$\therefore (4x-y):(2x+3y) = 5:13$

**বিকল্প পদ্ধতি,** $(4x-y):(2x+3y) = \frac{4x-y}{2x+3y} = \frac{\frac{4x-y}{y}}{\frac{2x+3y}{y}}$ [লব ও হরকে y দ্বারা ভাগ করে পাই]

$$= \frac{4\frac{x}{y}-1}{2\frac{x}{y}+3} = \frac{4\times\frac{2}{3}-1}{2\times\frac{2}{3}+3} \quad \left[\frac{x}{y}=\frac{2}{3} \text{ বসিয়ে}\right]$$

$$= \frac{\frac{8-3}{3}}{\frac{4+9}{3}} = \frac{5}{13} = 5:13$$

**প্রয়োগ : 15.** x : y = 7 : 4 হলে, দেখাই যে (5x–6y) : (3x+11y) = 11 : 65 [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 16.** (3x+5y) : (7x–4y) = 7 : 4 হলে, x : y -এর মান নির্ণয় করি।

$(3x+5y):(7x-4y) = 7:4$

বা, $\frac{3x+5y}{7x-4y} = \frac{7}{4}$

বা, $4(3x+5y) = 7(7x-4y)$

বা, $12x+20y = 49x-28y$

বা, $12x-49x = -28y-20y$

বা, $-37x = -48y$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{48}{37}$  $\therefore x:y = 48:37$

**প্রয়োগ : 17.** যদি $(2x+5y):(5x-7y) = 5:3$ হয়, তবে $x:y$ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 18.** $(3x-2y):(x+3y) = 5:6$ হলে, $(2x-5y):(3x+4y)$ নির্ণয় করি।

$\frac{3x-2y}{x+3y} = \frac{5}{6}$

বা, $6(3x-2y) = 5(x+3y)$

বা, $18x-12y = 5x+15y$

বা, $13x = 27y$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{27}{13}$ $\therefore x:y = 27:13$

ধরি, $x = 27k$ এবং $y = 13k$ [k একটি অশূন্য বাস্তব সংখ্যা]

$\therefore (2x-5y):(3x+4y) = \frac{2x-5y}{3x+4y} = \frac{2\times27k-5\times13k}{3\times27k+4\times13k} = \frac{54k-65k}{81k+52k} = \frac{-11k}{133k} = \frac{-11}{133} = -11:133$

$\therefore (2x-5y):(3x+4y) = -11:133$

কিন্তু এখানে দেখছি অনুপাতের একটি পদ ঋণাত্মক। বাস্তবে এরকম উদাহরণ আছে কি?
শ্যামল 100 টাকায় একটি জিনিস কিনে 130 টাকায় বিক্রি করে। সুতরাং,শ্যামলের লাভ হয় 30 টাকা।
রফিকুল 100 টাকায় একটি জিনিস কিনে 80 টাকায় বিক্রি করে। সুতরাং,রফিকুলের ক্ষতি হয় 20 টাকা।
অর্থাৎ, রফিকুলের লাভ হয় – 20 টাকা। শ্যামল ও রফিকুলের লাভের অনুপাত 30 : –20 বা, 3 : –2

**প্রয়োগ : 19.** $(7x-5y):(3x+4y) = 7:11$ হলে, $(5x-3y):(6x+5y)$ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 20.** $x:y$ **বৈষম্যানুপাতের** উভয়পদের সঙ্গে কত যোগ করলে $p:q$ **বৈষম্যানুপাতটি** হবে নির্ণয় করি।

ধরি, $x:y$ অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে k যোগ করলে অনুপাতটি $p:q$ হবে।

সুতরাং, $\frac{x+k}{y+k} = \frac{p}{q}$

বা, $q(x+k) = p(y+k)$

বা, $qx+qk = py+pk$

বা, $qk-pk = py-qx$

বা, $k(q-p) = py-qx$

$\therefore k = \frac{py-qx}{q-p}$ ($\because$ $p:q$ **একটি বৈষম্যানুপাত,** $\therefore p \neq q$; $\therefore q-p \neq 0$)

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $\frac{py-qx}{q-p}$ উভয়পদের সঙ্গে যোগ করতে হবে।

**প্রয়োগ : 21.** 5:3 অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে কত যোগ করলে অনুপাতটি 7:6 হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 22.** $x:y$ **বৈষম্যানুপাতের** উভয়পদ থেকে কত বিয়োগ করলে $p:q$ **বৈষম্যানুপাতটি** হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, $x:y$ অনুপাতের উভয়পদ থেকে r বিয়োগ করলে অনুপাতটি $p:q$ হবে।

সুতরাং, $\frac{x-r}{y-r} = \frac{p}{q}$

বা, $qx-qr = py-pr$

বা, $pr-qr = py-qx$

বা, $r(p-q) = py-qx$

$\therefore r = \frac{py-qx}{p-q}$ $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $\frac{py-qx}{p-q}$ উভয়পদের থেকে বিয়োগ করতে হবে।

## কষে দেখি 5.1

1. নীচের রাশিগুলি অনুপাতে প্রকাশ করি ও অনুপাতগুলি সাম্যানুপাত, লঘু অনুপাত না গুরু অনুপাত বুঝে লিখি।

   (i) 4 মাস এবং 1 বছর 6 মাস  (ii) 75 পয়সা এবং 1 টাকা 25 পয়সা

   (iii) 60 সেমি. এবং 0.6 মিটার  (iv) 1.2 কিগ্রা. এবং 60 গ্রাম

2. (i) p কিগ্রা. ও q গ্রামের অনুপাতটি লিখি।

   (ii) x দিন ও z মাসের মধ্যে অনুপাত নির্ণয় কখন সম্ভব হবে লিখি।

   (iii) একটি অনুপাত ও তার ব্যস্ত অনুপাতের মিশ্র অনুপাত কী ধরনের অনুপাত হবে লিখি।

   (iv) $\frac{a}{b}:c, \frac{b}{c}:a, \frac{c}{a}:b$ -এর মিশ্র অনুপাত নির্ণয় করি।

   (v) $x^2:yz$ এবং কোন অনুপাতের মিশ্র অনুপাত $xy:z^2$ হবে হিসাব করে লিখি।

   (vi) $x^2:\frac{yz}{x}, y^2:\frac{zx}{y}, z^2:\frac{yx}{z}$ অনুপাতগুলির ব্যস্ত অনুপাতগুলির যৌগিক অনুপাত নির্ণয় করি।

3. নিম্নলিখিতগুলির মিশ্র অনুপাত বা যৌগিক অনুপাত নির্ণয় করি :

   (i) $4:5, 5:7$ এবং $9:11$  (ii) $(x+y):(x-y), (x^2+y^2):(x+y)^2$ এবং $(x^2-y^2)^2:(x^4-y^4)$

4. (i) $A:B=6:7$ এবং $B:C=8:7$ হলে, $A:C$ নির্ণয় করি।

   (ii) $A:B=2:3, B:C=4:5$ এবং $C:D=6:7$ হলে, $A:D$ নির্ণয় করি।

   (iii) যদি $A:B=3:4$ এবং $B:C=2:3$ হয়, তাহলে $A:B:C$ নির্ণয় করি।

   (iv) $x:y=2:3$ এবং $y:z=4:7$ হলে, $x:y:z$ নির্ণয় করি।

5. (i) $x:y=3:4$ হলে, $(3y-x):(2x+y)$ কত হবে নির্ণয় করি।

   (ii) $a:b=8:7$ হলে, দেখাই যে $(7a-3b):(11a-9b)=7:5$

   (iii) $p:q=5:7$ এবং $p-q=-4$ হলে, $3p+4q$ -এর মান নির্ণয় করি।

6. (i) $(5x-3y):(2x+4y)=11:12$ হলে, $x:y$ নির্ণয় করি।

   (ii) $(3a+7b):(5a-3b)=5:3$ হলে, $a:b$ নির্ণয় করি।

7. (i) $(7x-5y):(3x+4y)=7:11$ হলে, দেখাই যে $(3x-2y):(3x+4y)=137:473$

   (ii) $(10x+3y):(5x+2y)=9:5$ হলে, দেখাই যে $(2x+y):(x+2y)=11:13$

8. (i) $2:5$ অনুপাতের উভয়পদের সঙ্গে কত যোগ করলে অনুপাতটি $6:11$ হবে নির্ণয় করি।

   (ii) $a:b$ বৈষম্যানুপাতের উভয়পদ থেকে কত বিয়োগ করলে বৈষম্যানুপাতটি $m:n$ হবে নির্ণয় করি।

   (iii) কোন সংখ্যা $4:7$ অনুপাতের পূর্বপদের সঙ্গে যোগ এবং উত্তরপদ থেকে বিয়োগ করলে উৎপন্ন অনুপাতটির মান $2:3$ ও $5:4$ -এর যৌগিক অনুপাত হবে।

পরের মাসে তেঁতুলতলা গ্রামের ওই মাঠে কিশোরদের ফুটবল ম্যাচের আয়োজন করা হচ্ছে। ভারতী সংঘ থেকে ঠিক করা হয়েছে প্রত্যেক কিশোরকে ফুটবল খেলার জার্সি কিনে দেবে।

সৌমেনকাকু 560 টাকায় 7 টি জার্সি কিনে এনেছেন। আমরা শর্মিষ্ঠাদির সঙ্গে গিয়ে একই দামের 15 টি জার্সি 1200 টাকায় কিনে আনলাম।

**6** আমি সৌমেনকাকুর কেনা ও আমাদের কেনা জার্সির সংখ্যার ও তাদের দামের আলাদা আলাদা অনুপাত তৈরি করি ও কী পাই দেখি।

সৌমেনকাকুর কেনা জার্সির সংখ্যা : আমাদের কেনা জার্সির সংখ্যা = 7 : 15

সৌমেনকাকুর কেনা জার্সির দাম : আমাদের কেনা জার্সির দাম $= 560 : 1200 = 7\times80 : 15\times80 = 7 : 15$

**7** কিন্তু অনুপাত দুটি লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশের পর দেখছি, দুটি অনুপাতই সমান। এই ধরনের সমান অনুপাত তৈরি করার সংখ্যাগুলিকে কী বলা হয়?

যদি চারটি বাস্তব সংখ্যা এমন হয় যে, প্রথম দুটি সংখ্যার অনুপাত ও শেষ দুটি সংখ্যার অনুপাত পরস্পর সমান হয় তা হলে ওই সংখ্যা চারটিকে **সমানুপাতী** বলে অথবা সংখ্যা চারটি **সমানুপাতে** (proportion) আছে বলা হয়।

চারটি বাস্তব সংখ্যা a, b, c, d ($b\neq0$, $d\neq0$) সমানুপাতে থাকলে তাদেরকে $a : b :: c : d$-এইভাবে লেখা হয়। a ও d-কে **প্রান্তীয় পদ** (extremes) ও b ও c-কে **মধ্যপদ** (means) বলা হয়।

'd'-কে **চতুর্থপদ** বা **চতুর্থ সমানুপাত** বলা হয়।

বুঝেছি, 7, 15, 560, 1200-এই চারটি সংখ্যা সমানুপাতে আছে। অর্থাৎ 7 : 15 :: 560 : 1200; এখানে 7 ও 1200 প্রান্তীয় পদ এবং 15 ও 560 মধ্যপদ। 1200 চতুর্থপদ বা চতুর্থ সমানুপাত।

**8** চারটি সংখ্যা a, b, c ও d সমানুপাতে থাকলে, তাদের মধ্যে সম্পর্ক লেখার চেষ্টা করি।

a, b, c ও d সমানুপাতে আছে,

$\therefore a : b :: c : d$

অর্থাৎ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\quad \therefore ad = bc$

দেখছি, সমানুপাতী চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে প্রান্তীয় পদ দুটির গুণফল অবশ্যই মধ্যপদ দুটির গুণফলের সমান হবে।

বুঝেছি, 7 : 15 :: 560 : 1200 -এর ক্ষেত্রে,

$7\times1200 = \square = 15\times560$ **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 23.** 2, 3, 4 ও 6 সমানুপাতে আছে কিনা দেখি।

$2\times6 = \square$ এবং $3\times4 = \square$ $\quad \therefore 2 : 3 :: 4 : 6$

**প্রয়োগ : 24.** 2.5, –2, –5 ও 4 সমানুপাতে আছে কিনা দেখি।

$2.5\times4 = \square$ এবং $(-2)\times(-5) = \square$ $\quad \therefore 2.5 : (-2) :: (-5) : 4$

**প্রয়োগ : 25.** 2, 7, 12 ও 42 সমানুপাতে আছে কিনা দেখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 26.** $-\sqrt{2}$, 6, 1 ও $-\sqrt{18}$ সমানুপাতে আছে কিনা দেখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 27.** 5pq, 3q -এর সঙ্গে নীচের কোন জোড়া সংখ্যা সমানুপাতে আছে নির্ণয় করি—

(a) 15pt, 3q (b) 15pt, 9t (c) 15pr, 9t

$$5pq:3q = \frac{5pq}{3q} = \frac{5p}{3} = \frac{5p\times3t}{3\times3t} = \frac{15pt}{9t}$$

∴ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 15pt ও 9t.

**প্রয়োগ : 28.** 2a, 3b, 6ac ও 9bc সমানুপাতী কিনা দেখি।

$2a\times9bc =$ ☐ এবং $3b\times6ac =$ ☐

পেলাম প্রান্তীয় পদদ্বয়ের গুণফল = মধ্যপদদ্বয়ের গুণফল

∴ 2a, 3b, 6ac ও 9bc সমানুপাতী।

**প্রয়োগ : 29.** 8x, 5yz, 40qx ও 25qyz সমানুপাতী কিনা দেখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 30.** যদি 6 : x : : 2 : 13 হয়, তবে x -এর মান হিসাব করে লিখি।

$6:x::2:13$

$$\frac{6}{x} = \frac{2}{13}$$

বা, $2x = 6\times13$

বা, $x = \frac{78}{2}$ ∴ $x = 39$

**প্রয়োগ : 31.** যদি 8 : y : : 2 : 21 হয়, তবে y -এর মান হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 32.** 6, 9, 12 -এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করি।

মনে করি, চতুর্থ সমানুপাতী x

সুতরাং, $6:9::12:x$

বা, $\frac{6}{9} = \frac{12}{x}$

বা, $6x = 9\times12$ ∴ $x =$ ☐

**প্রয়োগ : 33.** 5, 4, 25 -এর চতুর্থ সমানুপাতী হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

যে-কোনো চারটি সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে কতগুলি স্বতন্ত্র (আলাদা আলাদা) সমানুপাত গঠন করা যায় দেখি।

ধরি, a, b, c ও d চারটি সমানুপাতী সংখ্যা।

সুতরাং, $a:b::c:d$ ∴ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ∴ $a:c::b:d$ (ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ∴ $b:a::d:c$

(iii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ বা, $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ ∴ $c:a::d:b$

∴ পেলাম, a, b, c ও d সমানুপাতী হলে, (i) a, c, b, d সমানুপাতী (ii) b, a, d, c সমানুপাতী (iii) c, a, d, b সমানুপাতী

বুঝেছি, 2, 3, 4 ও 6 চারটি সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে যে সকল স্বতন্ত্র সমানুপাত গঠন করা যাবে সেগুলি হলো (i) 2 : 4 : : 3 : 6 (ii) 3 : 2 : : 6 : 4 (iii) 4 : 2 : : 6 : 3

**প্রয়োগ : 34.** 5, 6, 10 ও 12 চারটি সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে কতগুলি ও কী কী স্বতন্ত্র সমানুপাত গঠন করা যাবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 35.** 2, 4, 6 ও 10 -এর প্রত্যেকের সঙ্গে কোন সংখ্যা যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি।

মনে করি, প্রত্যেকের সঙ্গে x যোগ করতে হবে।

সুতরাং, (2+x), (4+x), (6+x) ও (10+x) সমানুপাতী হবে।

$\therefore (2+x):(4+x)::(6+x):(10+x)$

বা, $\frac{2+x}{4+x}=\frac{6+x}{10+x}$

বা, $(2+x)(10+x)=(6+x)(4+x)$

বা, $20+10x+2x+x^2=24+4x+6x+x^2$

বা, $2x=4 \quad \therefore x=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা 2.

**প্রয়োগ : 36.** 12, 22, 42 ও 72 -এর প্রত্যেকের সঙ্গে কোন সংখ্যা যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 37.** a, b, c, d -এর প্রত্যেকটির সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, প্রত্যেকের সঙ্গে x যোগ করলে সংখ্যাগুলি সমানুপাতী হবে।

সুতরাং, $(a+x):(b+x)::(c+x):(d+x)$

$\therefore \frac{a+x}{b+x}=\frac{c+x}{d+x}$

বা, $(a+x)(d+x)=(c+x)(b+x)$

বা, $ad+dx+ax+x^2=cb+bx+cx+x^2$

বা, $x(d+a-b-c)=cb-ad \qquad \therefore x=\frac{cb-ad}{a+d-b-c}$ (যখন $a+d\neq b+c$)

$\therefore$ প্রত্যেকটির সঙ্গে $\frac{cb-ad}{a+d-b-c}$ যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে।

**প্রয়োগ : 38.** 3, 6, 7, 10 -এর প্রত্যেকটির সঙ্গে যেকোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে কিনা বুঝে লিখি। **[নিজে করি]**

শর্মিষ্ঠাদি ক্লাব ঘরের বোর্ডে তিনটি সংখ্যা লিখলেন।

তিনি বোর্ডে লিখলেন 4, 8 ও 16

4, 8 ও 16 তিনটি সংখ্যাকে সমানুপাতে লেখা যাবে কিনা দেখি।

$4:8=1:2$

এবং $8:16=1:2$

$\therefore$ লিখতে পারি, $4:8::8:16$

(9) কিন্তু তিনটি রাশি এভাবে সমানুপাতে থাকলে, সেই সমানুপাতকে কী বলা হয়?

সমজাতীয় তিনটি রাশির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয় পদের অনুপাত, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাতের সমান হলে, ওই সমজাতীয় তিনটি রাশিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** বলা হয়।

বুঝেছি, বোর্ডে লেখা 4, 8 ও 16 সংখ্যাগুলি ক্রমিক সমানুপাতী।

(10) তিনটি বাস্তব সংখ্যা a, b ও c, ($b\neq0$, $c\neq0$) ক্রমিক সমানুপাতে থাকলে তাদের মধ্যে কী সম্পর্ক পাই হিসাব করে দেখি।

a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতে আছে।

$\therefore a:b::b:c$

অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

বা, $b^2 = ac$ $\quad\therefore b=\pm\sqrt{ac}$

$\therefore$ পেলাম a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতী হলে $b^2 = ac$ বা $b=\pm\sqrt{ac}$

> b ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত হবে যদি a এবং c উভয়েই ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত হয় এবং b ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হবে যদি a এবং c উভয়েই ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হয়।
> a এবং c বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে b অসংজ্ঞাত হবে।

(11) a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতে থাকলে b-কে কী বলা হয়?

a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতে থাকলে $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ $\quad\therefore b^2 = ac$

এখানে b-কে a ও c -এর **মধ্যসমানুপাতী** (Mean Proportional) এবং c-কে **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third Proportional) বলা হয়।

এভাবে a, b, c, d, e ক্রমিক সমানুপাতী হলে, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}$ হবে।

বুঝেছি, 4, 8 ও 16 তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যার 8 মধ্যসমানুপাতী এবং 16 তৃতীয় সমানুপাতী।

**প্রয়োগ : 39.** 9 ও 15-এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি।

ধরি, তৃতীয় সমানুপাতী x

$\therefore$ 9, 15 ও x ক্রমিক সমানুপাতী

সুতরাং, $\frac{9}{15}=\frac{15}{x}$

বা, $9x = 15\times15$

বা, $x=\frac{15\times15}{9}$ $\quad\therefore x=$ ☐

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী 25

**প্রয়োগ : 40.** আমি 3 টাকা ও 12 টাকার তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ : 41.** আমি $2a^2$ ও 3ab -এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি।

মনে করি, তৃতীয় সমানুপাতী x

$\therefore 2a^2$, 3ab ও x ক্রমিক সমানুপাতী

$\therefore \frac{2a^2}{3ab}=\frac{3ab}{x}$

বা, $2a^2x = 3ab\times3ab$

বা, $x=\frac{3ab\times3ab}{2a^2}$

$\therefore x=\frac{9b^2}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী $\frac{9b^2}{2}$

**প্রয়োগ : 42.** $9pq$, $12pq^2$ -এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 43.** $\frac{1}{12}$ ও $\frac{1}{75}$ -এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করি।

ধরি, $\frac{1}{12}$ ও $\frac{1}{75}$ -এর মধ্যসমানুপাতী x

সুতরাং, $\frac{\frac{1}{12}}{x} = \frac{x}{\frac{1}{75}}$ বা, $x^2 = \frac{1}{12} \times \frac{1}{75}$

বা, $x = \sqrt{\frac{1}{12 \times 75}}$

$\therefore x = \frac{1}{30}$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যসমানুপাতী $\frac{1}{30}$

**প্রয়োগ : 44.** 0.5 ও 4.5 -এর মধ্যসমানুপাতী হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 45.** তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী ধনাত্মক সংখ্যার প্রান্তীয় পদদুটি $pqr, \frac{pr}{q}$ হলে মধ্যসমানুপাতী হিসাব করে লিখি।

ধরি, মধ্যসমানুপাতী পদটি x

$\therefore pqr, x$ ও $\frac{pr}{q}$ ক্রমিক সমানুপাতী।

সুতরাং, $\frac{pqr}{x} = \frac{x}{\frac{pr}{q}}$

বা, $x^2 = pqr \times \frac{pr}{q} = p^2r^2$

বা, $x = \sqrt{p^2r^2}$

$\therefore x = pr$ ($\because$ প্রান্তীয় পদদুটি ধনাত্মক সংখ্যা)

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যসমানুপাতীটি pr

**প্রয়োগ : 46.** ধনাত্মক সংখ্যা $xy^2$ ও $xz^2$ -এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করি। [নিজে করি]

## কষে দেখি 5.2

1. নিম্নলিখিত সমানুপাতে x-এর মান নির্ণয় করি।
   (i) $10:35::x:42$ (ii) $x:50::3:2$
2. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুচ্ছগুলির চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় করি:
   (i) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ (ii) 9.6 কিগ্রা., 7.6 কিগ্রা., 28.8 কিগ্রা. (iii) $x^2y, y^2z, z^2x$
   (iv) $(p-q), (p^2-q^2), p^2-pq+q^2$
3. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুচ্ছগুলির তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করি :
   (i) 5, 10 (ii) 0.24, 0.6 (iii) $p^3q^2, q^2r$ (iv) $(x-y)^2, (x^2-y^2)^2$

4. নিম্নলিখিত ধনাত্মক সংখ্যাগুচ্ছগুলির মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় করি :
   (i) 5 এবং 80 (ii) 8.1 এবং 2.5 (iii) $x^3y$ এবং $xy^3$ (iv) $(x-y)^2$, $(x+y)^2$
5. যদি a : b এবং c : d এই অনুপাত দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী সম্পর্ক প্রকাশ করে, তবে তাদের ব্যস্ত অনুপাতগুলি কী সম্পর্ক প্রকাশ করে লিখি।
6. তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যা দিয়ে কটি ক্রমিক সমানুপাত গঠন করা যাবে হিসাব করে লিখি।
7. 5 টি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যার প্রথমটি 2 এবং দ্বিতীয়টি 6 হলে, পঞ্চমটি নির্ণয় করি।
8. 6, 15, 20 ও 43-এর প্রত্যেকটির সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হবে হিসাব করে লিখি।
9. 23, 30, 57 এবং 78 -এর প্রত্যেকটি থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলি সমানুপাতী হবে নির্ণয় করি।
10. p, q, r, s-এর প্রত্যেকটির থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলি সমানুপাতী হবে নির্ণয় করি।

শর্মিষ্ঠাদির মতো সাব্বাও ক্লাবঘরের বোর্ডে চারটি সংখ্যা লিখেছে যারা সমানুপাতে আছে।

সাব্বা লিখেছে, 3, 5, 6 ও 10

দেখছি, 3 : 5 : : 6 : 10 অর্থাৎ 3 : 5 = 6 : 10

আবার, 3 : 6 = 1 : 2 = 5 : 10

অর্থাৎ, 3 : 6 : : 5 : 10

পেলাম, 3 : 5 : : 6 : 10 হলে, 3 : 6 : : 5 : 10

**12** আমি যে-কোনো চারটি সমানুপাতী অশূন্য বাস্তব সংখ্যা a, b, c ও d বোর্ডে লিখি ও সমানুপাতের কিছু ধর্ম প্রমাণ করি। যদি a, b, c ও d সমানুপাতী হয় তবে **প্রমাণ করি** a, c, b ও d সমানুপাতী হবে।

**প্রমাণ :** a, b, c ও d সমানুপাতী অর্থাৎ a : b : : c : d

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

উভয়পক্ষকে $\frac{b}{c}$ দিয়ে গুণ করে পাই,

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{c}$$

বা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\therefore$ a : c = b : d

পেলাম, a : b : : c : d হলে, a : c : : b : d হবে।

**13** কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

'যে-কোনো সমানুপাতের দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ পরস্পর স্থান বিনিময় করলেও পদ চারটি সমানুপাতী থাকে'— সমানুপাতের এই ধর্মকে **একান্তর প্রক্রিয়া** (Alternendo) বলা হয়।

বুঝেছি, 2 : 3 : : 10 : 15 হলে, 2 : 10 : : 3 : ☐ হবে। **[নিজে করি]**

আবার দেখছি, 3 : 5 : : 6 : 10 হলে, 3 : 6 : : 5 : 10

**14** আমি a, b, c, d চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে $a:b::c:d$ হলে $b:a::d:c$ হবে কিনা প্রমাণ করি।

**প্রমাণ :** $a:b::c:d$

অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ অর্থাৎ, $ad=bc$

উভয়পক্ষকে ac দিয়ে ভাগ করে পাই,

$ad\div ac=bc\div ac$

বা, $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$

বা, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

$\therefore b:a::d:c$

$\therefore$ পেলাম, $a:b::c:d$ হলে, $b:a::d:c$ হবে।

**15** কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

‘যে-কোনো দুটি অনুপাত সমান হলে তাদের বিপরীত বা ব্যস্ত অনুপাত দুটিও সমান হবে’। সমানুপাতের এই ধর্মকে **বিপরীত বা ব্যস্ত প্রক্রিয়া** (Invertendo) বলা হয়।

বুঝেছি, $6:10::9:15$ হলে $10:6::$ ☐ $:$ ☐ **[নিজে লিখি]**

আমাদের বন্ধু বিভাস এক মজার কাণ্ড করল। সে সাব্বার লেখা 3, 5, 6 ও 10 এই চারটি সমানুপাতী সংখ্যার সাহায্যে অন্যরকম সমানুপাত তৈরি করল।

সে করল, $(3+5):5=(6+10):10$

**16** $a:b::c:d$ হলে $a+b:b::c+d:d$ -হবে কিনা প্রমাণ করি।

**প্রমাণ :** $a:b::c:d$ অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে পাই]

বা, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$\therefore (a+b):b::(c+d):d$

পেলাম, a, b, c ও d চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে $a:b::c:d$ হলে, $(a+b):b::(c+d):d$ হবে।

**17** সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

সমানুপাতের এই ধর্মকে **যোগ প্রক্রিয়া (Componendo)** বলা হয়।

বুঝেছি, $4:5::8:10$ হলে, সমানুপাতের যোগপ্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই, $(4+5):5=$ ☐ $:10$ **[নিজে লিখি]**

**18** কিন্তু $a:b::c:d$ হলে $a-b:b$ ও $c-d:d$ সমানুপাত হবে কিনা প্রমাণ করি।

**প্রমাণ :** $a:b::c:d$ অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ [উভয়পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে পাই]

বা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$\therefore (a-b):b::(c-d):d$

$\therefore$ পেলাম, $a:b::c:d$ হলে, $(a-b):b::(c-d):d$ হবে।

**19** সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

a, b, c, d চারটি সংখ্যার ক্ষেত্রে a : b : : c : d হলে, (a–b) : b : : (c–d) : d হবে। সমানুপাতের এই ধর্মকে **ভাগ প্রক্রিয়া** (Dividendo) বলা হয়।

বুঝেছি, 5 : 4 = 10 : 8 হলে সমানুপাতের ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই, (5–4) : 4 = ☐ : 8 **[নিজে যাচাই করে লিখি]**

**প্রয়োগ : 47.** আমি সমানুপাতের যোগ প্রক্রিয়া ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা প্রমাণ করি যে a : b : : c : d হলে, (a+b) : (a–b) : : (c+d) : (c–d) হবে।

**প্রমাণ :** a : b : : c : d

অর্থাৎ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ [যোগ প্রক্রিয়া থেকে পাই]

আবার, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ [ভাগ প্রক্রিয়া থেকে পাই]

সুতরাং, $\frac{a+b}{b}\div\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}\div\frac{c-d}{d}$

বা, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$\therefore$ (a+b) : (a–b) : : (c+d) : (c–d)

**বিকল্প প্রমাণ :**

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\ (k\neq 0)$

$\therefore a = bk$ এবং $c = dk$

$\therefore \frac{a+b}{a-b}=\frac{bk+b}{bk-b}=\frac{b(k+1)}{b(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}$

আবার, $\frac{c+d}{c-d}=\frac{dk+d}{dk-d}=\frac{d(k+1)}{d(k-1)}=\frac{k+1}{k-1}$

$\therefore$ (a+b) : (a–b) : : (c+d) : (c–d)

$\therefore$ পেলাম, a : b : : c : d হলে, (a+b) : (a–b) : : (c+d) : (c–d) হবে।

**20** কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

'a : b : : c : d হলে, (a+b) : (a–b) : : (c+d) : (c–d) হবে'। সমানুপাতের এই ধর্মকে যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া (Componendo and Dividendo) বলা হয়।

**প্রয়োগ : 48.** আমি 7:3::14:6 সমানুপাতের সংখ্যাগুলি নিয়ে সমানুপাতের যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া করি।

7 : 3 = 14 : 6 $\therefore$ (7+3) : (7–3) = 10 : 4 = 5 : 2

আবার, (14+6) : (14–6) = 20 : 8 = 5 : 2

$\therefore$ (7+3) : (7–3) : : (14+6) : (14–6)

**প্রয়োগ : 49.** 5 : 4 : : 10 : 8 হলে সমানুপাতের যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই, (5+4) : (5–4) : : (10+8) : ☐ **[নিজে লিখি]**

**প্রয়োগ : 50.** a : b : : c : d হলে, প্রমাণ করি যে $(a^2+b^2):(a^2-b^2)::(c^2+d^2):(c^2-d^2)$

a : b : : c : d অর্থাৎ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$ [বর্গ করে পাই]

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$ [সমানুপাতের যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$\therefore (a^2+b^2):(a^2-b^2)::(c^2+d^2):(c^2-d^2)$

**বিকল্প প্রমাণ :** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ধরি, $(k\neq 0)$ $\therefore a=bk$ এবং $c=dk$

বামপক্ষ $=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{(bk)^2+b^2}{(bk)^2-b^2}=\frac{b^2(k^2+1)}{b^2(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$

ডানপক্ষ $=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}=\frac{(dk)^2+d^2}{(dk)^2-d^2}=\frac{d^2(k^2+1)}{d^2(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$ $\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **[প্রমাণিত]**

**প্রয়োগ : 51.** যদি a:b::c:d হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে (4a+7b):(4a–7b)::(4c+7d):(4c–7d) **[নিজে করি]**

তুষার বোর্ডে অনেকগুলি অনুপাত লিখল।

তুষার লিখল, 2 : 5, 6 : 15, 16 : 40, 24 : 60

দেখছি, $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{16}{40}=\frac{24}{60}$

**21** আমি তুষারের লেখা অনুপাতগুলির পূর্ব পদগুলির যোগফলকে পূর্বপদ ও উত্তরপদগুলির যোগফলকে উত্তরপদ ধরে অনুপাত তৈরি করি ও কী পাই দেখি।

$\frac{2+6+16+24}{5+15+40+60}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

$\therefore$ পেলাম, $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{16}{40}=\frac{24}{60}=\frac{2+6+16+24}{5+15+40+60}$

**22** a : b = c : d = e : f হলে প্রতিটি অনুপাত (a+c+e) : (b+d+f) -এর সমান হবে কিনা প্রমাণ করে দেখি।

**প্রমাণ,** a : b = c : d = e : f

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ (যেখানে, $k\neq 0$)

$\therefore a=bk,\ c=dk$ এবং $e=fk$

$\therefore \frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{bk+dk+fk}{b+d+f}=\frac{k(b+d+f)}{b+d+f}=k$

$\therefore$ পেলাম, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

$\therefore$ সাধারণভাবে লিখতে পারি, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}$

**23** কিন্তু সমানুপাতের এই ধর্মকে কী বলা হয়?

$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}$ —— সমানুপাতের এই ধর্মকে **সংযোজন প্রক্রিয়া (Addendo)** বলা হয়।

**24** $a:b=c:d=e:f$ হলে, প্রতিটি অনুপাত (i) $(a+c-e):(b+d-f)$ (ii) $(a-c+e):(b-d+f)$ (iii) $(a-c-e):(b-d-f)$-এদের প্রত্যেকটির সঙ্গে সমান হবে কিনা দেখি।

(i) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ (যেখানে, $k\neq 0$) $\therefore a=bk, c=dk, e=fk$

$$\frac{a+c-e}{b+d-f}=\frac{bk+dk-fk}{b+d-f}=\frac{k(b+d-f)}{(b+d-f)}=k \quad \therefore a:b=c:d=e:f=(a+c-e):(b+d-f)$$

(ii) $$\frac{a-c+e}{b-d+f}=\frac{bk-dk+fk}{b-d+f}=\frac{k(b-d+f)}{(b-d+f)}=k \quad \therefore a:b=c:d=e:f=(a-c+e):(b-d+f)$$

(iii) $$\frac{a-c-e}{b-d-f}=\frac{bk-dk-fk}{b-d-f}=\frac{k(b-d-f)}{(b-d-f)}=k \quad \therefore a:b=c:d=e:f=(a-c-e):(b-d-f)$$

**25** '$a:b=c:d=e:f$ হলে প্রত্যেক অনুপাত $\frac{am+cn+ep}{bm+dn+fp}$ -এর সমান হবে [m, n, p যে-কোনো অশূন্য সংখ্যা]' প্রমাণ করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ :52.** সমানুপাতের সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে লিখতে পারি, $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{2+6+8}{\square+\square+\square}$ [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 53.** $a:b=c:d$ হলে, প্রমাণ করি যে $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$

$a:b=c:d$ বা, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{a^2}{ab}=\frac{c^2}{cd}=\frac{a^2+c^2}{ab+cd}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

আবার, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $\frac{ab}{b^2}=\frac{cd}{d^2}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

সুতরাং, $\frac{a^2+c^2}{ab+cd}=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$

$\therefore (a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$ [প্রমাণিত]

**বিকল্প প্রমাণ**

ধরি, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ $(k\neq 0)$

$\therefore a=bk, c=dk$

$\therefore$ বামপক্ষ $=(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(b^2k^2+d^2k^2)(b^2+d^2)=k^2(b^2+d^2)^2$

ডানপক্ষ $=(ab+cd)^2=(bk\times b+dk\times d)^2=(b^2k+d^2k)^2=k^2(b^2+d^2)^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

**প্রয়োগ : 54.** $x:a=y:b=z:c$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=\frac{3xyz}{abc}$

ধরি, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ (যেখানে, $k\neq 0$)

$\therefore x=ak, y=bk$ এবং $z=ck$

বামপক্ষ $=\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=\frac{a^3k^3}{a^3}+\frac{b^3k^3}{b^3}+\frac{c^3k^3}{c^3}=k^3+k^3+k^3=3k^3$

ডানপক্ষ $=\frac{3xyz}{abc}=\frac{3\times ak\times bk\times ck}{abc}=3k^3$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

**প্রয়োগ : 55.** $a:b = b:c$ হলে, দেখাই যে, $(a+b+c)(a-b+c) = a^2+b^2+c^2$

ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ (যেখানে, $k \neq 0$)

$\therefore a = bk, \ b = ck$

সুতরাং, $a = ck \times k = ck^2$

বামপক্ষ $= (a+b+c)(a-b+c)$
$= (ck^2+ck+c)(ck^2-ck+c)$
$= c(k^2+k+1) \times c(k^2-k+1)$
$= c^2(k^2+k+1)(k^2-k+1)$

ডানপক্ষ $= a^2+b^2+c^2$
$= (ck^2)^2+(ck)^2+c^2$
$= c^2k^4+c^2k^2+c^2$
$= c^2(k^4+k^2+1)$
$= c^2[k^4+2k^2+1-k^2]$
$= c^2[(k^2+1)^2-(k)^2]$
$= c^2(k^2+1+k)(k^2+1-k)$
$= c^2(k^2+k+1)(k^2-k+1)$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

**প্রয়োগ : 56.** a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হলে, দেখাই যে $(a^2-b^2)(c^2-d^2) = (b^2-c^2)^2$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$ ধরি, (যেখানে, $k \neq 0$)

সুতরাং, $a=bk, b=ck, c=dk$

$\therefore b=dk\times k = dk^2$ এবং $a=dk^2\times k = dk^3$

বামপক্ষ $= (a^2-b^2)(c^2-d^2)$
$= \{(dk^3)^2-(dk^2)^2\}\{(dk)^2-d^2\}$
$= \{d^2k^6-d^2k^4\}\{d^2k^2-d^2\}$
$= d^2k^4(k^2-1)\times d^2(k^2-1)$
$= d^4k^4(k^2-1)^2$

ডানপক্ষ $= (b^2-c^2)^2$
$= \{(dk^2)^2-(dk)^2\}^2$
$= \{d^2k^4-d^2k^2\}^2$
$= \{d^2k^2(k^2-1)\}^2$
$= d^4k^4(k^2-1)^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

**প্রয়োগ : 57.** যদি $\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

$\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$

$\therefore \frac{c(ay-bx)}{c^2} = \frac{b(cx-az)}{b^2} = \frac{a(bz-cy)}{a^2}$

$= \frac{c(ay-bx)+b(cx-az)+a(bz-cy)}{c^2+b^2+a^2} = \frac{cay-cbx+bcx-baz+abz-acy}{c^2+b^2+a^2} = 0$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

সুতরাং, $\frac{ay-bx}{c} = 0$ বা, $ay-bx=0$
বা, $ay = bx$ $\therefore \frac{y}{b} = \frac{x}{a}$

আবার, $\frac{cx-az}{b} = 0$ বা, $cx = az$ $\therefore \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$

$\therefore \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ [প্রমাণিত]

**বিকল্প প্রমাণ**

ধরি, $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}=k$ [যেখানে $k\neq 0$]

$\because ay-bx=ck,\ cx-az=bk$ এবং $bz-cy=ak$

$ay-bx=ck$ ________ (i) $\qquad cx-az=bk$ ________ (ii)

(i) নং সমীকরণকে c দ্বারা ও (ii) নং সমীকরণকে b দ্বারা গুণ করি এবং তারপর তাদের যোগ করি।

$acy-bcx=c^2k$

$bcx-abz=b^2k$

$a(cy-bz)=k(b^2+c^2)$

বা, $cy-bz=\frac{k}{a}(b^2+c^2)$

বা, $-ak=\frac{k}{a}(b^2+c^2)$ [$\because bz-cy=ak$]

বা, $-a^2k=kb^2+kc^2$

বা, $k(a^2+b^2+c^2)=0 \quad \therefore k=0 \quad [\because a^2+b^2+c^2\neq 0]$

সুতরাং, $\frac{ay-bx}{c}=0$ বা, $ay-bx=0$ বা, $ay=bx$ $\therefore \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

আবার, $\frac{cx-az}{b}=0$ বা, $cx-az=0$ বা, $cx=az$ $\therefore \frac{x}{a}=\frac{z}{c}$ $\qquad \therefore \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ **[প্রমাণিত]**

**প্রয়োগ : 58.** যদি $\frac{x}{a+b-c}=\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে প্রতিটি অনুপাত $=\frac{x+y+z}{a+b+c}$ [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 59.** যদি $\frac{bz+cy}{a}=\frac{cx+az}{b}=\frac{ay+bx}{c}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করি যে,

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)}=\frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$$

$$\frac{bz+cy}{a}=\frac{cx+az}{b}=\frac{ay+bx}{c}$$

বা, $$\frac{abz+acy}{a^2}=\frac{bcx+baz}{b^2}=\frac{cay+cbx}{c^2}$$

$$=\frac{(bcx+baz)+(cay+cbx)-(abz+acy)}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2bcx}{b^2+c^2-a^2}$$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

আবার একই ভাবে পাই,

প্রতিটি অনুপাত $=\frac{(abz+acy)+(acy+bcx)-(bcx+baz)}{a^2+c^2-b^2}=\frac{2acy}{c^2+a^2-b^2}$

এবং প্রতিটি অনুপাত $=\frac{(abz+acy)+(bcx+abz)-(acy+bcx)}{a^2+b^2-c^2}=\frac{2abz}{a^2+b^2-c^2}$

$\therefore \frac{2bcx}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2acy}{c^2+a^2-b^2}=\frac{2abz}{a^2+b^2-c^2}$ বা, $\frac{2abcx}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{2abcy}{b(c^2+a^2-b^2)}=\frac{2abcz}{c(a^2+b^2-c^2)}$

$\therefore \frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{y}{b(c^2+a^2-b^2)}=\frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$ [প্রত্যেকটিকে 2abc দ্বারা ভাগ করে পাই]

**প্রয়োগ : 60.** $x=\frac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2$ [প্রদত্ত $a\neq0, b\neq0$ এবং $a\neq b$]

$x=\frac{4ab}{a+b}$ বা, $\frac{x}{2a}=\frac{2b}{a+b}$ [উভয়পক্ষকে 2a দ্বারা ভাগ করে পাই]

সুতরাং, $\frac{x+2a}{x-2a}=\frac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$=\frac{a+3b}{b-a}$

আবার, $x=\frac{4ab}{a+b}$ বা, $\frac{x}{2b}=\frac{2a}{a+b}$ [উভয়পক্ষকে 2b দ্বারা ভাগ করে পাই]

সুতরাং, $\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$=\frac{3a+b}{a-b}$

$\therefore \frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{3b+a}{b-a}+\frac{3a+b}{a-b}=\frac{3b+a}{b-a}-\frac{3a+b}{b-a}=\frac{3b+a-3a-b}{b-a}=\frac{2b-2a}{b-a}=\frac{2(b-a)}{b-a}=2$

**প্রয়োগ : 61.** $\frac{a+b-c}{a+b}=\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a+b+c\neq0$ হলে, প্রমাণ করি যে $a=b=c$

$\frac{a+b-c}{a+b}=\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}$

বা, $1-\frac{c}{a+b}=1-\frac{a}{b+c}=1-\frac{b}{c+a}$

বা, $\frac{c}{a+b}=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}$ [প্রতিটি সংখ্যামালাকে 1 থেকে বিয়োগ করে পাই]

বা, $\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}$ [বিপরীত প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে পাই]

বা, $\frac{a+b+c}{c}=\frac{b+c+a}{a}=\frac{a+c+b}{b}$ [প্রতিটি অনুপাতে 1 যোগ করে পাই]

বা, $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ [যেহেতু $a+b+c\neq0$, সুতরাং, $a+b+c$ দ্বারা ভাগ করে পাই]

$\therefore a=b=c$ [বিপরীত প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে পাই] **[প্রমাণিত]**

**প্রয়োগ : 62.** $\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}$ হলে, দেখাই যে, প্রত্যেকটি অনুপাত $\frac{ay-bx}{a-b}$ -এর সমান।

$\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}$

$\frac{ay-bx}{a-b}$ অনুপাতে z না থাকায় z অপসারণের জন্যে প্রথম অনুপাতের উভয় পদকে a এবং দ্বিতীয় অনুপাতের উভয় পদকে b দ্বারা গুণ করে পাই,

$\frac{abz-acy}{ab-ac}=\frac{bcx-abz}{bc-ba}=\frac{abz-acy+bcx-abz}{ab-ac+bc-ba}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$=\frac{-acy+bcx}{-ac+bc}=\frac{-c(ay-bx)}{-c(a-b)}=\frac{ay-bx}{a-b}$

$\therefore \frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}=\frac{ay-bx}{a-b}$ **[প্রমাণিত]**

**প্রয়োগ : 63.** যদি $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে প্রতিটি অনুপাতের মান $\frac{1}{2}$ অথবা $(-1)$ -এর সমান।

ধরি, $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=k$ (যেখানে, $k\neq 0$)

সুতরাং, $x=k(y+z)$, $y=k(z+x)$ এবং $z=k(x+y)$

এখন, $x+y+z=k(y+z)+k(z+x)+k(x+y)$

বা, $x+y+z=k(y+z+z+x+x+y)$

বা, $x+y+z=2k(x+y+z)$

বা, $(x+y+z)-2k(x+y+z)=0$

বা, $(x+y+z)(1-2k)=0$

হয়, $x+y+z=0$

অথবা, $1-2k=0$

বা, $-2k=-1$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{1}{2}$

আবার, $x+y+z=0$ হলে, $y+z=-x$

$\therefore \frac{x}{y+z}=\frac{x}{-x}=-1$

আবার, $z+x=-y$; সুতরাং, $\frac{y}{z+x}=\frac{y}{-y}=-1$ এবং $x+y=-z$; সুতরাং, $\frac{z}{x+y}=\frac{z}{-z}=-1$

$\therefore \frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$ হলে প্রতিটি অনুপাতের মান $\frac{1}{2}$ অথবা $(-1)$ -এর সমান।

**প্রয়োগ : 64.** যদি $\frac{b}{a+b}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c}$ হয়, (যেখানে $a+b+c\neq 0$) তবে দেখাই যে, $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$

$\frac{b}{a+b}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c}$

বা, $\frac{2b}{2(a+b)}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{2(a+b+c)}{2(2a+b+2c)}=\frac{2b+a+c-b+2a+2b+2c}{2a+2b+b+c-a+4a+2b+4c}$ [সংযোজন প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$=\frac{3(a+b+c)}{5(a+b+c)}=\frac{3}{5}$ ($\because a+b+c\neq 0$)

সুতরাং, $\frac{b}{a+b}=\frac{3}{5}$ বা, $5b=3a+3b$

বা, $2b=3a$ $\therefore \frac{a}{2}=\frac{b}{3}$ ——— (i)

আবার, $\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{3}{5}$

বা, $5(a+c-b)=3(b+c-a)$

বা, $5a+5c-5b=3b+3c-3a$

বা, $8a-8b=-2c$

বা, $8a-12a=-2c$ [$\because 2b=3a$]

বা, $-4a=-2c$ $\therefore \frac{a}{2}=\frac{c}{4}$ ——— (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$ [প্রমাণিত]

**প্রয়োগ : 65.** যদি $\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b-c}{x+y-z}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

$\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b-c}{x+y-z}=\frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{y+z-x+z+x-y+x+y-z}$ [সংযোগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই]

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{a+b+c}{x+y+z}$

সুতরাং, $\frac{b+c-a}{y+z-x}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(b+c-a)}{(x+y+z)-(y+z-x)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2a}{2x}=\frac{a}{x}$

অনুরূপে, $\frac{c+a-b}{z+x-y}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(c+a-b)}{(x+y+z)-(z+x-y)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2b}{2y}=\frac{b}{y}$

এবং $\frac{a+b-c}{x+y-z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{(a+b+c)-(a+b-c)}{(x+y+z)-(x+y-z)}$ $\therefore$ প্রতিটি অনুপাত $=\frac{2c}{2z}=\frac{c}{z}$

$\therefore \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ [প্রমাণিত]

**প্রয়োগ : 66.** যদি $(4a+5b)(4c-5d)=(4a-5b)(4c+5d)$ হয়, প্রমাণ করি যে a, b, c ও d সমানুপাতে আছে। [নিজে করি]

## কষে দেখি 5.3

1. $a:b=c:d$ হলে, দেখাই যে,

(i) $(a^2+b^2):(a^2-b^2)=(ac+bd):(ac-bd)$

(ii) $(a^2+ab+b^2):(a^2-ab+b^2)=(c^2+cd+d^2):(c^2-cd+d^2)$

(iii) $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=(pa+qc):(pb+qd)$

2. $x:a=y:b=z:c$ হলে, প্রমাণ করি যে,

(i) $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$ (ii) $\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{xyz}{abc}$

(iii) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$

3. $a:b=c:d=e:f$ হলে, প্রমাণ করি যে,

(i) প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{5a-7c-13e}{5b-7d-13f}$ (ii) $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2$

4. যদি $a:b=b:c$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে,

(i) $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ (ii) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$ (iii) $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}=1$

5. a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হলে, প্রমাণ করি যে,

(i) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$ (ii) $(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$

6. (i) যদি $\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$ হয়, তবে দেখাই যে, $(m^2+n^2)(a^2+b^2) = (am+bn)^2$

(ii) যদি $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ হয়, তবে দেখাই যে, $(a+b)(a^2+b^2)x^3 = (x+y)(x^2+y^2)a^3$

(iii) যদি $\frac{x}{\ell m-n^2} = \frac{y}{mn-\ell^2} = \frac{z}{n\ell-m^2}$ হয়, তবে দেখাই যে, $\ell x+my+nz = 0$

(iv) $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$ হলে, দেখাই যে, $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z = 0$

(v) $\frac{x}{y} = \frac{a+2}{a-2}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{4a}{a^2+4}$

(vi) $x = \frac{8ab}{a+b}$ হলে, $\left(\frac{x+4a}{x-4a} + \frac{x+4b}{x-4b}\right)$-এর মান হিসাব করে লিখি।

7. (i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{a+b+c}{c} = 2$

(ii) $\frac{a}{q-r} = \frac{b}{r-p} = \frac{c}{p-q}$ হলে, দেখাই যে, $a+b+c = 0 = pa+qb+rc$

(iii) $\frac{ax+by}{a} = \frac{bx-ay}{b}$ হলে, দেখাই যে প্রতিটি অনুপাত x-এর সমান।

8. (i) যদি $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+d}{d+a}$ হয়, তবে প্রমাণ করি যে, $c=a$ অথবা $a+b+c+d = 0$

(ii) যদি $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$ হয়, দেখাই যে, $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$

(iii) $\frac{x+y}{3a-b} = \frac{y+z}{3b-c} = \frac{z+x}{3c-a}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}$

(iv) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ হলে, দেখাই যে, $\frac{x^2-yz}{a^2-bc} = \frac{y^2-zx}{b^2-ca} = \frac{z^2-xy}{c^2-ab}$

9. (i) যদি $\frac{3x+4y}{3u+4v} = \frac{3x-4y}{3u-4v}$ হয়, তবে দেখাই যে $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$

(ii) $(a+b+c+d):(a+b-c-d) = (a-b+c-d):(a-b-c+d)$ হলে, প্রমাণ করি যে, $a:b = c:d$

10. (i) $\frac{a^2}{b+c} = \frac{b^2}{c+a} = \frac{c^2}{a+b} = 1$ হলে, দেখাই যে, $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$

(ii) $x^2:(by+cz) = y^2:(cz+ax) = z^2:(ax+by) = 1$ হলে, দেখাই যে, $\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+y} + \frac{c}{c+z} = 1$

11. (i) $\frac{x}{xa+yb+zc} = \frac{y}{ya+zb+xc} = \frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x+y+z \neq 0$ হলে, দেখাই যে, প্রতিটি অনুপাত $\frac{1}{a+b+c}$ -এর সমান।

(ii) $\frac{x^2-yz}{a} = \frac{y^2-zx}{b} = \frac{z^2-xy}{c}$ হলে, প্রমাণ করি যে, $(a+b+c)(x+y+z) = ax+by+cz$

(iii) $\frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}$ হলে, প্রমাণ করি যে, $\frac{a(b-c)}{y^2-z^2}=\frac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\frac{c(a-b)}{x^2-y^2}$

12. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q) :

(i) 3, 4 এবং 6-এর চতুর্থ সমানুপাতী (a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 24

(ii) 8 এবং 12-এর তৃতীয় সমানুপাতী (a) 12 (b) 16 (c) 18 (d) 20

(iii) 16 এবং 25-এর মধ্য সমানুপাতী (a) 400 (b) 100 (c) 20 (d) 40

(iv) a একটি ধনাত্মক সংখ্যা এবং $a:\frac{27}{64}=\frac{3}{4}:a$ হলে, a-এর মান

(a) $\frac{81}{256}$ (b) 9 (c) $\frac{9}{16}$ (d) $\frac{16}{9}$

(v) $2a=3b=4c$ হলে, $a:b:c$ হবে (a) 3:4:6 (b) 4:3:6 (c) 3:6:4 (d) 6:4:3

(B) নীচের বিবৃতিগুলি সত্য না মিথ্যা লিখি :

(i) $ab:c^2$, $bc:a^2$ এবং $ca:b^2$ -এর যৌগিক অনুপাত 1 : 1

(ii) $x^3y$, $x^2y^2$ এবং $xy^3$ ক্রমিক সমানুপাতী।

(C) শূন্যস্থান পূরণ করি :

(i) তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী ধনাত্মক সংখ্যার গুণফল 64 হলে, তাদের মধ্যসমানুপাতী ________

(ii) $a:2=b:5=c:8$ হলে a-এর 50% = b-এর 20% = c-এর ________ %

(iii) (x+2) এবং (x–3) এর মধ্য সমানুপাতী x হলে, x-এর মান ________

13. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (S.A.)**

(i) $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{2a-3b+4c}{p}$ হলে, p-এর মান নির্ণয় করি।

(ii) $\frac{3x-5y}{3x+5y}=\frac{1}{2}$ হলে, $\frac{3x^2-5y^2}{3x^2+5y^2}$ -এর মান নির্ণয় করি।

(iii) $a:b=3:4$ এবং $x:y=5:7$ হলে, $(3ax-by):(4by-7ax)$ কত নির্ণয় করি।

(iv) x, 12, y, 27 ক্রমিক সমানুপাতী হলে, x ও y-এর ধনাত্মক মান নির্ণয় করি।

(v) $a:b=3:2$ এবং $b:c=3:2$ হলে, $a+b:b+c$ কত নির্ণয় করি।

# 6 চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সমহার বৃদ্ধি বা হ্রাস

## COMPOUND INTEREST AND UNIFORM RATE OF INCREASE OR DECREASE

আমাদের পাড়ার বাপ্পাদা সাইকেল কেনার জন্য পাড়ার সমবায় ব্যাংক থেকে বার্ষিক 8% সুদে 1200 টাকা 2 বছরের জন্য ধার করেছেন।

**1** হিসাব করে দেখি 2 বছর পরে বাপ্পাদাকে মোট কত টাকা ফেরত দিতে হবে?

2 বছরের সুদ $= \frac{1200 \times 8 \times 2}{100}$ টাকা $= \square$ টাকা

$\therefore$ 2 বছর পরে বাপ্পাদাকে মোট (1200 + 192) টাকা = 1392 টাকা ফেরত দিতে হবে।

কিন্তু 2 বছর পরে বাপ্পাদাকে মোট 1399.68 টাকা ফেরত দিতে হলো।

**2** এমন হলো কেন? অর্থাৎ 2 বছরে সুদ-আসলে কীভাবে মোট টাকার পরিমাণ 1392 টাকার চেয়ে বেশি হলো হিসাব করে দেখি।

ওই সমবায় ব্যাংক বাপ্পাদাদাকে 1200 টাকা 2 বছরের জন্য বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি সুদে (Compound interest) ধার দিয়েছিলেন।

**3** চক্রবৃদ্ধি সুদ কী?

বাস্তবে সুদ দুই ধরনের হয়ে থাকে — (i) সরল সুদ (ii) চক্রবৃদ্ধি সুদ।

সরল সুদ : কেবল আসল বা মূলধনের উপর সুদ ধার্য হলে তাকে সরল সুদ বলা হয়। [Simple Interest]

চক্রবৃদ্ধি সুদ : কোনো নির্দিষ্ট সময় শেষে অর্জিত সুদ মূলধন বা আসলের সঙ্গে যুক্ত করে ওই সুদ-আসল বা সবৃদ্ধিমূলকে পরবর্তী নির্দিষ্ট সময়ের জন্য নতুন আসল বা মূলধন হিসাবে গণ্য করে পুনরায় যখন সুদ হিসাব করা হয় তখন সেই সুদকে চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest) বলা হয়।

**4** চক্রবৃদ্ধি সুদ কত সময়ের শেষে প্রাপ্য হবে কীভাবে জানব?

যে সময়ের শেষে চক্রবৃদ্ধি সুদ প্রাপ্য হবে তাকে চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব (Interest Period of Compound interest) বলে। চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব সাধারণত 3 মাস, 6 মাস, 1 বছর হয়ে থাকে। চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে কোনো পর্বের উল্লেখ না থাকলে চক্রবৃদ্ধি সুদ বছরের শেষে দেয় বলে ধরা হয়ে থাকে অর্থাৎ সাধারণত সুদের পর্ব 1 বছর ধরা হয়।

**5** সমূল চক্রবৃদ্ধি কী?

আসল বা মূলধন এবং কোনো নির্দিষ্ট সময়ের চক্রবৃদ্ধি সুদের সমষ্টিকে সমূল চক্রবৃদ্ধি বলা হয়।

বাপ্পাদার, প্রথম বছরের আসল = 1200 টাকা

প্রথম বছরের সুদ $= (1200 \times \frac{8}{100})$ টাকা = 96 টাকা

দ্বিতীয় বছরের আসল = (1200 + 96) টাকা = 1296 টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের সুদ $= (1296 \times \frac{8}{100})$ টাকা = 103.68 টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = (1296 + 103.68) টাকা = 1399.68 টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে আসল বা মূলধন সবসময় এক থাকে না এবং প্রত্যেক সুদ পর্বের শেষে আসল বা মূলধন পরিবর্তিত হয়।

**প্রয়োগ : 1.** আমি যদি বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদে 1400 টাকা 2বছরের জন্য ধার নিই, তবে কত টাকা চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সমূল চক্রবৃদ্ধি দেবো হিসাব করে লিখি।

| | | | |
|---|---|---|---|
| ধরি, | প্রথম বছরের আসল | = | 100.00 টাকা |
| | প্রথম বছরের 5% সুদ | = | 5.00 টাকা |
| | দ্বিতীয় বছরের আসল | = | 105.00 টাকা |
| | দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ | = | 5.25 টাকা $[105 \times \frac{5}{100}$ টাকা$]$ |
| | 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি | = | 110.25 টাকা |

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (110.25 – 100.00) টাকা অথবা (5.00 + 5.25) টাকা = 10.25 টাকা

এখন গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

| আসল (টাকায়) | চক্রবৃদ্ধি সুদ (টাকায়) |
|---|---|
| 100 | 10.25 |
| 1400 | ? |

100 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ 10.25 টাকা

1 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{10.25}{100}$ টাকা

1400 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{10.25 \times 1400}{100} = \square$ টাকা

($\because$ আসল ও চক্রবৃদ্ধি সুদের মধ্যে $\square$ সম্পর্ক [সরল/ব্যস্ত] আছে)

$\therefore$ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি সুদ 143.50 টাকা এবং সমূল চক্রবৃদ্ধি (1400 + 143.50) টাকা = $\square$ টাকা

| | | | |
|---|---|---|---|
| **বিকল্প পদ্ধতি,** | প্রথম বছরের আসল | = | 1400.00 টাকা |
| | প্রথম বছরের সুদ | = | 70.00 টাকা $[\because 1400 \times \frac{5}{100}$ টাকা$]$ |
| | দ্বিতীয় বছরের মূলধন | = | 1470.00 টাকা |
| | দ্বিতীয় বছরের সুদ | = | 73.50 টাকা $[\because 1470 \times \frac{5}{100}$ টাকা$]$ |
| | 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি | = | 1543.50 টাকা |

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (1543.50 – 1400.00) টাকা
অথবা (70.00 + 73.50) টাকা = 143.50 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করে কী পাই দেখি

মনে করি আসল = p টাকা, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার = r%

$\therefore$ প্রথম বছরের শেষে সুদ = $\frac{p \times r \times 1}{100}$ টাকা

প্রথম বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p + \frac{pr}{100} = p\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ টাকা

দ্বিতীয় বছরের মূলধন = $p\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শেষে সুদ = $\left\{\dfrac{p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)\times r\times 1}{100}\right\}$ টাকা

দ্বিতীয় বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $\left\{p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)+\dfrac{p\left(1+\dfrac{r}{100}\right)\times r\times 1}{100}\right\}$ টাকা

$= p\left(1+\frac{r}{100}\right)\left\{1+\frac{r}{100}\right\}$ টাকা

$= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ টাকা

$\therefore$ পেলাম 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ টাকা ------------------- (I)

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\left\{p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 - p\right\}$ টাকা

$= p\left\{1^2+\left(2\times1\times\frac{r}{100}\right)+\left(\frac{r}{100}\right)^2 - 1^2\right\}$ টাকা

$= p\,\frac{r}{100}\left(2+\frac{r}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ $p = 1400$ টাকা, $r = 5$ হলে,

(I) থেকে পাই, 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $1400\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$ টাকা

$= 1400 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (1543.50 – 1400.00) টাকা = 143.50 টাকা

**প্রয়োগ :2.** মূলধন p এবং বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার r% হলে 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে হিসাব করি।

(I) থেকে পেলাম, তৃতীয় বছরের মূলধন = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

$\therefore$ 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 + p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \times \frac{r}{100}$

$= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$

$\therefore$ 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$ ------------------- (II)

$\therefore$ n বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$
যেখানে, p = মূলধন, r = শতকরা বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার এবং n = সময় (বছরে)

**প্রয়োগ :3.** বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 1000 টাকার 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ :4.** বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 4000 টাকা একটি ব্যাংকে থাকলে, 3 বছর পর চক্রবৃদ্ধি সুদ কত পাব হিসাব করে লিখি।

ধরি প্রথম বছরের মূলধন = 4000.00 টাকা

প্রথম বছরের 5% সুদ = 200.00 টাকা ($\because 4000\times\frac{5}{100}$ টাকা)

দ্বিতীয় বছরের আসল = 4200.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ = 210.00 টাকা ($\because 4200\times\frac{5}{100}$ টাকা)

তৃতীয় বছরের আসল = 4410.00 টাকা

তৃতীয় বছরের 5% সুদ = 220.50 টাকা ($4410\times\frac{5}{100}$ টাকা)

3 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 4630.50 টাকা

$\therefore$ 3 বছর পর চক্রবৃদ্ধি সুদ পাব = 4630.50 টাকা – 4000 টাকা

= 630.50 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

ধরি, p = 4000 টাকা, r = 5 এবং n = 3 বছর,

(II) থেকে পেলাম, 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি $= p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ টাকা

$= 4000\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$ টাকা

$= 4000\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}$ টাকা

= ☐ টাকা

3 বছর পরে চক্রবৃদ্ধি সুদ পাব = (4630.50 – 4000) টাকা = ☐ টাকা

**প্রয়োগ : 5.** বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 10,000 টাকার 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 6.** যদি 6 মাস অন্তর সুদ আসলের সঙ্গে যুক্ত হয় তাহলে বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 8000 টাকার $1\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি ও চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।

প্রথম 6 মাসের আসল = 8000 টাকা

প্রথম 6 মাস বা $\frac{1}{2}$ বছরের 10% সুদ = 400 টাকা ($\because 8000\times\frac{10}{100}\times\frac{1}{2}$ টাকা)

দ্বিতীয় 6 মাসে আসল = 8400 টাকা

দ্বিতীয় 6 মাসে 10% সুদ = 420 টাকা ($\because 8400\times\frac{10}{100}\times\frac{1}{2}$ টাকা)

তৃতীয় 6 মাসে আসল = 8820 টাকা

তৃতীয় 6 মাসে 10% সুদ = 441 টাকা ($\because 8820\times\frac{10}{100}\times\frac{1}{2}$ টাকা)

$\therefore 1\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 9261 টাকা

$\therefore 1\frac{1}{2}$ বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ = (9261 টাকা – 8000 টাকা) = 1261 টাকা

অন্যভাবে হিসাব করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, মূলধন = p টাকা, বার্ষিক সুদের হার = r%

$\therefore$ প্রথম 6 মাস বা $\frac{1}{2}$ বছরের শেষে সুদ = $\frac{p\times r\times \frac{1}{2}}{100}$ টাকা

$\therefore$ প্রথম 6 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $\left(p+\frac{p\times \frac{r}{2}}{100}\right)$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় 6 মাসে মূলধন = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)$ টাকা

দ্বিতীয় 6 মাসের শেষে সুদ = $\frac{p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)\times r\times \frac{1}{2}}{100}$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় 6 মাস বা 1 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)^2$ টাকা $= p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{2\times 1}$

একইভাবে, তৃতীয় 6 মাসে বা $1\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)^3$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{2\times\frac{3}{2}}$ টাকা

বুঝেছি, বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে অর্জিত সুদ যাণ্মাসিক বা বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব 2 হলে n বছরের

সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{2}}{100}\right)^{2n}$ ------------------ (III)

ধরি, p = 8000 টাকা r = 10, n = $1\frac{1}{2}$ বছর = $\frac{3}{2}$ বছর

$\therefore$ (III থেকে পেলাম), $1\frac{1}{2}$ বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $8000\left(1+\frac{\frac{10}{2}}{100}\right)^{\frac{3}{2}\times 2}$ টাকা $= 8000\,(1+\frac{5}{100})^3$ টাকা

$= 8000\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100}\times\frac{105}{100} = \square$ টাকা

$\therefore$ $1\frac{1}{2}$ বছরের নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\square$ টাকা **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ :7.** 6 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 1000 টাকার 1 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ :8.** 3 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 10000 টাকার 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।

প্রথম 3 মাসে আসল = 10000.00 টাকা

প্রথম 3 মাস বা $\frac{1}{4}$ বছরের 8% সুদ = 200.00 টাকা $[\because 10000 \times \frac{8}{100} \times \frac{1}{4}$ টাকা$]$

দ্বিতীয় 3 মাসে আসল = 10200.00 টাকা

দ্বিতীয় 3 মাসের 8% সুদ = 204.00 টাকা $[\because 10200 \times \frac{8}{100} \times \frac{1}{4}$ টাকা$]$

তৃতীয় 3 মাসে আসল = 10404.00 টাকা

তৃতীয় 3 মাসের 8% সুদ = 208.08 টাকা $[\because 10404 \times \frac{8}{100} \times \frac{1}{4}$ টাকা$]$

$\therefore$ 9 মাসের সমূল চক্রবৃদ্ধি = 10612. 08 টাকা

$\therefore$ 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ = 10612.08 টাকা – 10000.00 টাকা = 612.08 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

ধরি, মূলধন = p টাকা, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার = r%

প্রথম 3 মাসে বা $\frac{1}{4}$ বছরের শেষে সুদ = $\frac{p\times r\times \frac{1}{4}}{100}$ টাকা

প্রথম 3 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $\left(p+\frac{p\times r\times \frac{1}{4}}{100}\right)$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4\times\frac{1}{4}}$ টাকা

($\because$ 3 মাস = $\frac{1}{4}$ বছর)

$\therefore$ দ্বিতীয় 3 মাসের মূলধন = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় 3 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)+\frac{p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)\times r\times\frac{1}{4}}{100}$ টাকা

$= p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{2}$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4\times\frac{2}{4}}$ ($\because$ 6 মাস = $\frac{2}{4}$ বছর)

একইভাবে, তৃতীয় 3 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{3}$ টাকা = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4\times\frac{3}{4}}$ টাকা ($\because$ 9 মাস = $\frac{3}{4}$ বছর)

বুঝেছি, বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে অর্জিত সুদ ত্রৈমাসিক অর্থাৎ বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদের পর্ব 4 হলে n বছরের

সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{\frac{r}{4}}{100}\right)^{4n}$ ———— (IV)

ধরি, p = 10000 টাকা, r = 8 এবং $n = \frac{9}{12}$ বছর = $\frac{3}{4}$ বছর

∴ (IV থেকে পেলাম), 9 মাসে বা $\frac{3}{4}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $10000\left(1+\frac{\frac{8}{4}}{100}\right)^{4\times\frac{3}{4}}$ টাকা

$= 10000\,(1 + \frac{2}{100})^3$ টাকা

$= 10000 \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100}$ টাকা

= ☐ টাকা

∴ 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (☐ – ☐) টাকা = ☐ টাকা **[নিজে লিখি]**

বি: দ্র: — এখানে উল্লেখযোগ্য যে, চক্রবৃদ্ধি সুদ সংক্রান্ত বর্তমান পাঠ্যসূচির আলোচনা সর্বসাকুল্যে কেবলমাত্র চক্রবৃদ্ধি সুদের 3টি পর্বের মধ্যে এবং মোট জমার 3 বছরের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে।

**প্রয়োগ :9.** রোকেয়াবিবি 30000 টাকা 3 বছরের জন্য এমনভাবে ধার করলেন যে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বছরে বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যথাক্রমে 4% , 5% ও 6%; 3 বছরের শেষে রোকেয়াবিবি সুদে-আসলে কত টাকা জমা দেবেন হিসাব করে লিখি।

ধরি প্রথম বছরের আসল = 100.00 টাকা

প্রথম বছরের 4% সুদ = 4.00 টাকা [∵ $100 \times \frac{4}{100}$ টাকা]

---

দ্বিতীয় বছরের আসল = 104.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ = 5.20 টাকা [∵ $104 \times \frac{5}{100}$ টাকা]

---

তৃতীয় বছরের আসল = 109.20 টাকা

তৃতীয় বছরের 6% সুদ = 6.552 টাকা [∵ $109.20 \times \frac{6}{100}$ টাকা]

---

∴ 3 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = 115.752 টাকা

∴ চক্রবৃদ্ধি সুদ = (115.752 – 100.00) টাকা অথবা (4.00 + 5.20 + 6.552) টাকা = 15.752 টাকা

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি,

| আসল (টাকায়) | চক্রবৃদ্ধি সুদ (টাকায়) |
|---|---|
| 100 | 15.752 |
| 30000 | ? |

100 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ 15.752 টাকা

1 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{15.752}{100}$ টাকা

30000 টাকা আসল হলে চক্রবৃদ্ধি সুদ $\frac{15.752 \times 30000}{100}$ টাকা = 4725.60 টাকা

∴ 3 বছরের শেষে রোকেয়াবিবিকে সুদে-আসলে দিতে হবে= (30000 + 4725.60) টাকা

= 34725.60 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করে কী পাই দেখি।

ধরি, আসল = p টাকা এবং প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বছরের বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যথাক্রমে $r_1\%$, $r_2\%$ এবং $r_3\%$

$\therefore$ প্রথম বছরের সুদ $= \frac{p \times r_1 \times 1}{100}$ টাকা $= \frac{pr_1}{100}$ টাকা

$\therefore$ প্রথম বছরের সুদাসল $= p + \frac{pr_1}{100} = p\left(1 + \frac{r_1}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের আসল $= p\left(1 + \frac{r_1}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ $= \dfrac{p\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\times r_2 \times 1}{100}$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শেষে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= \left[p\left(1+\frac{r_1}{100}\right) + \dfrac{p\left(1+\frac{r_1}{100}\right)\times r_2}{100}\right]$ টাকা

$= p\left(1 + \frac{r_1}{100}\right)\left(1 + \frac{r_2}{100}\right)$ টাকা

$\therefore$ একইভাবে পাই, 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি $= p\left(1 + \frac{r_1}{100}\right)\left(1 + \frac{r_2}{100}\right)\left(1 + \frac{r_3}{100}\right)$ টাকা

ধরি, $p = 30000$, $r_1 = 4\%$, $r_2 = 5\%$ এবং $r_3 = 6\%$

$\therefore$ 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 30000 \times \left(1+\frac{4}{100}\right)\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1+\frac{6}{100}\right)$ টাকা

$= 30000 \times \frac{104}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{106}{100}$ টাকা $=$ ☐ টাকা

$\therefore$ 3 বছরের শেষে রোকেয়াবিবি সুদে-আসলে 34725.60 টাকা ফেরত দেবেন।

**প্রয়োগ : 10.** যদি বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার প্রথম বছর 4% এবং দ্বিতীয় বছর 5% হয়, তবে 25000 টাকার 2 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 11.** আমি বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 10000 টাকা $2\frac{1}{2}$ বছরের জন্য ধার নিয়েছি। সুদে-আসলে কত টাকা দিতে হবে হিসাব করে লিখি।

প্রথম 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= p\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$ [p = 10000 টাকা, r = 4]

$= 10000\left(1 + \frac{4}{100}\right)^2$ টাকা $\quad = 10000 \times \frac{104}{100} \times \frac{104}{100}$ টাকা

$= 10816$ টাকা

2 বছরের শেষে মূলধন = 10816 টাকা

পরবর্তী $\frac{1}{2}$ বছরের সুদ $= \dfrac{10816 \times 4 \times \frac{1}{2}}{100}$ টাকা $= 216.32$ টাকা

$\therefore$ $2\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= (10816 + 216.32)$টাকা $=$ ☐ টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

$2\frac{1}{2}$ বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 10000\,(1+\frac{4}{100})^2$ টাকা $+ 10000\,(1+\frac{4}{100})^2 \times \frac{6}{12} \times \frac{4}{100}$ টাকা

$= 10000\,(1+\frac{4}{100})^2\,(1 + \frac{6}{12} \times \frac{4}{100})$টাকা

$= 10000 \times \frac{104\times104}{100\times100} \times \frac{102}{100}$ টাকা $= \frac{1103232}{100}$ টাকা $= 11032.32$ টাকা

**প্রয়োগ : 12.** বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 30000 টাকার $2\frac{1}{2}$ বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে নির্ণয় করি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 13.** বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 246 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।

| | |
|---|---|
| ধরি, প্রথম বছরের আসল | = 100.00 টাকা |
| প্রথম বছরের 5% সুদ | = 5.00 টাকা |
| দ্বিতীয় বছরের আসল | = 105.00 টাকা |
| দ্বিতীয় বছরের 5% সুদ | = 5.25 টাকা [$\because 105\times\frac{5}{100}$ টাকা ] |
| $\therefore$ 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি | = 110.25 টাকা |

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = (110.25 – 100.00) টাকা = 10.25 টাকা

$\therefore$ গণিতের ভাষায় সম্পর্কটি হলো,

| চক্রবৃদ্ধি সুদ (টাকা) | আসল (টাকা) |
|---|---|
| 10.25 | 100 |
| 246 | ? |

চক্রবৃদ্ধি সুদ 10.25 টাকা হলে আসল 100 টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ 1 টাকা হলে আসল $\frac{100}{10.25}$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ 246 টাকা হলে আসল $\frac{100\times246}{10.25}$ টাকা = 2400 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি।

ধরি, আসল = x টাকা

বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= x\,(1 + \frac{5}{100})^2$ টাকা

$= x \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ টাকা $= \frac{441x}{400}$ টাকা

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ $= (\frac{441x}{400} - x)$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{441x}{400} - x = 246$

বা, $\frac{441x-400x}{400} = 246$

বা, $\frac{41x}{400} = 246$

$\therefore x = \frac{246\times400}{41} = 2400$

$\therefore$ আসল 2400 টাকা।

**প্রয়োগ : 14.** কত টাকা বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 2 বছর পরে সুদে-আসলে 3528 টাকা হবে হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 15.** বার্ষিক 4% হার সুদে কত টাকার 2 বছরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদের অন্তর 80 টাকা হবে হিসাব করে লিখি।

ধরি, আসল = 100 টাকা

$\therefore$ বার্ষিক 4% সরল সুদের হারে 100 টাকার 2 বছরের সুদ = $\frac{100 \times 2 \times 4}{100}$ টাকা = 8 টাকা

বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 100 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ

$= \left\{100\left(1+\frac{4}{100}\right)^2 - 100\right\}$ টাকা

$= 100\left\{\left(\frac{26}{25}\right)^2 - 1\right\}$ টাকা $= 100\left(\frac{676}{625} - 1\right)$ টাকা $= \frac{100 \times 51}{625}$ টাকা $= \frac{204}{25}$ টাকা $= 8.16$ টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর = (8.16 – 8.00) টাকা = 0.16 টাকা।

$\therefore$ গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

| সুদের অন্তর (টাকায়) | আসল (টাকায়) |
|---|---|
| 0.16 | 100 |
| 80 | ? |

চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 0.16 টাকা হলে আসল 100 টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 1 টাকা হলে আসল $\frac{100}{0.16}$ টাকা

চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 80 টাকা হলে আসল $\frac{100 \times 80}{0.16}$ টাকা = 50000 টাকা

$\therefore$ আসল 50000 টাকা

আমি অন্য পদ্ধতিতে হিসাব করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, আসল = x টাকা

$\therefore$ 4% হারে 2 বছরের সরল সুদ = $\frac{x \times 4 \times 2}{100}$ টাকা = $\frac{2x}{25}$ টাকা

4% হারে 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $x\left(1+\frac{4}{100}\right)^2$ টাকা

$= x \times \frac{104}{100} \times \frac{104}{100}$ টাকা $= \frac{676x}{625}$ টাকা

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\left(\frac{676x}{625} - x\right)$ টাকা = $\frac{51x}{625}$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{51x}{625} - \frac{2x}{25} = 80$

বা, $\frac{51x - 50x}{625} = 80$

বা, $x = 80 \times 625$

$\therefore x = 50000$

$\therefore$ আসল 50000 টাকা

**প্রয়োগ :16.** মিনতিদি বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকা 3 বছরের জন্য ব্যাংকে রেখে মেয়াদ শেষে 37791.36 টাকা পেলেন। মিনতিদি কত টাকা ব্যাংকে রেখেছিলেন হিসাব করে লিখি।

মনে করি, মিনতিদিদি x টাকা ব্যাংকে জমা রেখেছিলেন।

বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 3 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি = $x\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$ টাকা = $x \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100}$ টাকা

$\therefore$ শর্তানুসারে, $x \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} = 37791.36$

বা, $\frac{x \times 27 \times 27 \times 27}{25 \times 25 \times 25} = 37791.36$

বা, $x = \frac{37791.36 \times 25 \times 25 \times 25}{27 \times 27 \times 27}$ $\quad \therefore x = 30000$

$\therefore$ মিনতিদিদি 30000 টাকা ব্যাংকে রেখেছিলেন।

**প্রয়োগ :17.** আমি অন্যভাবে হিসাব করে দেখি মিনতিদি ব্যাংকে 30000 টাকা রেখেছিলেন। [নিজে করি]

**প্রয়োগ :18.** কোনো মূলধনের 2 বছরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদ যথাক্রমে 400 টাকা ও 410 টাকা হলে, ওই মূলধনের পরিমাণ ও শতকরা বার্ষিক সুদের হার নির্ণয় করি।

2 বছরের সরল সুদ = 400 টাকা

1 বছরের সরল সুদ = (400 ÷ 2) টাকা = 200 টাকা

2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের পার্থক্য = (410 – 400) টাকা = 10 টাকা

$\therefore$ 200 টাকার 1 বছরের সুদ = 10 টাকা

100 টাকার 1 বছরের সুদ = (10 ÷ 2) টাকা = 5 টাকা

$\therefore$ বার্ষিক সুদের হার = 5%

গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

| আসল (টাকায়) | সময় (বছরে) | সুদ (টাকায়) |
|---|---|---|
| 100 | 1 | 5 |
| ? | 2 | 400 |

1 বছরে 5 টাকা সুদ হবে যখন আসল 100 টাকা

2 বছরে 5 টাকা সুদ হবে যখন আসল $\frac{100}{2}$ টাকা

2 বছরে 1 টাকা সুদ হবে যখন আসল $\frac{100}{2\times5}$ টাকা

2 বছরে 400 টাকা সুদ হবে যখন আসল $\frac{100\times400}{2\times5}$ টাকা = 4000 টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় মূলধন 4000 টাকা এবং বার্ষিক সুদের হার 5%

আমি অন্যভাবে হিসাব করে কী পাই দেখি।

ধরি, মূলধন p টাকা এবং বার্ষিক সুদের হার r%

$\therefore$ বার্ষিক r% সরল সুদে 2 বছরের সুদ = $\frac{p \times r \times 2}{100}$ টাকা = $\frac{2pr}{100}$ টাকা

আবার বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি = $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ টাকা

$\therefore$ 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = $\left[p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 - p\right]$ টাকা = $p\left[1+\frac{2r}{100}+\left(\frac{r}{100}\right)^2-1\right]$ টাকা

$= \frac{pr}{100}\left[2+\frac{r}{100}\right]$ টাকা

শর্তানুসারে, $\frac{2pr}{100} = 400$ .................. (i)

$\frac{pr}{100}[2 + \frac{r}{100}] = 410$ .................... (ii)

(ii) নং সমীকরণরকে (i) নং সমীকরণ দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{\frac{pr}{100}\left[2+\frac{r}{100}\right]}{\frac{2pr}{100}} = \frac{410}{400}$$

বা, $\frac{2+\frac{r}{100}}{2} = \frac{41}{40}$

বা, $80 + \frac{40r}{100} = 82$

বা, $\frac{2r}{5} = 82 - 80 = 2$

বা, $2r = 10 \quad \therefore r = 5$

$\therefore$ (i) নং সমীকরণ থেকে পেলাম, $\frac{2 \times p \times 5}{100} = 400 \quad \therefore p = 4000$

$\therefore$ মূলধন 4000 টাকা এবং সুদের হার 5%

**প্রয়োগ :19.** কোনো মূলধনের 2 বছরের সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদ যথাক্রমে 840 টাকা এবং 869.40 টাকা হলে, ওই মূলধনের পরিমাণ ও বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ :20.** বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত হলে 2 বছরে 10000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 11664 টাকা হবে তা নির্ণয় করি।

ধরি, বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার r%

$\therefore$ বার্ষিক r% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 10000(1 + \frac{r}{100})^2$

শর্তানুসারে, $10000(1 + \frac{r}{100})^2 = 11664$

বা, $(1 + \frac{r}{100})^2 = \frac{11664}{10000}$

বা, $(1 + \frac{r}{100})^2 = \frac{729}{625}$

বা, $(1 + \frac{r}{100})^2 = (\frac{27}{25})^2$

বা, $1 + \frac{r}{100} = \frac{27}{25}$

বা, $\frac{r}{100} = \frac{27}{25} - 1$

বা, $\frac{r}{100} = \frac{2}{25}$

বা, $r = \frac{200}{25} \quad \therefore r = 8$

$\therefore$ বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার 8%

**প্রয়োগ :21.** বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত হলে 2 বছরে 5000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5832 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

**প্রয়োগ :22.** বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত বছরে 4000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5324 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।

ধরি, বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে n বছরে 4000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5324 টাকা হবে।

$\therefore$ n বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি $= 4000\left(1+\frac{10}{100}\right)^n$ টাকা

শর্তানুসারে, $4000\left(1+\frac{10}{100}\right)^n = 5324$

বা, $\left(\frac{11}{10}\right)^n = \frac{5324}{4000}$

বা, $\left(\frac{11}{10}\right)^n = \frac{1331}{1000}$

বা, $\left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{11}{10}\right)^3$

$\therefore n = 3$

$\therefore$ বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 3 বছরে 4000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 5324 টাকা হবে।

**প্রয়োগ :23.** বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত বছরে 5000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 6050 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি। **[নিজে করি]**

## কষে দেখি 6.1

1. আমার কাছে 5000 টাকা আছে। আমি ওই টাকা একটি ব্যাংকে বার্ষিক 8.5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে জমা রাখলাম। 2 বছরের শেষে সুদে-আসলে মোট কত টাকা পাব হিসাব করে লিখি।
2. 5000 টাকার বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে নির্ণয় করি।
3. গৌতমবাবু 2000 টাকা বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 2 বছরের জন্য ধার নিয়েছেন। 2 বছর পরে তিনি কত টাকা চক্রবৃদ্ধি সুদ দেবেন তা হিসাব করে লিখি।
4. 30000 টাকার বার্ষিক 9% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি।
5. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 80000 টাকার $2\frac{1}{2}$ বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।
6. ছন্দাদেবী বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কিছু টাকা 2 বছরের জন্য ধার করেন। চক্রবৃদ্ধি সুদ 2496 টাকা হলে ছন্দাদেবী কত টাকা ধার করেছিলেন নির্ণয় করি।
7. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধির হার সুদে কোন আসলের 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 2648 হবে, তা হিসাব করে লিখি।
8. রহমতচাচা বার্ষিক 9% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কিছু টাকা সমবায় ব্যাংকে জমা রেখে 2 বছর পরে সুদে-আসলে 29702.50 টাকা ফেরত পেলেন। রহমতচাচা কত টাকা সমবায় ব্যাংকে জমা রেখেছিলেন নির্ণয় করি।

9. বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত টাকার 3 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি 31492.80 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।
10. বার্ষিক 7.5% সুদের হারে 12000 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর নির্ণয় করি।
11. 10,000 টাকার বার্ষিক 5% সুদের হারে 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের পার্থক্য হিসাব করে লিখি।
12. বার্ষিক 9% সুদের হারে কিছু টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 129.60 টাকা হলে, ওই টাকার পরিমাণ হিসাব করে লিখি।
13. যদি বার্ষিক 10% হারে কিছু টাকার 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সরল সুদের অন্তর 930 টাকা হয়, তবে ওই টাকার পরিমাণ কত হিসাব করে লিখি।
14. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যদি প্রথম বছর 7% এবং দ্বিতীয় বছর 8% হয়, তবে 6000 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।
15. বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার যদি প্রথম বছর 5% এবং দ্বিতীয় বছর 6% হয়, তবে 5000 টাকার 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি।
16. কোনো নির্দিষ্ট পরিমাণ মূলধনের 1 বছরের সরল সুদ 50 টাকা এবং 2 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 102 টাকা হলে, মূলধনের পরিমাণ ও বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি।
17. কোনো মূলধনের 2 বছরের সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদ যথাক্রমে 8400 টাকা এবং 8652 টাকা হলে মূলধন ও বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি।
18. 6 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 6000 টাকার 1 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করি।
19. 3 মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 6250 টাকার 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাব করে লিখি।
20. যদি 60000 টাকার 2 বছরে সমূল চক্রবৃদ্ধি 69984 টাকা হয়, তবে বার্ষিক সুদের হার হিসাব করে লিখি।
21. বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত বছরে 40000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 46656 টাকা হবে, তা নির্ণয় করি।
22. শতকরা বার্ষিক কত চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 10000 টাকার 2 বছরের সমূল চক্রবৃদ্ধি 12100 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।
23. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত বছরে 50000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 60500 টাকা হবে, তা নির্ণয় করি।
24. বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত বছরের 300000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 399300 টাকা হবে, তা হিসাব করে লিখি।
25. সুদের পর্ব 6 মাস হলে বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 1600 টাকার $1\frac{1}{2}$ বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ ও সুদ-আসল নির্ণয় করি।

গত বছরে আমাদের গ্রামে একটি কম্পিউটার প্রশিক্ষণ কেন্দ্র চালু হয়েছে। সেখানে খুব অল্প খরচে পঞ্চম থেকে দশম শ্রেণির ইচ্ছুক ছাত্রছাত্রীরা ও অন্যান্য ইচ্ছুক ব্যক্তিরা তাদের যোগ্যতা অনুযায়ী কম্পিউটারের বিভিন্ন বিষয়ে প্রাথমিক জ্ঞান লাভ করতে পারে।

**প্রয়োগ : 24.** বর্তমানে 4000 জন শিক্ষার্থী এই প্রশিক্ষণ কেন্দ্রে প্রশিক্ষণ নিচ্ছে। ঠিক করা হয়েছে যে পরবর্তী 2 বছরের প্রতি বছরে পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 5% বেশি শিক্ষার্থীকে এই প্রশিক্ষণ কেন্দ্রে প্রশিক্ষণের সুযোগ দেওয়া হবে। হিসাব করে দেখি পরবর্তী 2 বছরের শেষে কতজন শিক্ষার্থী এই প্রশিক্ষণে অংশগ্রহণের সুযোগ পাবে?

বর্তমান শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 4000 জন

প্রথম বছরে 5% বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ বাড়বে = 200 জন [$\because 4000 \times \frac{5}{100}$ জন = 200 জন]

দ্বিতীয় বছরের শুরুতে শিক্ষার্থী = 4200 জন

দ্বিতীয় বছরে 5% বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ বাড়বে = 210 জন [$\because 4200 \times \frac{5}{100}$ জন = 210 জন ]

দ্বিতীয় বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা হবে = 4410 জন

**6** সমহারে এই বৃদ্ধিকে কী বলা হয়?

সমহারে বৃদ্ধি ঘটলে তাকে সমহার বৃদ্ধি [Uniform rate of growth] এবং সমহারে হ্রাস ঘটলে তাকে সমহার হ্রাস বা অপচয় [Uniform rate of decrease or depreciation] বলা হয়।

জনসংখ্যা বৃদ্ধি, শিক্ষার্থীর সংখ্যা বৃদ্ধি, কৃষি ও শিল্পের উৎপাদন বৃদ্ধি প্রভৃতি সমহার বৃদ্ধির অন্তর্গত। আবার ক্রমাগত চলার ফলে যন্ত্রের ক্ষয়, অনেকদিনের ঘরবাড়ি, আসবাবপত্র, যানবাহন ইত্যাদি অস্থাবর সম্পত্তির মূল্য হ্রাস, সচেতনতা বৃদ্ধির ফলে রোগ ব্যাধির সংখ্যা হ্রাস প্রভৃতি সমহার হ্রাসের অন্তর্গত।

বিকল্প পদ্ধতি, বর্তমান শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 4000 জন

প্রথম বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা = $4000 \times \frac{105}{100}$ জন

দ্বিতীয় বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা = $4000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ জন = 4410 জন

দ্বিতীয় বছরের শেষে শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 4410 জন হবে।

সমহারে বৃদ্ধির সূত্র এবং চক্রবৃদ্ধি সুদের সূত্র একইরকম।

আমি $p(1+\frac{r}{100})^n$ সূত্রের সাহায্যে হিসাব করি ও কী পাই দেখি যেখানে p = বর্তমান জনসংখ্যা, r% = বছরে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার এবং n = বছরের সংখ্যা

মনে করি, ওই শহরের বর্তমান জনসংখ্যা p এবং জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার বছরে r%

$\therefore$ n বছর পরে জনসংখ্যা হবে = $p(1+\frac{r}{100})^n$

বুঝেছি, এখানে p = 4000 জন, r = 5 এবং n = 2 বছর

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শেষে মোট শিক্ষার্থী হবে = $4000 \times (1+\frac{5}{100})^2$ জন = $4000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$ জন

= ☐ জন

**প্রয়োগ : 25.** কোনো শহরে বছরের শেষে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার ওই বছরের শুরুতে যে জনসংখ্যা থাকে তার 2%; ওই শহরের বর্তমান জনসংখ্যা যদি 2000000 হয়, তবে 3 বছর পরে ওই শহরের জনসংখ্যা কত হবে হিসাব করে লিখি।

বর্তমান জনসংখ্যা = 2000000

প্রথম বছরে 2% হারে জনসংখ্যা বৃদ্ধি = 40000 $[\because 2000000 \times \frac{2}{100} = 40000]$

দ্বিতীয় বছরের শুরুতে জনসংখ্যা = 2040000

দ্বিতীয় বছরে 2% হারে জনসংখ্যা বৃদ্ধি = 40800 $[\because 2040000 \times \frac{2}{100} = 40800]$

তৃতীয় বছরের শুরুতে জনসংখ্যা = 2080800

তৃতীয় বছরে 2% হারে জনসংখ্যা বৃদ্ধি = 41616 $[\because 2080800 \times \frac{2}{100} = 41616]$

3 বছরের শেষে জনসংখ্যা = 2122416

$\therefore$ 3 বছর পরে জনসংখ্যা হবে 2122416.

আমি অন্যভাবে হিসাব করি,

ধরি, p = 2000000 জন, r = 2 এবং n = 3

$\therefore$ 3 বছর পর জনসংখ্যা $= 2000000\left(1+\frac{2}{100}\right)^3$

$= 2000000 \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100} \times \frac{102}{100}$

$= 2122416$

**প্রয়োগ : 26.** আমার কাকার কারখানার একটি মেশিনের মূল্য প্রতি বছর 10% হারে হ্রাস প্রাপ্ত হয়। মেশিনটির বর্তমান মূল্য 60000 টাকা হলে, 3 বছর পরে ওই মেশিনটির মূল্য কত হবে নির্ণয় করি।

ধরি, যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য = 100.00 টাকা

প্রথম বছর 10% মূল্য হ্রাস = 10.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরের শুরুতে হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য = 90.00 টাকা

দ্বিতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস = 9.00 টাকা $[\because 90 \times \frac{10}{100} = 9]$

তৃতীয় বছরের শুরুতে হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য = 81.00 টাকা

তৃতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস = 8.10 টাকা $[\because 81 \times \frac{10}{100} = 8.10]$

3 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য = 72.90 টাকা

$\therefore$ গণিতের ভাষায় সমস্যাটি হলো,

| বর্তমান মূল্য (টাকায়) | হ্রাস প্রাপ্ত মূল্য (টাকায়) |
|---|---|
| 100 | 72.90 |
| 60000 | ? |

বর্তমান মূল্য ও হ্রাসপ্রাপ্ত মূল্য সরল সম্পর্কে আছে।

$\therefore$ 3 বছর পর মেশিনটির মূল্য $= 72.90 \times \frac{60000}{100}$ টাকা = 43740 টাকা

বিকল্প পদ্ধতি,

| | | |
|---|---|---|
| যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য | = 60000 টাকা | |
| প্রথম বছরে 10% হ্রাস | = 6000 টাকা | [$\because 60000 \times \frac{10}{100} = 6000$] |
| দ্বিতীয় বছরের শুরুতে মূল্য | = 54000 টাকা | |
| দ্বিতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস | = 5400 টাকা | [$\because 54000 \times \frac{10}{100} = 5400$] |
| তৃতীয় বছরের শুরুতে মূল্য | = 48600 টাকা | |
| তৃতীয় বছরে 10% মূল্য হ্রাস | = 4860 টাকা | [$\because 48600 \times \frac{10}{100} = 4860$] |
| 3 বছর পর মূল্য | = 43740 টাকা | |

$\therefore$ 3 বছর পর মেশিনটির মূল্য 43740 টাকা

আমি অন্যভাবে হিসাব করি ও কী পাই দেখি।

ধরি, যন্ত্রটির বর্তমান মূল্য p টাকা, 1 বছরে হ্রাস পায় = r%

$\therefore$ প্রথম বছরে হ্রাস পায় = $\frac{p \times r}{100}$ টাকা

$\therefore$ দ্বিতীয় বছরের শুরুতে যন্ত্রটির মূল্য হয় = $\left(p - \frac{pr}{100}\right)$ টাকা = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)$ টাকা

দ্বিতীয় বছরে হ্রাস পায় $\frac{p\left(1-\frac{r}{100}\right)\times r}{100}$ টাকা

$\therefore$ তৃতীয় বছরের শুরুতে মূল্য হয় = $\left[p\left(1 - \frac{r}{100}\right) - \frac{pr}{100}\left(1 - \frac{r}{100}\right)\right]$ টাকা = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^2$ টাকা

একইভাবে, তৃতীয় বছরের শেষে মূল্য হবে = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^3$ টাকা

বুঝেছি, n বছর পরে যন্ত্রটির মূল্য হবে = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$

$\therefore$ 3 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য হবে = $p\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$ [যেখানে p = 60000 টাকা, r = 10% এবং n = 3]

$= 60000\left(1-\frac{10}{100}\right)^3$ টাকা $= 60000 \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100}$ টাকা = ☐ টাকা

$\therefore$ 3 বছর পর যন্ত্রটির মূল্য হবে 43740 টাকা।

**প্রয়োগ : 27.** একটি মোটর গাড়ির মূল্য 3 লাখ টাকা। গাড়িটির বাৎসরিক অপচয়ের হার 30% হলে, 3 বছর পরে গাড়িটির কী দাম হবে, তা হিসাব করে লিখি। [নিজে করি]

**প্রয়োগ : 28.** কোনো রাজ্যে পথ নিরাপত্তা সংক্রান্ত প্রচারাভিযানের মাধ্যমে পথ দুর্ঘটনা প্রতি বছর তার পূর্ব বছরের তুলনায় 10% হ্রাস পেয়েছে। বর্তমান বছরে ওই রাজ্যে যদি 2916 টি পথ দুর্ঘটনা ঘটে তবে 3 বছর পূর্বে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা কত ছিল, তা হিসাব করে লিখি।

মনে করি, 3 বছর পূর্বে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা ছিল x টি

$\therefore$ বর্তমানে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা = $x\left(1-\frac{10}{100}\right)^3$ টি

শর্তানুসারে, $x\left(1-\frac{10}{100}\right)^3 = 2916$

বা, $x \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} = 2916$ বা, $x = \frac{2916\times100\times100\times100}{90\times90\times90}$ $\therefore x = 4000$

$\therefore$ 3 বছর পূর্বে ওই রাজ্যে দুর্ঘটনার সংখ্যা ছিল 4000 টি।

**প্রয়োগ : 29.** একটি শহরের বর্তমান জনসংখ্যা 5,76,000; যদি জনসংখ্যা প্রতি বছর $6\frac{2}{3}$% হিসাবে বাড়ে তাহলে 2 বছর আগে জনসংখ্যা কত ছিল, তা নির্ণয় করি। [নিজে করি]

## কষে দেখি 6.2

1. পহলমপুর গ্রামের বর্তমান লোকসংখ্যা 10000; ওই গ্রামে প্রতি বছর জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার 3% হলে, 2 বছর পরে ওই গ্রামের জনসংখ্যা কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

2. কোনো একটি রাজ্যের প্রতি বছর জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার 2%; বর্তমান জনসংখ্যা 80000000 হলে, 3 বছর পরে ওই রাজ্যের জনসংখ্যা কত হবে, তা নির্ণয় করি।

3. পাড়ার একটি লেদ কারখানার একটি মেশিনের মূল্য প্রতি বছর 10% হ্রাস প্রাপ্ত হয়। মেশিনটির বর্তমান মূল্য 100000 টাকা হলে, 3 বছর পরে ওই মেশিনটির মূল্য কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

4. সর্বশিক্ষা অভিযানের ফলে বিদ্যালয় ছেড়ে চলে যাওয়া শিক্ষার্থীদের পুনরায় বিদ্যালয়ে ভর্তির ব্যবস্থা করা হয়েছে। এরূপ শিক্ষার্থীদের ভর্তির হার প্রতি বছর তার পূর্ববর্তী বছর অপেক্ষা 5% বৃদ্ধি পেয়েছে। কোনো এক জেলায় বর্তমান বছরে যদি 3528 জন এরূপ শিক্ষার্থী নতুন করে ভর্তি হয়ে থাকে, তবে 2 বছর পূর্বে এরূপ কত জন শিক্ষার্থী ভর্তি হয়েছিল, তা হিসাব করে লিখি।

5. পুরুলিয়া জেলায় পথ নিরাপত্তা সংক্রান্ত প্রচার অভিযানের মাধ্যমে পথ দুর্ঘটনা প্রতি বছর তার পূর্ব বছরের তুলনায় 10% হ্রাস পেয়েছে। বর্তমান বছরে এই জেলায় 8748 টি পথ দুর্ঘটনা ঘটে থাকলে, 3 বছর আগে পথ দুর্ঘটনার সংখ্যা কত ছিল, তা নির্ণয় করি।

6. একটি মৎস্যজীবী সমবায় সমিতি উন্নত প্রথায় মাছ চাষ করার জন্য এরূপ একটি পরিকল্পনা গ্রহণ করেছে যে কোনো বছরের মাছের উৎপাদন পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 10% বৃদ্ধি করবে। বর্তমান বছরে যদি ওই সমবায় সমিতি 400 কুইন্টাল মাছ উৎপাদন করে, তবে 3 বছর পরে সমবায় সমিতির মাছের উৎপাদন কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

7. একটি গাছের উচ্চতা প্রতি বছর 20% হারে বৃদ্ধি পায়। গাছটির বর্তমান উচ্চতা 28.8 মিটার হলে, 2 বছর আগে গাছটির উচ্চতা কত ছিল, তা নির্ণয় করি।

8. কোনো একটি পরিবার আজ থেকে 3 বছর পূর্বে বিদ্যুৎ অপচয় বন্ধ করতে ইলেকট্রিক বিলের খরচ পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 5% হ্রাস করার পরিকল্পনা গ্রহণ করে। 3 বছর পূর্বে ওই পরিবারকে বছরে 4000 টাকার ইলেকট্রিক বিল দিতে হয়েছিল। বর্তমান বছরে ইলেকট্রিক বিলে বিদ্যুৎ খরচ কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

9. শোভনবাবুর ওজন 80 কিগ্রা.। ওজন কমানোর জন্য তিনি নিয়মিত হাঁটা শুরু করলেন। তিনি ঠিক করলেন যে প্রতি বছরের প্রারম্ভে যা ওজন থাকবে তার 10% হ্রাস করবেন। 3 বছর পরে শোভনবাবুর ওজন কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

10. কোনো এক জেলার সমস্ত মাধ্যমিক শিক্ষাকেন্দ্রের (M.S.K) বর্তমান শিক্ষার্থীর সংখ্যা 3993 জন। প্রতি বছর বিগত বছরের তুলনায় যদি 10% শিক্ষার্থী বৃদ্ধি পেয়ে থাকে, তবে 3 বছর পূর্বে ওই জেলার সকল মাধ্যমিক শিক্ষাকেন্দ্রের শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত ছিল, তা নির্ণয় করি।

11. কৃষিজমিতে কেবলমাত্র রাসায়নিক সার ও কীটনাশক ব্যবহারের কুফল সম্পর্কে সচেতনতা বৃদ্ধির ফলে রসুলপুর গ্রামে কেবলমাত্র রাসায়নিক সার ও কীটনাশক ব্যবহারকারী কৃষকের সংখ্যা পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় 20% হ্রাস পায়। 3 বছর পূর্বে রসুলপুর গ্রামের ওরকম কৃষকের সংখ্যা 3000 জন হলে, বর্তমানে ওই গ্রামে ওরকম কৃষকের সংখ্যা কত হবে, তা নির্ণয় করি।

12. একটি কারখানার একটি মেশিনের মূল্য 180000 টাকা। মেশিনটির মূল্য প্রতি বছর 10% হ্রাস প্রাপ্ত হয়। 3 বছর পরে ওই মেশিনটির মূল্য কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

13. বকুলতলা গ্রামের পঞ্চায়েত সমিতি যেসব পরিবারে বিদ্যুৎ সংযোগ নেই তাদের বাড়িতে বিদ্যুৎ পৌঁছানোর পরিকল্পনা গ্রহণ করে। এই গ্রামে 1200 পরিবারের বিদ্যুৎ সংযোগ নেই। প্রতি বছর যদি পূর্ব বছরের তুলনায় 75% বিদ্যুৎহীন পরিবারে বিদ্যুৎ পৌঁছানোর ব্যবস্থা করা হয়, তবে 2 বছর পরে বকুলতলা গ্রামে বিদ্যুৎহীন পরিবারের সংখ্যা কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

14. বোতল ভর্তি ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারের উপর বিরূপ প্রতিক্রিয়া প্রচারের ফলে প্রতি বছর তার পূর্ববর্তী বছরের তুলনায় ওই ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারকারীর সংখ্যা 25% হ্রাস পায়। 3 বছর পূর্বে কোনো শহরে ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারকারীর সংখ্যা 80000 হলে, বর্তমান বছরে ঠান্ডা পানীয় ব্যবহারকারীর সংখ্যা কত হবে, তা হিসাব করে লিখি।

15. ধূমপান বিরোধী প্রচারের ফলে প্রতি বছর ধূমপায়ীর সংখ্যা $6\frac{1}{4}\%$ হারে হ্রাস পায়। বর্তমানে কোনো শহরে 33750 জন ধূমপায়ী থাকলে, 3 বছর পূর্বে ওই শহরে কত জন ধূমপায়ী ছিল, তা হিসাব করে লিখি।

16. **অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন (V.S.A.)**

(A) বহুবিকল্পীয় প্রশ্ন (M.C.Q.) :

(i) চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে প্রতি বছর বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার
(a) সমান (b) অসমান (c) সমান অথবা অসমান উভয়ই (d) কোনোটিই নয়

(ii) চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে
(a) প্রতি বছর আসল একই থাকে (b) প্রতি বছর আসল পরিবর্তিত হয়
(c) প্রতি বছর আসল একই থাকতে পারে অথবা পরিবর্তিত হতে পারে (d) কোনোটিই নয়

(iii) একটি গ্রামের বর্তমান জনসংখ্যা p এবং প্রতি বছর জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার 2r% হলে, n বছর পর জনসংখ্যা হবে
(a) $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ (b) $p\left(1+\frac{r}{50}\right)^n$ (c) $p\left(1+\frac{r}{100}\right)^{2n}$ (d) $p\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

(iv) একটি মেশিনের বর্তমান মূল্য 2p টাকা এবং প্রতি বছর মেশিনটির দাম 2r% হ্রাস হলে 2n বছর পরে মেশিনের দাম হবে
(a) $p\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$ টাকা (b) $2p\left(1-\frac{r}{50}\right)^n$ টাকা
(c) $p\left(1-\frac{r}{50}\right)^{2n}$ টাকা (d) $2p\left(1-\frac{r}{50}\right)^{2n}$ টাকা