5. એક છૂટક વેચાણ બજારમાં, ફળ વેચનારાઓ બંધ ખોખાંઓમાં કેરીઓ વેચી રહ્યા હતા. આ ખોખાંઓમાં કેરીઓ જુદી-જુદી સંખ્યાઓમાં હતી. ખોખાંઓની સંખ્યાના પ્રમાણમાં કેરીઓનું આવૃત્તિ વિતરણ નીચે પ્રમાણે હતું :

કેરીઓની સંખ્યા	50-52	53-55	56-58	59-61	62-64
ખોખાંઓની સંખ્યા	15	110	135	115	25

બંધ ખોખામાં મૂકેલ કેરીઓની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો. મધ્યક શોધવા માટે તમે કઈ રીત પસંદ કરી હતી ?

6. નીચેનું કોષ્ટક એક વિસ્તારમાં 25 પરિવારના ખોરાકનો દૈનિક ઘરગથ્થું ખર્ચ બતાવે છે :

દૈનિક ખર્ચ (₹ માં)	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
પરિવારોની સંખ્યા	4	5	12	2	2

પરિવારના ખોરાક પરના દૈનિક ઘરગથ્થું ખર્ચનો મધ્યક યોગ્ય રીતનો ઉપયોગ કરીને શોધો.

7. એક ચોક્કસ શહેરમાં 30 વિસ્તારોમાં હવામાં SO_2 ની સાંદ્રતા (ઘટકો પ્રતિ દસ લાખમાં, એટલે કે, ppm માં) શોધવા માટે નીચે દર્શાવેલ માહિતી એકત્રિત કરવામાં આવી હતી :

SO_2ની સાંદ્રતા (ppm માં)	**આવૃત્તિ**
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

હવામાં SO_2 ની સાંદ્રતાનો મધ્યક શોધો.

8. એક વર્ગની સમગ્ર સત્રની 40 વિદ્યાર્થીઓની ગેરહાજરીની યાદી વર્ગશિક્ષક પાસે છે. વિદ્યાર્થીઓની ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યાનો મધ્યક શોધો.

ગેરહાજર દિવસોની સંખ્યા	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	11	10	7	4	4	3	1

9. નીચેનું કોષ્ટક 35 શહેરોમાં સાક્ષરતા દર (પ્રતિશતમાં) આપે છે. સાક્ષરતા દરનો મધ્યક શોધો.

સાક્ષરતા દર (ટકા માં)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
શહેરોની સંખ્યા	3	10	11	8	3

14.3 વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક

યાદ કરો, ધોરણ IX માં અભ્યાસ દરમ્યાન આપેલ અવલોકનોમાં સૌથી વધુ વખત આવતું અવલોકન એ બહુલક છે તેમ તમે જોયું હતું. એટલે કે, જે અવલોકનની આવૃત્તિ મહત્તમ હોય તે બહુલક છે. વધુમાં, અવર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક શોધવાની રીતની આપણે ચર્ચા કરી હતી. અહીં, વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક મેળવવાની રીતો વિશે ચર્ચા કરીશું. એવું શક્ય છે કે, એક

કરતાં વધારે મૂલ્યને સમાન મહત્તમ આવૃત્તિ હોય. આવી પરિસ્થિતિઓમાં માહિતીને *બહુ-બહુલક* (***multimodal***) કહે છે. વર્ગીકૃત માહિતી બહુ-બહુલક માહિતી હોઈ શકે છે, છતાં આપણે આપણી જાતને જેમાં માત્ર એક બહુલક હોય તેવા કૂટપ્રશ્નો સુધી સીમિત રાખીશું.

ચાલો, આપણે નીચેના ઉદાહરણ દ્વારા પહેલાં તો યાદ કરીએ કે આપણે કેવી રીતે અવર્ગીકૃત માહિતી માટે બહુલક શોધ્યો હતો.

ઉદાહરણ 4 : એક બૉલર દ્વારા 10 ક્રિકેટ મૅચોમાં નીચે પ્રમાણે વિકેટો લેવામાં આવી છે :

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

આ માહિતીનો બહુલક શોધો.

ઉકેલ : ચાલો આપણે આપેલ માહિતીનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક નીચે પ્રમાણે તૈયાર કરીએ :

વિકેટોની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5	6
મૅચોની સંખ્યા	1	1	3	2	1	1	1

સ્પષ્ટ છે કે, સૌથી વધુ 3 મેચમાં 2 વિકેટ લીધી છે. તેથી આ માહિતીનો બહુલક 2 છે.

વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણમાં આવૃત્તિની માહિતી જોતાં જ બહુલક શોધવો શક્ય નથી. અહીં, આપણે કેવળ મહત્તમ આવૃત્તિવાળા વર્ગને ઓળખી શકીએ. તેને *બહુલક વર્ગ* (***modal class***) કહેવાય છે. બહુલક એ બહુલક વર્ગમાં આવેલું એક મૂલ્ય છે, અને તે,

$$\text{બહુલક} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

સૂત્ર દ્વારા આપવામાં આવે છે :

જ્યાં, l = બહુલક વર્ગની અધ:સીમા

h = વર્ગ અંતરાલની લંબાઈ (બધા વર્ગની લંબાઈ સમાન છે એમ માનીને)

f_1 = બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ

f_0 = બહુલક વર્ગની આગળના વર્ગની આવૃત્તિ

f_2 = બહુલક વર્ગની પાછળના વર્ગની આવૃત્તિ

આ સૂત્રના ઉપયોગની સમજૂતી માટે ચાલો આપણે નીચેનાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 5 : વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહે એક વસ્તીમાં 20 પરિવારની સભ્યસંખ્યા પર સર્વેક્ષણ હાથ ધર્યો. તેનાથી પરિવારના સભ્યોની સંખ્યા માટે નીચેનું આવૃત્તિકોષ્ટક બન્યું.

પરિવારની સભ્યસંખ્યા	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
પરિવારોની સંખ્યા	7	8	2	2	1

આ માહિતીનો બહુલક શોધો.

ઉકેલ : અહીં, મહત્તમ વર્ગઆવૃત્તિ 8 છે. આ આવૃત્તિને અનુરૂપ વર્ગ 3 - 5 છે. તેથી બહુલક વર્ગ 3 - 5 છે.

હવે બહુલક વર્ગ 3 - 5 છે. બહુલક વર્ગની અધઃસીમા (l) = 3, વર્ગ લંબાઈ (h) = 2

બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ (f_1) = 8

બહુલક વર્ગની આગળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_0) = 7

બહુલક વર્ગની પાછળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_2) = 2

હવે, ચાલો આપણે આ કિંમતો બહુલક શોધવાના સૂત્રમાં મૂકીએ :

$$\text{બહુલક} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2\times 8-7-2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

આમ, આપેલ માહિતીનો બહુલક 3.286 છે.

ઉદાહરણ 6 : ગણિતની પરીક્ષામાં 30 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનું વિતરણ ઉદાહરણ 1 ના કોષ્ટક 14.3 માં આપેલ છે. આ માહિતીનો બહુલક શોધો. વળી, તેને મધ્યક સાથે સરખાવો તથા બહુલક અને મધ્યકનું અર્થઘટન કરો.

ઉકેલ : ઉદાહરણ 1ના કોષ્ટક 14.3ના સંદર્ભમાં, મહત્તમ સંખ્યામાં વિદ્યાર્થીઓએ (એટલે કે, 7) અંતરાલ 40-55 માં ગુણ મેળવ્યાં હોવાથી, બહુલક વર્ગ 40-55 છે. આને કારણે,

બહુલક વર્ગની અધઃસીમા (l) = 40

વર્ગલંબાઈ (h) = 15

બહુલક વર્ગની આવૃત્તિ (f_1) = 7

બહુલક વર્ગની આગળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_0) = 3

બહુલક વર્ગની પાછળના વર્ગની આવૃત્તિ (f_2) = 6

હવે, સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\text{બહુલક} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$\text{આથી, બહુલક} = 40 + \left(\frac{7-3}{14-6-3}\right) \times 15 = 52$$

તેથી, પ્રાપ્ત ગુણનો બહુલક 52 છે.

હવે, ઉદાહરણ 1 પરથી, આપ જાણો છો કે, ગુણનો મધ્યક 62 છે. તેથી, મહત્તમ સંખ્યામાં વિદ્યાર્થીઓએ 52 ગુણ મેળવ્યા છે. જ્યારે, સરેરાશની દૃષ્ટિએ વિદ્યાર્થીઓ 62 ગુણ મેળવ્યા છે.

નોંધ :

1. ઉદાહરણ 6 માં બહુલક એ મધ્યક કરતાં નાનો છે. પરંતુ કેટલાક અન્ય પ્રશ્નો માટે તે મધ્યક જેટલો અથવા તેના કરતાં મોટો પણ હોઈ શકે.
2. આપણો રસ વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા સરેરાશ ગુણ શોધવામાં છે કે મોટા ભાગના વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ શોધવામાં એ પરિસ્થિતિની જરૂરિયાત પર આધાર રાખે છે. પ્રથમ પરિસ્થિતિમાં મધ્યકની જરૂરિયાત છે અને બીજી પરિસ્થિતિમાં બહુલકની જરૂરિયાત છે.

પ્રવૃત્તિ 3 : પ્રવૃત્તિ 2 માં રચેલા સમૂહો અને સમૂહોને સોંપેલી સ્થિતિઓ સાથે જ આગળ વધો. પ્રત્યેક સમૂહને માહિતીનો બહુલક શોધવાનું કહો. વળી, તેમણે બહુલકની સરખામણી મધ્યક સાથે કરવી જોઈએ અને બંનેનું અર્થઘટન કરવું જોઈએ.

નોંધ : અસમાન વર્ગલંબાઈવાળી વર્ગીકૃત માહિતી માટે પણ બહુલકની ગણતરી કરી શકાય. પરંતુ આપણે તેની ચર્ચા કરીશું નહિ.

સ્વાધ્યાય 14.2

1. નીચેનું કોષ્ટક એક વર્ષ દરમિયાન એક દવાખાનામાં દાખલ થયેલા દર્દીઓની ઉંમર દર્શાવે છે :

ઉંમર (વર્ષમાં)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
દર્દીઓની સંખ્યા	6	11	21	23	14	5

ઉપર આપેલ માહિતી માટે બહુલક અને મધ્યક શોધો. કેન્દ્રિય મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં આ બે માપોની સરખામણી અને અર્થઘટન કરો.

2. નીચેની માહિતી 225 વીજઉપકરણોના આયુષ્યની (કલાકોમાં) પ્રાપ્ત માહિતી દર્શાવે છે.

આયુષ્ય (કલાકોમાં)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
આવૃત્તિ	10	35	52	61	38	29

તો ઉપકરણોના આયુષ્યનો બહુલક નક્કી કરો.

3. નીચેની માહિતી એક ગામનાં 200 કુટુંબો માટે તેમના ઘર ચલાવવા માટે કુલ માસિક ખર્ચનું આવૃત્તિ વિતરણ દર્શાવે છે. કુટુંબોના માસિક ખર્ચનો બહુલક શોધો તથા કુટુંબોના માસિક ખર્ચનો મધ્યક શોધો :

માસિક ખર્ચ (₹ માં)	કુટુંબોની સંખ્યા
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

4. નીચેનું વિતરણ ભારતની ઉચ્ચતર માધ્યમિક શાળાઓમાં રાજ્યવાર શિક્ષક-વિદ્યાર્થી ગુણોત્તરનું આવૃત્તિ વિતરણ આપે છે. આ માહિતીનો બહુલક અને મધ્યક શોધો. આ બે માપનું અર્થઘટન કરો.

પ્રતિ શિક્ષક વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	રાજ્યો/કેન્દ્ર શાસિત પ્રદેશોની સંખ્યા
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

5. નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણ વિશ્વના કેટલાક શ્રેષ્ઠ બૅટ્સમેનો દ્વારા એક દિવસીય આંતરરાષ્ટ્રીય મૅચોમાં નોંધાવેલ રનની સંખ્યા આપે છે :

નોંધાવેલ રન	બૅટ્સમેનોની સંખ્યા
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10000	1
10000 - 11000	1

માહિતીનો બહુલક શોધો.

6. એક વિદ્યાર્થીએ, પ્રત્યેક 3 મિનિટનો એક એવા 100 સમયગાળાઓ માટે રસ્તા પરની એક જગ્યાએથી પસાર થતી ગાડીઓની સંખ્યાની નોંધ કરી અને તેને નીચે આપેલ કોષ્ટકમાં સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં દર્શાવી છે. આ માહિતીનો બહુલક શોધો.

ગાડીઓની સંખ્યા	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
આવૃત્તિ	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4 વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ

ધોરણ IX માં તમે અભ્યાસ કર્યો છે તેમ, મધ્યસ્થ માહિતીમાં મધ્યના અવલોકનનું મૂલ્ય આપતું હોય એવું મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું માપ છે. યાદ કરો, અવર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવા માટે, આપણે પહેલાં માહિતીનાં અવલોકનોને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવીએ છીએ. ત્યાર બાદ, જો n-અયુગ્મ હોય, તો મધ્યસ્થ એ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અવલોકન છે. અને જો n-યુગ્મ હોય, તો મધ્યસ્થ એ $\frac{n}{2}$ માં અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ માં અવલોકનોની સરેરાશ છે.

નીચે 100 વિદ્યાર્થીઓએ 50 ગુણની એક કસોટીમાં મેળવેલા ગુણ દર્શાવ્યા છે. આ માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવો છે.

મેળવેલા ગુણ	20	29	28	33	42	38	43	25
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	6	28	24	15	2	4	1	20

સૌપ્રથમ, આપણે ગુણને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવીએ અને નીચે પ્રમાણે આવૃત્તિ કોષ્ટક તૈયાર કરીએ :

કોષ્ટક 14.9

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (આવૃત્તિ)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
કુલ	**100**

અહીં, $n = 100$ એ યુગ્મ છે. તેથી મધ્યસ્થ એ $\frac{n}{2}$ માં અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$માં અવલોકનોની સરેરાશ થશે, એટલે કે, તે 50 માં અને 51 માં અવલોકનોની સરેરાશ થશે. આ અવલોકનો શોધવા માટે, નીચે પ્રમાણે આગળ વધીએ :

કોષ્ટક 14.10

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
20	6
25 સુધી	6 + 20 = 26
28 સુધી	26 + 24 = 50
29 સુધી	50 + 28 = 78
33 સુધી	78 + 15 = 93
38 સુધી	93 + 4 = 97
42 સુધી	97 + 2 = 99
43 સુધી	99 + 1 = 100

આપણે આ માહિતીને ઉપરના આવૃત્તિ કોષ્ટકને દર્શાવતો હોય, તેમાં એક બીજો સ્તંભ ઉમેરીએ અને તેનું નામ ***સંચયી આવૃત્તિ-સ્તંભ*** રાખીશું.

કોષ્ટક 14.11

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	સંચયી આવૃત્તિ
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

ઉપરના કોષ્ટક પરથી, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે,

50 મું અવલોકન 28 છે. (શા માટે?)

51 મું અવલોકન 29 છે.

તેથી, $\text{મધ્યસ્થ} = \frac{28 + 29}{2} = 28.5$

નોંધ : કોષ્ટક 14.11 ના સ્તંભ 1 અને સ્તંભ 3 થી બનેલો ભાગ સંચયી આવૃત્તિ કોષ્ટક તરીકે ઓળખાય છે. આશરે 50 % વિદ્યાર્થીઓએ 28.5 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા છે અને બીજા 50 % વિદ્યાર્થીઓએ 28.5 કરતાં વધુ ગુણ મેળવ્યાં છે એવી માહિતી મધ્યસ્થ 28.5 દ્વારા મળે છે.

હવે, ચાલો આપણે જોઈએ કે વર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યસ્થ કેવી રીતે મેળવવો. નીચેની પરિસ્થિતિ દ્વારા તે સમજીએ.

એક ચોક્કસ પરીક્ષામાં 53 વિદ્યાર્થીઓએ 100 માંથી મેળવેલા ગુણનું વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે આપેલ છે તેનો અભ્યાસ કરો :

કોષ્ટક 14.12

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

ઉપરના કોષ્ટક પરથી, નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપવા પ્રયત્ન કરો :

કેટલા વિદ્યાર્થીઓએ 10 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા?

જવાબ સ્પષ્ટ છે કે, 5.

કેટલા વિદ્યાર્થીઓએ 20 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા?

નિરીક્ષણ કરો કે, જે વિદ્યાર્થીઓએ 20 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા છે તે સંખ્યા 0 - 10 સુધી મેળવેલા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા તેમજ 10 - 20 સુધી મેળવેલા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાનો પોતાનામાં સમાવેશ કરે છે. તેથી 20 કરતાં ઓછા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 5 + 3 એટલે કે 8 છે. આપણે કહીએ છીએ કે વર્ગ 10 - 20 ની સંચયી આવૃત્તિ 8 છે.

આ જ પ્રમાણે, બીજા વર્ગો માટે સંચયી આવૃત્તિની ગણતરી કરી શકીએ. એટલે કે, 30 કરતાં ઓછા ગુણવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા, 40 કરતાં ઓછા, ... , 100 કરતાં ઓછા સુધી. આપણે તેમને નીચે આપેલ કોષ્ટક 14.13 માં દર્શાવીએ છીએ :

કોષ્ટક 14.13

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (સંચયી આવૃત્તિ)
10 કરતાં ઓછા	5
20 કરતાં ઓછા	5 + 3 = 8
30 કરતાં ઓછા	8 + 4 = 12
40 કરતાં ઓછા	12 + 3 = 15
50 કરતાં ઓછા	15 + 3 = 18
60 કરતાં ઓછા	18 + 4 = 22
70 કરતાં ઓછા	22 + 7 = 29
80 કરતાં ઓછા	29 + 9 = 38
90 કરતાં ઓછા	38 + 7 = 45
100 કરતાં ઓછા	45 + 8 = 53

ઉપર આપેલ વિતરણને ***'થી ઓછા પ્રકારનું' સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ*** કહે છે. અહીં 10, 20, 30, ..., 100, એ જે-તે વર્ગ અંતરાલોની ઊર્ધ્વસીમાઓ છે.

આપણે આ જ પ્રમાણે, 0 કે તેના કરતાં વધારે ગુણવાળા, 10 કે તેના કરતાં વધારે ગુણવાળા, 20 કે તેના કરતાં વધારે ગુણવાળા, અને આમ આગળ, વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા માટેનું કોષ્ટક બનાવી શકીએ. કોષ્ટક 14.12 પરથી, આપણે નિરીક્ષણ કરીએ છીએ કે, તમામ 53 વિદ્યાર્થીઓએ 0 કે તેનાથી વધારે ગુણ મેળવ્યા છે. 5 વિદ્યાર્થીઓએ અંતરાલ 0 - 10 માં ગુણ મેળવ્યા છે. તેથી, આનો અર્થ એ થાય છે કે 53 – 5 = 48 વિદ્યાર્થીઓ 10 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવે છે. આ જ પ્રમાણે આગળ વધતાં, આપણને 20 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવવાવાળા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 48 – 3 = 45, 30 કે વધુ માટે 45 – 4 = 41, અને આમ આગળ, કોષ્ટક 14.14 માં બતાવ્યા પ્રમાણે.

કોષ્ટક 14.14

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (સંચયી આવૃત્તિ)
0 કે તેથી વધારે	53
10 કે તેથી વધારે	53 – 5 = 48
20 કે તેથી વધારે	48 – 3 = 45
30 કે તેથી વધારે	45 – 4 = 41
40 કે તેથી વધારે	41 – 3 = 38
50 કે તેથી વધારે	38 – 3 = 35
60 કે તેથી વધારે	35 – 4 = 31
70 કે તેથી વધારે	31 – 7 = 24
80 કે તેથી વધારે	24 – 9 = 15
90 કે તેથી વધારે	15 – 7 = 8

ઉપરના કોષ્ટકને, ***'થી વધારે પ્રકારનું' સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે.*** અહીં, 0, 10, 20, 30, ..., 90 એ જે તે વર્ગ-અંતરાલની અધઃસીમાઓ છે.

હવે, વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધવા માટે આપણે આ પૈકી ગમે તે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણનો ઉપયોગ કરી શકીએ.

ચાલો, આપણે નીચે આપેલ કોષ્ટક 14.15 મેળવવા માટે કોષ્ટકો 14.12 અને 14.13 ને એકત્રિત કરીએ.

કોષ્ટક 14.15

મેળવેલા ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f)	સંચયી આવૃત્તિ (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

હવે, વર્ગીકૃત માહિતીમાં, સંચયી આવૃત્તિઓ તરફ દૃષ્ટિપાત કરીને જ આપણે મધ્યનું અવલોકન શોધવા સમર્થ ન હોઈ શકીએ, કારણ કે મધ્યનું અવલોકન એ કોઈક વર્ગઅંતરાલની અંદરનું મૂલ્ય હશે. તેથી કોઈક વર્ગમાં એક એવું અવલોકન શોધવું આવશ્યક છે, જે સમગ્ર વિતરણના બે સમાન ભાગ કરે. પરંતુ આ કયો વર્ગ હોવો જોઈએ?

આ વર્ગ શોધવા માટે, આપણે બધા વર્ગોની સંચયી આવૃત્તિઓ અને $\frac{n}{2}$ શોધીએ. હવે, આપણે એવો ચોક્કસ વર્ગ નક્કી કરીએ કે, જેની સંચયી આવૃત્તિ $\frac{n}{2}$ કરતાં મોટી (અને $\frac{n}{2}$ ની સૌથી નજીક) છે. આને ***મધ્યસ્થ વર્ગ*** કહેવાય છે. ઉપરના વિતરણમાં, $n = 53$. તેથી, $\frac{n}{2} = 26.5$. હવે, જેની સંચયી આવૃત્તિ 29 હોય તેવો વર્ગ 60 - 70 છે. 29 એ $\frac{n}{2}$ એટલે કે, 26.5 પછી તુરત જ મોટી આવૃત્તિ છે.

તેથી, 60 - 70 એ મધ્યસ્થ વર્ગ છે.

મધ્યસ્થ વર્ગ શોધ્યા પછી, આપણે મધ્યસ્થ શોધવા માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ :

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

જ્યાં, l = મધ્યસ્થ વર્ગની અધઃસીમા

n = અવલોકનોની સંખ્યા

cf = મધ્યસ્થ વર્ગની આગળના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ

f = મધ્યસ્થ વર્ગની આવૃત્તિ

h = વર્ગલંબાઈ (માની લીધું છે કે વર્ગલંબાઈ સમાન છે.)

કિંમતો $\frac{n}{2} = 26.5$, $l = 60$, $cf = 22$, $f = 7$, $h = 10$

ઉપરના સૂત્રમાં આ કિંમતો મૂકતાં,

$$\text{મધ્યસ્થ} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4 \text{ મળશે.}$$

તેથી, લગભગ અડધા વિદ્યાર્થીઓએ 66.4 કરતાં ઓછા ગુણ મેળવ્યા છે અને અડધા વિદ્યાર્થીઓએ 66.4 કરતાં વધારે ગુણ મેળવ્યા છે.

ઉદાહરણ 7 : એક શાળાના ધોરણ X ની 51 છોકરીઓની ઊંચાઈનો (સેમીમાં) સર્વેક્ષણ હાથ ધરવામાં આવ્યો અને નીચેની માહિતી મેળવવામાં આવી :

ઊંચાઈ (સેમીમાં)	છોકરીઓની સંખ્યા
140 કરતાં ઓછી	4
145 કરતાં ઓછી	11
150 કરતાં ઓછી	29
155 કરતાં ઓછી	40
160 કરતાં ઓછી	46
165 કરતાં ઓછી	51

ઊંચાઈનો મધ્યસ્થ શોધો.

ઉકેલ : મધ્યસ્થ ઊંચાઈની ગણતરી કરવા માટે આપણને વર્ગઅંતરાલો અને તેમને અનુરૂપ આવૃત્તિની જરૂર છે.

આપેલ વિતરણ 'થી ઓછા પ્રકારનું' છે. 140, 145, 150, ..., 165 અનુરૂપ વર્ગ અંતરાલોની ઊર્ધ્વસીમાઓ છે. તેથી વર્ગો 140 થી ઓછી સંખ્યા. 140 - 145, 145 - 150, ..., 160 - 165 હોવા જોઈએ. નિરીક્ષણ કરો કે, આપેલ વિતરણ પરથી, આપણને જ્ઞાત થાય છે કે 4 છોકરીઓની ઊંચાઈ 140 સેમી કરતાં ઓછી છે, એટલે કે 140 થી નીચેના વર્ગ અંતરાલની આવૃત્તિ 4 છે. હવે, જેમની ઊંચાઈ 145 કરતાં ઓછી છે એવી 11 છોકરીઓ છે અને 4 છોકરીઓની ઊંચાઈ 140 કરતાં ઓછી છે. તેથી, અંતરાલ 140–145 માં જેમની ઊંચાઈ હોય તેવી છોકરીઓની સંખ્યા 11–4 = 7 છે, આ જ પ્રમાણે 145 - 150 ની આવૃત્તિ છે, 29–11 = 18, 150 - 155 માટે 40–29 = 11 અને આમ આગળ. તેથી આપણું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક આપેલ સંચયી આવૃત્તિઓ દર્શાવવાની આ રીતનું થશે :

કોષ્ટક 14.16

વર્ગ-અંતરાલો	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
140 થી ઓછી	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

હવે, $n = 51$. તેથી, $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$. આ અવલોકન વર્ગ 145 - 150 માં છે. તેથી,

l (અધ:સીમા) = 145

cf (145 - 150 થી આગળના વર્ગની સંચયી આવૃત્તિ) = 11

f (મધ્યસ્થ વર્ગ 145 - 150 ની આવૃત્તિ) = 18

h (વર્ગલંબાઈ) = 5

$$\text{સૂત્ર, મધ્યસ્થ } = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h \text{ નો ઉપયોગ કરતાં,}$$

$$\text{આપણી પાસે, મધ્યસ્થ } = 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18}\right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

તેથી, છોકરીઓની મધ્યસ્થ ઊંચાઈ 149.03 સેમી છે.

આનો અર્થ છે કે લગભગ 50 % છોકરીઓની ઊંચાઈ આ ઊંચાઈ કરતાં ઓછી અને 50 % છોકરીઓની ઊંચાઈ આના કરતાં વધારે છે.

ઉદાહરણ 8 : નીચે આપેલ માહિતીનો મધ્યસ્થ 525 છે. જો કુલ આવૃત્તિ 100 હોય, તો x અને y નાં મૂલ્યો શોધો.

વર્ગ-અંતરાલ	આવૃત્તિ
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

ઉકેલ :

વર્ગ-અંતરાલ	આવૃત્તિ	સંચયી આવૃત્તિ
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7 + x$
300 - 400	12	$19 + x$
400 - 500	17	$36 + x$
500 - 600	20	$56 + x$
600 - 700	y	$56 + x + y$
700 - 800	9	$65 + x + y$
800 - 900	7	$72 + x + y$
900 - 1000	4	$76 + x + y$

$n = 100$ આપેલ છે.

તેથી, $76 + x + y = 100$, એટલે કે $x + y = 24$ ... (1)

મધ્યસ્થ 525 છે, અને તે વર્ગ 500 - 600 માં આવેલ છે.

તેથી, $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\text{મધ્યસ્થ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

આપણને મળે છે,
$$525 = 500 + \left(\frac{50 - 36 - x}{20}\right) \times 100$$

એટલે કે, $525 - 500 = (14 - x) \times 5$

એટલે કે, $25 = 70 - 5x$

એટલે કે, $5x = 70 - 25 = 45$

તેથી, $x = 9$

આને કારણે, (1) પરથી આપણને મળે છે. $9 + y = 24$,

એટલે કે $y = 15$

હવે, તમે મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં તમામ ત્રણે ય માપોનો અભ્યાસ કર્યો છે, ચાલો આપણે ચર્ચા કરીએ કે કયું માપ ચોક્કસ જરૂરિયાત માટે ઉત્તમપણે અનુકૂળ રહેશે.

મધ્યક એ સૌથી વધુ વખત ઉપયોગમાં લેવાતું મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું માપ છે, કારણ કે તે તમામ અવલોકનોને ગણતરીમાં લે છે અને સંપૂર્ણ માહિતીના સૌથી મોટા અને સૌથી નાના અવલોકનોની સીમાઓની વચ્ચે રહે છે. તે આપણને બે કે તેથી વધુ વિતરણોની સરખામણી કરવા માટેનું સામર્થ્ય આપે છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક ચોક્કસ પરીક્ષાના જુદી-જુદી શાળાઓના વિદ્યાર્થીઓના પરિણામના મધ્યકની સરખામણી કરવાથી, આપણે તારવી શકીએ કે, કઈ શાળાની કામગીરી વધુ સારી છે.

જોકે, માહિતીમાં અંત્યબિંદુની કિંમતો મધ્યકને અસર કરે છે. ઉદાહરણ તરીકે, જ્યાં વર્ગોની આવૃત્તિ લગભગ એકસરખી હોય ત્યારે વર્ગોનો મધ્યક, માહિતીનું સારું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે. પરંતુ, જો એક વર્ગની આવૃત્તિ 2 હોય અને બીજા પાંચની આવૃત્તિઓ 20, 25, 20, 21, 18 હોય, તો માહિતી જે રીતે વર્તે છે તેને મધ્યક સારી રીતે પ્રતિબિંબિત નહિ કરે. તેથી, આવી પરિસ્થિતિમાં મધ્યક, માહિતીનું સારી રીતે પ્રતિનિધિત્વ કરતો નથી.

જેમાં વ્યક્તિગત અવલોકનો મહત્ત્વનાં નથી તેવા પ્રશ્નો અંગે આપણે ઇચ્છીએ કે 'નમૂનારૂપ' અવલોકન શોધી કાઢીએ, ત્યારે મધ્યસ્થ વધારે યોગ્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, કામદારોનો નમૂનારૂપ ઉત્પાદન દર શોધવો, દેશમાં સરેરાશ

વેતન વગેરે. આ પ્રકારની પરિસ્થિતિઓમાં તદ્દન અંતિમ બિંદુનાં મૂલ્યો હોઈ પણ શકે. તેથી મધ્યકને લેવા કરતાં આપણે મધ્યસ્થને વધુ સારા મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપ તરીકે લઈએ છીએ.

જે પરિસ્થિતિઓમાં સૌથી વધુ વખત આવતું મૂલ્ય અથવા સૌથી લોકપ્રિય વસ્તુને સ્થાપિત કરવાની જરૂર છે તે સ્થિતિમાં બહુલક શ્રેષ્ઠ વિકલ્પ છે. ઉદાહરણ તરીકે સૌથી વધુ જોવાતો લોકપ્રિય ટી.વી. કાર્યક્રમ, સૌથી વધુ માંગવાળી ઉપભોક્તા વસ્તુ, સૌથી વધુ લોકો દ્વારા ઉપયોગમાં લેવાતો વાહનનો રંગ વગેરે.

નોંધ :

1. મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં ત્રણ માપો વચ્ચે પ્રયોગમૂલક સંબંધ છે.

   $3 \times$ મધ્યસ્થ $=$ બહુલક $+ 2 \times$ મધ્યક

2. વર્ગલંબાઈ અસમાન હોય તેવી વર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યસ્થની પણ ગણતરી કરી શકાય છે. પરંતુ, આપણે અહીં તે ચર્ચા કરીશું નહિ.

સ્વાધ્યાય 14.3

1. નીચેનું આવૃત્તિ-વિતરણ એક વિસ્તારમાં 68 ગ્રાહકોનો માસિક વીજવપરાશ આપે છે. આ માહિતીનો મધ્યસ્થ, મધ્યક અને બહુલક શોધો અને તેમને સરખાવો.

માસિક વપરાશ (એકમમાં)	ગ્રાહકોની સંખ્યા
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

2. જો નીચે આપેલ આવૃત્તિ વિતરણનો મધ્યસ્થ 28.5 હોય, તો x અને y નાં મૂલ્યો શોધો.

વર્ગ-અંતરાલ	આવૃત્તિ
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
કુલ	**60**

3. એક જીવનવીમા એજન્ટે, 100 પૉલિસીધારકોની ઉંમર માટે નીચેનું વિતરણ પ્રાપ્ત કર્યું. જેમની ઉંમર 18 વર્ષથી વધુ, પરંતુ 60 વર્ષથી ઓછી હોય તેવી જ વ્યક્તિઓને પૉલિસીઓ આપવામાં આવી હોય, તો તેમની મધ્યસ્થ ઉંમર શોધો.

ઉંમર (વર્ષમાં)	પૉલિસીધારકોની સંખ્યા
20 થી ઓછી	2
25 થી ઓછી	6
30 થી ઓછી	24
35 થી ઓછી	45
40 થી ઓછી	78
45 થી ઓછી	89
50 થી ઓછી	92
55 થી ઓછી	98
60 થી ઓછી	100

4. એક છોડનાં 40 પાંદડાંઓની લંબાઈ ખૂબ જ નજીકના મિલીમીટર સુધી માપવામાં આવી અને મેળવેલ માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

લંબાઈ (મિમીમાં)	પાંદડાંઓની સંખ્યા
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

પાંદડાંઓની મધ્યસ્થ લંબાઈ શોધો.

(**સૂચન :** મધ્યસ્થ શોધવા માટે માહિતીને સતત વર્ગોમાં ફેરવવાની જરૂર છે, કારણ કે સૂત્ર સતત વર્ગો માટે છે. વર્ગો 117.5 – 126.5, 126.5 – 135.5, ... , 171.5 – 180.5 માં પરિવર્તિત થાય છે.)

5. નીચેનું કોષ્ટક 400 નીઓન ગોળાના આયુષ્યનું આવૃત્તિ વિતરણ આપે છે :

આયુષ્ય (કલાકોમાં)	ગોળાની સંખ્યા
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

ગોળાના આયુષ્યનો મધ્યસ્થ શોધો.

6. સ્થાનિક ટેલિફોન યાદીમાંથી 100 અટક યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવી હતી અને અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોમાં અટકોમાં આવતા અક્ષરોની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે મેળવ્યું હતું :

અક્ષરોની સંખ્યા	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
અટકોની સંખ્યા	6	30	40	16	4	4

અટકોમાં આવતા અક્ષરોની સંખ્યાનો મધ્યસ્થ શોધો. અટકોમાં આવતા અક્ષરોની સંખ્યાનો મધ્યક પણ શોધો. અટકોમાં અક્ષરોની સંખ્યાનો બહુલક શોધો.

7. નીચેનું વિતરણ એક ધોરણના 30 વિદ્યાર્થીઓનાં વજન આપે છે. વિદ્યાર્થીઓનાં વજનનો મધ્યસ્થ શોધો.

વજન (કિગ્રામાં)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	3	8	6	6	3	2

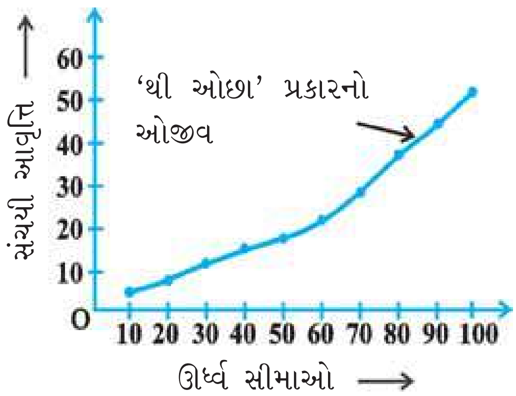
14.5 સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણની આલેખીય પ્રસ્તુતિ

આપણે જાણીએ છીએ તેમ, ચિત્રો શબ્દો કરતાં વધુ સ્પષ્ટ કહી જાય છે. આલેખીય નિરૂપણ પર દૃષ્ટિપાત કરતાં જ આપણને તે આપેલ માહિતીને સમજવામાં મદદ કરે છે. ધોરણ IX માં આપણે માહિતીને લંબાલેખ, સ્તંભાલેખ અને આવૃત્તિ બહુકોણ દ્વારા દર્શાવી છે.

ચાલો, હવે આપણે સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણને આલેખ દ્વારા દર્શાવીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, ચાલો આપણે કોષ્ટક 14.13 માં આપેલ સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણનો વિચાર કરીએ.

યાદ કરો કે, કિંમતો 10, 20 ,30, ... , 100 અનુરૂપ વર્ગઅંતરાલોની ઊર્ધ્વસીમાઓ છે. કોષ્ટકની માહિતીને આલેખ દ્વારા દર્શાવવા માટે, આપણે વર્ગઅંતરાલોની ઊર્ધ્વસીમાઓને સમક્ષિતિજ અક્ષ (x-અક્ષ) અને



આકૃતિ 14.1

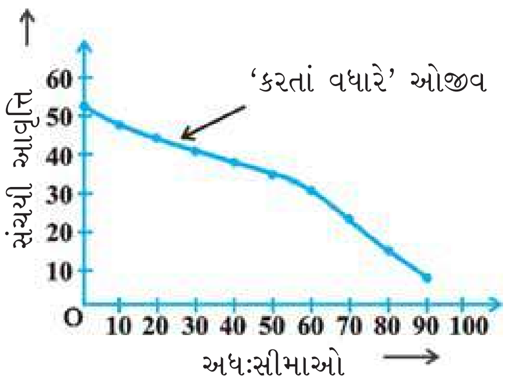
તેમની અનુરૂપ સંચયી આવૃત્તિઓ શિરોલંબ અક્ષ (y-અક્ષ) પર અનુકૂળ માપ પસંદ કરીને દર્શાવીશું. બંને અક્ષો પર માપ સમાન ન પણ હોઈ શકે. ચાલો હવે આપણે ક્રમયુક્ત જોડોને અનુરૂપ બિંદુઓ

(ઊર્ધ્વસીમા, અનુરૂપ સંચયી આવૃત્તિ) એટલે કે, (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) આલેખપત્ર પર મૂકીએ અને તેમને મુક્તહસ્ત સળંગ વક્ર દ્વારા જોડીએ. આપણે જે વક્ર મેળવીએ છીએ તેને ***સંચયી આવૃત્તિ વક્ર*** અથવા ***થી ઓછા પ્રકારનો ઓજીવ (ogive)*** (જુઓ આકૃતિ 14.1) કહે છે.

શબ્દ 'ogive' નો ઉચ્ચાર ઓજીવ થાય છે અને તે શબ્દ **ogee** પરથી ઊતરી આવ્યો છે. ogee અંતર્ગોળ ચાપનું બહિર્ગોળ ચાપ સાથે મિલન થતું હોય તેવા આકારથી બને છે. આથી શિરોલંબ અંતવાળો S આ આકારનો વક્ર બને છે. સ્થાપત્ય કલામાં 14 મી તથા 15 મી સદીની ગોથીક પદ્ધતિનાં લક્ષણો પૈકીનું એક ogee આકાર છે.

તે પછી, ફરીથી આપણે કોષ્ટક 14.14 માં આપેલ સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણનો વિચાર કરીએ અને તેનો 'થી વધુ પ્રકારનો ઓજીવ' દોરીએ.

યાદ કરો, અહીં, 0, 10, 20, ..., 90 એ અનુક્રમે વર્ગ અંતરાલો 0 - 10, 10 - 20, ..., 90 - 100 ની અધઃસીમાઓ છે. 'કરતાં વધારે પ્રકારનું' આલેખીય નિરૂપણ કરવા માટે આપણે x-અક્ષ પર અધઃસીમાઓ અને અનુરૂપ y-અક્ષ પર સંચયી આવૃત્તિઓ દર્શાવીશું. પછી આપણે બિંદુઓ (અધઃસીમા, અનુરૂપ સંચયી આવૃત્તિ), એટલે કે, (0, 53), (10, 48), (20, 45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8) આલેખ પેપર પર દર્શાવીશું અને તેમને મુક્તહસ્ત સળંગ વક્ર દ્વારા જોડીશું. આપણને જે વક્ર મળે છે તે સંચયી આવૃત્તિ વક્ર છે અથવા ***'થી વધુ પ્રકાર'***નો ઓજીવ છે. (જુઓ આકૃતિ 14.2.)



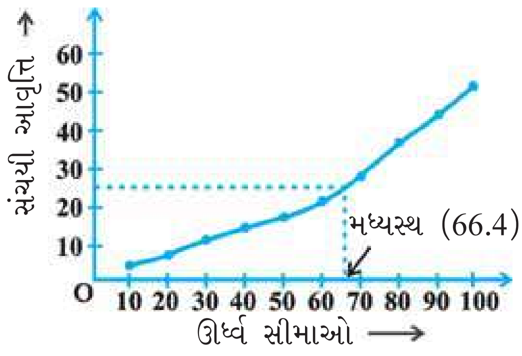
આકૃતિ 14.2

નોંધ : નોંધ કરો કે, બંને ઓજીવ જે કોષ્ટક 14.12 માં આપેલ છે. (આકૃતિ 14.1 અને આકૃતિ 14.2) તે એક જ માહિતીને અનુરૂપ છે.

હવે, ઓજીવ મધ્યસ્થ સાથે કોઈ પણ રીતે સંબંધિત છે?

કોષ્ટક 14.12 ની માહિતીને અનુરૂપ, આ બંને સંચયી આવૃત્તિ વક્રો પરથી શું મધ્યસ્થ મેળવવો શક્ય છે? ચાલો આપણે જોઈએ.

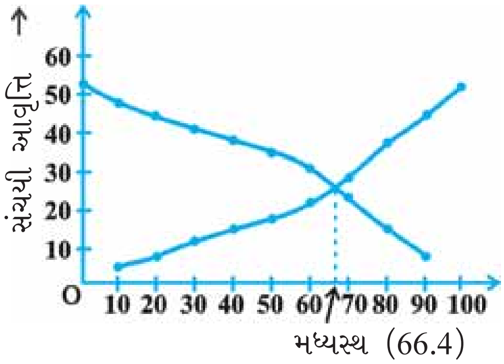
y-અક્ષ પર $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ નું સ્થાન દર્શાવવું તે એક સ્પષ્ટ રસ્તો છે. (જુઓ આકૃતિ 14.3.) આ બિંદુથી વક્રના બિંદુમાં છેદતી હોય તેવી x-અક્ષને સમાંતર રેખા દોરો. આ બિંદુથી x-અક્ષને લંબ દોરો. આ લંબના x-અક્ષ સાથેના છેદબિંદુનો x-યામ માહિતીનો મધ્યસ્થ આપે છે (જુઓ આકૃતિ 14.3.)



આકૃતિ 14.3

મધ્યસ્થ શોધવાની અન્ય રીતો નીચે આપેલ છે :

એક જ અક્ષ પર બંને ઓજીવ દોરો. (એટલે કે, 'થી ઓછા પ્રકારનો અને થી વધારે પ્રકારનો') બે ઓજીવ એકબીજાને એક બિંદુમાં છેદશે. આ બિંદુથી, જો આપણે x-અક્ષ પર લંબ દોરીએ, તો બિંદુ x-અક્ષને જ્યાં તે છેદશે, તેનો x-યામ મધ્યસ્થ આપશે. (જુઓ આકૃતિ 14.4.)



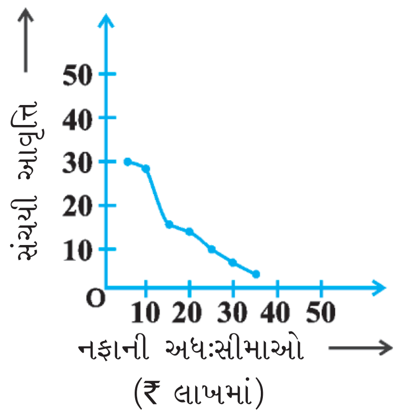
આકૃતિ 14.4

ઉદાહરણ 9 : નીચેનું વિતરણ એક વસતીનાં શોપિંગ કૉમ્પ્લેક્ષની 30 દુકાનો દ્વારા પ્રાપ્ત નફો આપે છે :

નફો (₹ લાખમાં)	દુકાનોની સંખ્યા (આવૃત્તિ)
5 કે તેનાથી વધારે	30
10 કે તેનાથી વધારે	28
15 કે તેનાથી વધારે	16
20 કે તેનાથી વધારે	14
25 કે તેનાથી વધારે	10
30 કે તેનાથી વધારે	7
35 કે તેનાથી વધારે	3

ઉપર આપેલ માહિતી માટે બંને ઓજીવ દોરો. તે પરથી મધ્યસ્થ નફો મેળવો.

ઉકેલ : પહેલાં આપણે યામાક્ષો દોરીએ, નફાની અધ:સીમાઓ સમક્ષિતિજ અક્ષ પર અને સંચયી આવૃત્તિ y-અક્ષ પર લઈએ. પછી બિંદુઓ (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) અને (35, 3) દર્શાવો. આપણે આ બિંદુઓને સળંગ મુક્ત હસ્ત વક્ર દ્વારા 'થી વધારે' પ્રકારનો ઓજીવ મેળવવા માટે જોડીએ. (આકૃતિ 14.5 માં બતાવ્યા પ્રમાણે)



આકૃતિ 14.5

હવે, ચાલો આપણે નીચે આપેલ કોષ્ટક પરથી વર્ગો, તેમની આવૃત્તિઓ અને સંચયી આવૃત્તિ મેળવીએ :

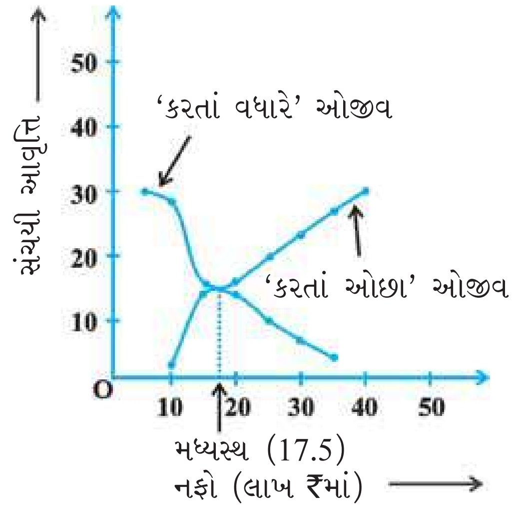
કોષ્ટક 14.17

વર્ગો	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
દુકાનોની સંખ્યા	2	12	2	4	3	4	3
સંચયી આવૃત્તિ	2	14	16	20	23	27	30

આ કિંમતોનો ઉપયોગ કરીને, આપણે બિંદુઓ (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) દર્શાવીને એ અક્ષો પર આકૃતિ 14.5 માં છે તેમ 'થી ઓછાં' પ્રકારનો ઓજીવ મેળવીએ. આકૃતિ 14.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે મુક્ત હસ્ત વક્ર દોરીએ.

તેમનાં છેદ બિંદુઓનો x-યામ 17.5 ની નજીક છે અને તે મધ્યસ્થ છે. આ હકીકતને સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને પણ ચકાસી શકાય. તેથી, મધ્યસ્થ નફો ₹ 17.5 લાખ છે.

નોંધ : ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં, અત્રે નોંધનીય છે કે, વર્ગઅંતરાલો સતત હતા. ઓજીવ દોરવા માટે, વર્ગઅંતરાલો સતત હોય, તે સુનિશ્ચિત કરવું જોઈએ. (વળી, ધોરણ IX માં સ્તંભાલેખની રચનાઓ જુઓ.)



આકૃતિ 14.6

સ્વાધ્યાય 14.4

1. નીચેનું આવૃત્તિ વિતરણ એક કારખાનાના 50 કર્મીઓનું દૈનિક વેતન દર્શાવે છે :

દૈનિક વેતન (₹ માં)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
કામદારોની સંખ્યા	12	14	8	6	10

ઉપરના આવૃત્તિ વિતરણને, 'થી ઓછા પ્રકાર' નાં સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણમાં ફેરવો અને તેનો 'ઓજીવ' દોરો.

2. એક વર્ગના 35 વિદ્યાર્થીઓની દાક્તરી તપાસ દરમિયાન, તેમનાં વજન નીચે પ્રમાણે નોંધાયા :

વજન (કિલોગ્રામમાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
38 કરતાં ઓછું	0
40 કરતાં ઓછું	3
42 કરતાં ઓછું	5
44 કરતાં ઓછું	9
46 કરતાં ઓછું	14
48 કરતાં ઓછું	28
50 કરતાં ઓછું	32
52 કરતાં ઓછું	35

આપેલ માહિતી માટે 'થી ઓછા પ્રકાર'નો ઓજીવ દોરો. તેથી વજનનો મધ્યસ્થ મેળવો. આલેખ પરથી આ મેળવેલા પરિણામને સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને ચકાસો.

3. નીચેનું કોષ્ટક એક ગામનાં 100 ખેતરોમાં પ્રતિ હેક્ટર ઘઉંનું ઉત્પાદન દર્શાવે છે :

ઉત્પાદન ક્ષમતા (કિગ્રા/હેક્ટર)	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80
ખેતરોની સંખ્યા	2	8	12	24	38	16

આ આવૃત્તિ વિતરણને 'થી વધારે પ્રકાર'ના વિતરણમાં પરિવર્તિત કરો અને તેનો ઓજીવ દોરો.

14.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો :

1. વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યક નીચેનાં સૂત્રો દ્વારા મેળવી શકાય :

(i) પ્રત્યક્ષ રીત : $\overline{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) ધારેલ મધ્યકની રીત : $\overline{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(iii) પદ વિચલનની રીત : $\overline{x} = a + \left(\dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$

અત્રે વર્ગની આવૃત્તિ તેના મધ્યબિંદુએ કેન્દ્રિત છે એવી ધારણા લીધી છે. આ મધ્યબિંદુને વર્ગની મધ્યકિંમત કહે છે.

2. વર્ગીકૃત માહિતીનો બહુલક,

બહુલક $= l + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને શોધી શકાય છે. સંકેતોના પ્રચલિત અર્થો છે.

3. જેને આપેલ વર્ગથી અગાઉના બધા વર્ગોની આવૃત્તિઓનો સરવાળો કરીને મેળવાય છે એવી આવૃત્તિ સંચયી આવૃત્તિ છે.

4. વર્ગીકૃત માહિતીનો મધ્યસ્થ,

મધ્યસ્થ $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$

સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને મેળવી શકાય છે.
સંકેતોને તેમના પ્રચલિત અર્થો છે.

5. સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણને આલેખીય સ્વરૂપે સંચયી આવૃત્તિ વક્ર અથવા 'થી ઓછા પ્રકાર'નો અને 'થી વધારે પ્રકાર'ના ઓજીવ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે.

6. વર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યસ્થને આલેખ દ્વારા, આ માહિતીઓના બે ઓજીવના છેદબિંદુના x-યામ તરીકે મેળવી શકાય છે.

વાચકને નોંધ

વર્ગીકૃત માહિતીના બહુલક અને મધ્યસ્થની ગણતરી કરવા માટે સૂત્રોના ઉપયોગ કરતાં પહેલાં તે સુનિશ્ચિત કરી લેવું જોઈએ કે, વર્ગ અંતરાલો સતત છે. આ જ શરત ઓજીવની રચના માટે પણ લાગુ પડે છે. વધુમાં, ઓજીવના કિસ્સામાં, બંને અક્ષો પર માપ અસમાન પણ હોઈ શકે.

સંભાવના 15

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute a formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

– R.S. Woodward

15.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ઘટનાઓની પ્રાયોગિક સંભાવનાઓનો અભ્યાસ ધોરણ IX માં કર્યો છે. તે પ્રયોગોનાં પ્રત્યક્ષ પરિણામો પર આધારિત હતી.

આપણે એક પ્રયોગની ચર્ચા કરી હતી. તેમાં એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળવાથી મળતાં પરિણામોની આવૃત્તિ નીચે પ્રમાણે હતી :

છાપ (H) : 455 કાંટો (T) : 545

આ પ્રયોગના આધારે, છાપ મળવાની પ્રાયોગિક સંભાવના $\frac{455}{1000}$, એટલે કે 0.455 હતી અને કાંટો મળવાની સંભાવના 0.545 હતી. (આ સાથે જ ધોરણ IX ગણિતશાસ્ત્રના પાઠ્યપુસ્તકના પ્રકરણ 15 નું ઉદાહરણ 1 જુઓ.) નોંધ કરો કે, આ સંભાવનાઓ એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળવાના પ્રયોગનાં પ્રત્યક્ષ પરિણામો પર આધારિત છે. આ કારણે, તે પ્રાયોગિક સંભાવનાઓ કહેવાય છે. વાસ્તવમાં, પ્રાયોગિક સંભાવનાઓ, ઘટનાઓ ઉદ્ભવે તે માટેના પ્રત્યક્ષ પ્રયોગો અને જરૂર પૂરતા સાનુકૂળ સંજોગોનાં પરિણામો પર આધારિત છે. તદ્ઉપરાંત, આ સંભાવનાઓ કેવળ 'અંદાજિત' છે. જો આપણે આ જ પ્રયોગને અન્ય 1000 વખત કરીએ, તો આપણને જુદી માહિતી મળી શકે અને તે અન્ય અંદાજિત સંભાવના આપતી હોય.

તમે એક સિક્કાને અનેક વખત ઉછાળવાનો પ્રયોગ ધોરણ IX માં કર્યો છે અને નોંધ્યું છે કે, ઘણી વાર સિક્કા પર છાપ (અથવા કાંટો) મળ્યો છે. (પ્રકરણ 15 ની પ્રવૃત્તિઓ 1 અને 2 નો સંદર્ભ જુઓ.) તમે એ પણ નોંધ્યું હશે કે,

જેમ જેમ સિક્કાને ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે, તેમ તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના, સંખ્યા $\frac{1}{2}$ ની નજીક અને નજીક પહોંચે છે. કેવળ તમે જ નહિ, પરંતુ દુનિયાના જુદા-જુદા ભાગોમાંથી અન્ય ઘણી બધી વ્યક્તિઓએ આ પ્રકારના પ્રયોગ કર્યા છે અને સિક્કા પર મળતી છાપની સંખ્યા નોંધી છે.

ઉદાહરણ તરીકે, અઢારમી સદીના ફ્રેન્ચ પ્રકૃતિશાસ્ત્રજ્ઞ ***કોમ્ટ દ બફ્ફને* (*Comte de Buffon*)** એક સિક્કાને 4040 વખત ઉછાળ્યો અને 2048 વખત છાપ મેળવી. આ કિસ્સામાં છાપ મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના $\frac{2048}{4040}$ હતી, એટલે કે 0.507. બ્રિટનના ***જે. ઈ. કેરીચે* (*J. E. Kerrich*)** સિક્કાને 10000 વખત ઉછાળતાં 5067 વખત છાપ મેળવી. આ કિસ્સામાં છાપ મેળવવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ હતી. આંકડાશાસ્ત્રી ***કાર્લ પીઅરસને* (*Karl Pearson*)** કેટલોક વધારે સમય ફાળવ્યો અને 24,000 વખત સિક્કાને ઉછાળ્યો. તેણે 12,012 વખત છાપ મેળવી અને આમ, તેણે છાપ મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના 0.5005 મેળવી હતી.

હવે, ધારો કે આપણે પૂછીએ, જો પ્રયોગને દસ લાખ વખત અથવા એક કરોડ વખત અને આમ વધુ ને વધુ વખત (પુનરાવર્તિત) કરવામાં આવે તો છાપ મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના શું થશે ? આપને સહજ જ્ઞાનથી અંતઃસ્ફુરણા થશે કે જેમ સિક્કાને ઉછાળવાની સંખ્યા વધતી જાય છે, તેમ છાપ (અથવા કાંટો) મળવાની પ્રયોગાત્મક સંભાવના સંખ્યા 0.5 એટલે કે $\frac{1}{2}$ ની આસપાસ સ્થાયી થાય છે. તેને જ આપણે છાપ મેળવવાની (અથવા કાંટો મેળવવાની) ***સૈદ્ધાંતિક સંભાવના* (*theoretical probability*)** કહીએ છીએ. તે તમે પછીના વિભાગમાં જોશો. આ પ્રકરણમાં, આપણે ઘટનાની **પ્રશિષ્ટ (સૈદ્ધાંતિક પણ કહેવાય છે)** સંભાવનાનો પરિચય અને આ ખ્યાલ પર આધારિત સરળ કૂટપ્રશ્નોની ચર્ચા કરીશું.

15.2 સંભાવના – પ્રશિષ્ટ અભિગમ

ચાલો, આપણે નીચે દર્શાવેલ પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

ધારો કે, એક સિક્કાને યાદચ્છિક રીતે ઉછાળ્યો છે.

> જ્યારે આપણે એક સિક્કો બોલીએ છીએ, ત્યારે આપણે માની લઈએ છીએ કે, તે 'સમતોલ' છે, એટલે કે, તેના માટે એવું કોઈ જ કારણ નથી કે તે બીજી બાજુ કરતાં એક બાજુ પર વધુ વખત નીચે પડે છે. એવા સિક્કાના આ સમપ્રમાણતાના ગુણધર્મને આપણે સમતોલ હોવાનો ગુણધર્મ કહીશું. શબ્દપ્રયોગ 'યાદચ્છિક ઉછાળ'નો આપણે એ અર્થ કરીશું કે, સિક્કો મુક્તપણે, કોઈપણ પ્રકારના પૂર્વગ્રહ કે વિઘ્ન વિના નીચે પડવા માટે મુક્ત છે.

આપણે અગાઉથી જ જાણીએ છીએ કે બે શક્ય રીતો પૈકી કોઈ એક રીતે જ સિક્કો નીચે પડશે - સિક્કા ઉપર છાપ (H) આવશે અથવા કાંટો (T) આવશે (સિક્કો તેની ધાર પર નીચે પડશે, તે શક્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, સિક્કો રેતીમાં પડે છે. આપણે આ શક્યતાને નકારી કાઢીએ છીએ.). આપણે વ્યાજબીપણે ધારી શકીએ છીએ કે, પ્રત્યેક પરિણામ, છાપ અથવા કાંટો, ઉદ્ભવવાની એટલી જ શક્યતા છે, જેટલી બીજાની. પરિણામો છાપ અથવા કાંટો, સમસંભાવી છે, એમ કહીને આપણે તેનો ઉલ્લેખ કરીશું.

સમસંભાવી પરિણામોના અન્ય ઉદાહરણ માટે, ધારો કે, આપણે એક પાસાને એકવાર ફેંકીએ છીએ. આપણા માટે, પાસાનો અર્થ હંમેશાં સમતોલ પાસો એવો કરીશું. શક્ય પરિણામો શું છે ? તે પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5, 6 છે.

પ્રત્યેક સંખ્યા પાસા ઉપર તે દેખાય તેની શક્યતા સમાન છે. તેથી પાસાને ફેંકવાનાં સમસંભાવી પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે.

શું પ્રત્યેક પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી હોય છે ? ચાલો આપણે જોઈએ.

ધારો કે, એક થેલામાં 4 લાલ દડા અને 1 ભૂરો દડો છે અને તમે થેલામાં જોયા વગર એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરો છો. કયાં પરિણામો મળશે ? શું પરિણામો - 'એક લાલ દડો' અને 'એક ભૂરો દડો' સમસંભાવી છે ? 4 લાલ દડા અને માત્ર એક ભૂરો દડો હોવાથી, તમે સંમત થશો કે, તમને ભૂરો દડો મળે તે કરતાં લાલ દડો મળવાની શક્યતા વધુ છે. તેથી, પરિણામ (લાલ દડો અથવા ભૂરો દડો) સમસંભાવી નથી. આમ છતાં, થેલામાંથી કોઈ પણ રંગનો એક દડો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવાના પ્રયોગનાં પરિણામ સમસંભાવી છે. તેથી, બધા જ પ્રયોગો માટે જરૂરી નથી કે, પરિણામો સમસંભાવી હોય.

પરંતુ, આ પ્રકરણમાં, હવે પછીથી, ***આપણે ધારી લઈશું કે, બધા જ પ્રયોગોનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.***

ધોરણ IX માં ઘટના E ની પ્રયોગાત્મક સંભાવના P(E) આપણે નીચે આપેલ સૂત્ર દ્વારા વ્યાખ્યાયિત કરી છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના E ઉદ્ભવે તેવા પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

સંભાવનાનું પ્રયોગમૂલક અર્થઘટન પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ ઘણી વખત મોટી સંખ્યાના પ્રયત્નો પુનરાવર્તિત કરી શકાય એવી પ્રત્યેક ઘટના પર લાગુ પાડી શકાય. પ્રયોગને પુનરાવર્તિત કરવાની ક્રિયાને કેટલીક મર્યાદાઓ છે, જેમ કે, તે ખૂબ જ ખર્ચાળ હોઈ શકે અથવા ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં અવ્યવહારુ પણ હોય. અલબત્ત, સિક્કાને ઉછાળવાના અથવા પાસાને ફેંકવાના પ્રયોગોમાં તે સારી રીતે કાર્ય કરે છે. પરંતુ, ઉપગ્રહનું પ્રક્ષેપણ કરવાના પ્રયોગના પુનરાવર્તન વિશે શું કહેવાય ? ખાસ કરીને પ્રક્ષેપણ દરમિયાન ઉપગ્રહના નિષ્ફળ જવાની પ્રયોગમૂલક સંભાવનાની ગણતરી કરવા માટે અથવા બહુમાળી ઈમારત ભૂકંપમાં નાશ પામે તેની પ્રયોગમૂલક સંભાવનાની ગણતરી કરવા માટે ઘટનાનું પુનરાવર્તન કરાય ?

જે પ્રયોગોમાં આપણે ચોક્કસ પ્રકારની ધારણાઓ કરવા માટે તૈયાર હોઈએ છીએ, તે પ્રયોગના પુનરાવર્તનને ટાળી શકાય, કારણ કે ધારણાઓ સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાની ગણતરીમાં પ્રત્યક્ષ રીતે મદદ કરે છે. સમસંભાવી પરિણામોની ધારણા આપણને સંભાવનાની નીચે આપેલ વ્યાખ્યા તરફ દોરી જાય છે. (આ ધારણા ઉપરનાં બે ઉદાહરણો સિક્કા તથા પાસા ઉછાળવા જેવા ઘણા પ્રયોગોમાં સત્ય છે.)

ઘટના E ની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના (પ્રશિષ્ટ સંભાવના પણ કહેવાય છે), P(E) તરીકે દર્શાવાય છે અને તેને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયોગનાં તમામ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા}}$$

અત્રે આપણે ધારી લઈએ છીએ કે, પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાને આપણે ટૂંકમાં સંભાવના તરીકે લઈશું.

સંભાવનાની આ વ્યાખ્યા *પિઅર સિમોન લાપ્લાસે (Pierre Simon Laplace)* C.E. 1795 માં આપી હતી.

Probability theory had its origin in the 16th century when an Italian physicist and mathematician ***J.Cardan*** wrote the first book on the subject, ***The Book on Games of Chance.*** Since its inception, the study of probability has attracted the attention of great mathematicians. ***James Bernoulli*** (C.E.1654 – C.E.1705), ***A. de Moivre*** (C.E.1667 – C.E.1754), and ***Pierre Simon Laplace*** are among those who made significant contributions to this field. Laplace's ***Theorie Analytique des Probabilités,*** C.E. 1812, is considered to be the greatest contribution by a single person to the theory of probability. In recent years, probability has been used extensively in many areas such as biology, economics, genetics, physics, sociology etc.

Pierre Simon Laplace
(C.E.1749-C.E.1827)

ચાલો, આપણે જેમના માટે કેટલીક સમસંભાવી પરિણામોની ધારણા સત્ય છે તેવી ઘટનાઓની સંભાવના શોધીએ.

ઉદાહરણ 1 : સિક્કાને એકવાર ઉછાળવામાં આવે ત્યારે છાપ (H) મળવાની સંભાવના શોધો તથા કાંટો (T) મળવાની સંભાવના પણ શોધો.

ઉકેલ : સિક્કાને એકવાર ઉછાળવાના પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામોની સંખ્યા બે છે - છાપ (H) અને કાંટો (T). છાપ મળે તેને ઘટના E લો. ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા (એટલે કે છાપ મળવાની) 1 છે. તેથી

$$P(E) = P(\text{છાપ}) = \frac{\text{E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા}} = \frac{1}{2}$$

આ જ પ્રમાણે, જો 'કાંટો મળે' તે ઘટના F હોય તો

$$P(F) = P(\text{કાંટો}) = \frac{1}{2}$$ (શા માટે ?)

ઉદાહરણ 2 : એક થેલામાં લાલ, ભૂરો અને પીળો એમ ત્રણ સમાન કદના દડા છે. ક્રિતિકા થેલામાં જોયા વગર એક દડો થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે છે. તેણે પસંદ કરેલ દડો (i) પીળો હોય (ii) લાલ હોય (iii) ભૂરો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : ક્રિતિકા થેલામાં જોયા વગર એક દડો થેલામાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે છે. તેથી, તે આપેલ દડામાંથી ગમે તે એક દડો પસંદ કરે એ સમસંભાવી છે.

'પસંદ કરેલ દડો પીળો હોય' તેને ઘટના Y લો,

'પસંદ કરેલ દડો ભૂરો હોય' તેને ઘટના B લો, અને 'પસંદ કરેલ દડો લાલ હોય' તેને ઘટના R લો.

હવે, શક્ય પરિણામોની કુલ સંખ્યા = 3 છે.

(i) ઘટના Y માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 1. તેથી, $P(Y) = \frac{1}{3}$

આ જ પ્રમાણે (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ અને (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$

નોંધ :

1. જે ઘટના પ્રયોગનું માત્ર એક જ પરિણામ ધરાવતી હોય તેને ***પ્રાથમિક ઘટના*** કહે છે. ઉદાહરણ 1 માં બંને ઘટનાઓ E અને F પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે. આ જ પ્રમાણે ઉદાહરણ 2 માં ત્રણેય ઘટનાઓ Y, B અને R પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે.

2. ઉદાહરણ 1માં આપણે નોંધ કરીએ : $P(E) + P(F) = 1$

ઉદાહરણ 2 માં આપણે નોંધ કરીએ : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

અવલોકન કરો કે, ***પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 છે.*** વ્યાપક રીતે પણ આ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 3 : ધારો કે, આપણે પાસાને એકવાર ફેંકીએ છીએ. (i) પાસાના ઉપરના પૃષ્ઠ ઉપર 4 કરતાં મોટી સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના કેટલી છે ? (ii) 4 કે 4 થી નાની સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના કેટલી છે ?

ઉકેલ : (i) અહીં, ધારો કે, '4 કરતાં મોટી સંખ્યા મેળવવી' તે ઘટના E છે. પાસો ફેંકવાના કુલ શક્ય પરિણામો છ છે : 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 અને E માટે સાનુકૂળ પરિણામો 5 અને 6 છે. માટે E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 2 છે. તેથી,

$$P(E) = P\,(4 \text{ કરતાં મોટી સંખ્યા}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) ધારો કે '4 કે 4 થી નાની સંખ્યા મેળવી' તે ઘટના F છે. શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = 6

ઘટના F માટે સાનુકૂળ પરિણામો 1, 2, 3, 4 છે.

તેથી, F માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 4 છે.

માટે, $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ઉપરના ઉદાહરણમાં ઘટનાઓ E અને F પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે ? ના, તેઓ પ્રાથમિક ઘટનાઓ નથી કારણ કે, ઘટના E માં 2 પરિણામો અને ઘટના F માં 4 પરિણામો છે.

નોંધ : ઉદાહરણ 1 પરથી, આપણે નોંધ કરીએ,

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \tag{1}$$

જ્યાં, E એ 'છાપ મેળવવાની' ઘટના છે અને F એ 'કાંટો મેળવવાની' ઘટના છે. ઉદાહરણ 3 નાં (i) અને (ii) પરથી, આપણને મળે છે ;

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \tag{2}$$

જ્યાં, E એ ઘટના '4 કરતાં મોટી સંખ્યા' અને F એ ઘટના 4 કરતાં નાની અથવા તેને સમાન સંખ્યા છે.

આપણે નોંધીએ કે, 4 કરતાં મોટી નહી તેવી સંખ્યા મેળવવી એ 4 કે 4 કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવા બરાબર જ છે અને એથી ઉલટું પણ.

ઉપર દર્શાવેલ (1) અને (2) માં, શું F એ 'not E' (એટલે કે, 'E નહિ') ને સમાન નથી ? હા, તે છે. આપણે ઘટના 'E નહી' ને $\bar{E}$ દ્વારા દર્શાવીશું.

તેથી $P(E) + P(E \text{ નહિ}) = 1$

એટલે કે $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

આ પરિણામ આપણને આપે છે, $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ ***ઘટના* E *માટે સત્ય છે કે* $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$**

ઘટના $\bar{E}$, ઘટના 'E નહિ' રજૂ કરે છે. તેને ઘટના E ની પૂરક ઘટના કહે છે. આપણે E અને $\bar{E}$ એકબીજાની પૂરક ઘટનાઓ છે તેમ પણ કહીએ છીએ.

આગળનો અભ્યાસ કરતાં પહેલાં, ચાલો આપણે નીચે આપેલા પ્રશ્નોના ઉત્તર શોધવાના પ્રયત્ન કરીએ.

(i) સમતોલ પાસાને એકવાર ઉછાળતાં સંખ્યા 8 મળે તેની સંભાવના શું છે ?

(ii) સમતોલ પાસાને એકવાર ઉછાળતાં 7 કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવાની સંભાવના શું છે ?

ચાલો આપણે (i) નો ઉત્તર જોઈએ :

આપણે જાણીએ છીએ કે પાસાને એકવાર ઉછાળતાં માત્ર છ શક્ય પરિણામો મળે છે. આ પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 છે. પાસાના કોઈ પણ પૃષ્ઠ પર 8 અંકિત નથી, તેથી 8 માટે કોઈ પણ પરિણામ સાનુકૂળ નથી. એટલે કે, આવાં પરિણામોની સંખ્યા શૂન્ય છે. બીજા શબ્દોમાં, પાસાને એક વાર ઉછાળતાં 8 મેળવવો, અશક્ય છે.

તેથી, $P(8 \text{ મેળવવું}) = \frac{0}{6} = 0$

એટલે કે, **જે ઘટના ઉદ્ભવવી અશક્ય છે તેની સંભાવના 0 છે. આવી ઘટનાને *અશક્ય ઘટના* કહે છે.**

ચાલો આપણે (ii) નો ઉત્તર જોઈએ :

પાસાની દરેક સપાટી પર 7 કરતાં નાની સંખ્યા અંકિત કરેલ હોવાથી, એ વાત ચોક્કસ છે કે, પાસાને એકવાર ઉછાળવાથી હંમેશા 7 કરતાં નાની સંખ્યા જ મળશે. તેથી, સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા પણ બધા જ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા જેટલી જ એટલે કે 6 છે.

એના પરિણામ સ્વરૂપે $P(E) = P(7 \text{ કરતાં નાની સંખ્યા મેળવવી}) = \frac{6}{6} = 1$

તેથી, જે ઘટના ચોક્કસપણે અથવા નિશ્ચિતપણે ઉદ્ભવે તેમ હોય તેની સંભાવના 1 છે. આવી ઘટનાને ચોક્કસ ઘટના અથવા નિશ્ચિત ઘટના કહે છે.

નોંધ : સંભાવના P(E) ની વ્યાખ્યા પરથી, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, અંશ (ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા) એ હંમેશાં છેદ જેટલી અથવા તેનાં કરતા નાની (શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા) સંખ્યા છે. તેથી,

$$0 \le P(E) \le 1$$

હવે, ચાલો આપણે પત્તાંની રમત સાથે સંકળાયેલ ઉદાહરણ લઈએ. તમે પત્તાં રમવાની થોકડી જોઈ છે ? તે 52 પત્તાં ધરાવે છે તેમને એક ભાતનાં 13 પત્તાં હોય તેવા 4 સમૂહમાં વિભાજિત કરી શકાય છે. પ્રત્યેક પત્તું કાળી (♠), લાલ (♥), ચોકટ (♦) અને ફુલ્લી (♣) નું હોય છે. કાળી અને ફુલ્લીનાં પત્તાં કાળા રંગના, જ્યારે લાલ અને ચોકટનાં પત્તાં લાલ રંગના હોય છે. પ્રત્યેક સમૂહમાં એક્કો, રાજા, રાણી, ગુલામ, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 અને 2 નાં પત્તાં હોય છે. રાજા, રાણી અને ગુલામના પત્તાંઓને ***મુખમુદ્રા પત્તાં (face cards)*** કહે છે.

ઉદાહરણ 4 : સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે. ખેંચેલું પત્તું (i) એક્કો હોય (ii) એક્કો ન હોય તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : સરખી રીતે ચીપેલાં પત્તાં સમસંભાવી પરિણામોની ખાતરી આપે છે.

(i) થોકડીમાં 4 એક્કા હોય છે. 'પત્તું એક્કો છે' તેને ઘટના E લો.

ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 4 છે અને શક્ય પરિણામોની સંખ્યા 52 છે. (શા માટે ?)

તેથી, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) 'ખેંચેલું પત્તું એક્કો નથી' તે ઘટનાને F લો.

ઘટના F માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $= 52 - 4 = 48$ છે. (શા માટે ?)

શક્ય પરિણામોની સંખ્યા $= 52$

તેથી, $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

નોંધ : નોંધ કરો કે, F બીજું કશું નહીં પરંતુ $\overline{E}$ છે. તેથી, આપણે P(F) ની ગણતરી નીચે પ્રમાણે પણ કરી શકીએ : $P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

ઉદાહરણ 5 : બે ખેલાડીઓ, સંગીતા અને રેશ્મા ટેનિસ મૅચ રમે છે. સંગીતા મૅચ જીતે તેની સંભાવના 0.62 આપેલ છે. રેશ્મા મૅચ જીતે તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, S અને R અનુક્રમે સંગીતા મૅચ જીતે અને રેશ્મા મૅચ જીતે તે ઘટનાઓ દર્શાવે છે.

સંગીતાની મૅચ જીતવાની સંભાવના $= P(S) = 0.62$ (આપેલ છે.)

રેશ્માની મૅચ જીવતાની સંભાવના $= P(R) = 1 - P(S)$ [કારણ કે, R અને S પૂરક ઘટનાઓ છે.]

$= 1 - 0.62 = 0.38$

ઉદાહરણ 6 : સવિતા અને હમિદા મિત્રો છે. બંનેના (i) જન્મદિવસ જુદા-જુદા હોય (ii) જન્મદિવસ એક જ હોય તેની સંભાવના કેટલી થશે ? (લીપ વર્ષને અવગણવું.)

ઉકેલ : બે મિત્રોમાંથી, એક છોકરી, કહો સવિતાનો જન્મદિવસ વર્ષનો કોઈ પણ દિવસ હોઈ શકે છે. હવે, હમિદાનો જન્મદિવસ પણ વર્ષનાં 365 દિવસ પૈકી કોઈ પણ દિવસ હોઈ શકે.

આપણે માની લઈશું કે, આ 365 પરિણામો સમસંભાવી છે.

(i) જો હમિદાનો જન્મદિવસ, સવિતાના જન્મદિવસ કરતાં જુદો હોય, તો તેના જન્મદિવસ માટે સાનુકૂળ પરિણામો $365 - 1 = 364$ છે.

તેથી, P (હમિદાનો જન્મદિવસ એ સવિતાના જન્મદિવસથી જુદો છે.) $= \frac{364}{365}$

(ii) P (સવિતા અને હમિદાનો જન્મદિવસ એક જ છે.)

$= 1 -$ P (બંનેના જન્મદિવસ જુદા છે.)

$$= 1 - \frac{364}{365} \quad [P(\overline{E}) = 1 - P(E) \text{ નો ઉપયોગ કરતાં}]$$

$$= \frac{1}{365}$$

ઉદાહરણ 7 : એક શાળાના ધોરણ X માં 40 વિદ્યાર્થીઓ છે. તેમાંથી 25 છોકરીઓ અને 15 છોકરાઓ છે. વર્ગ શિક્ષકે એક વિદ્યાર્થીને વર્ગ પ્રતિનિધિ તરીકે પસંદ કરવાનો છે. તે દરેક વિદ્યાર્થીના નામ ભિન્ન ભિન્ન ચિઠ્ઠી પર લખે છે, ચિઠ્ઠી એકસમાન છે. પછી તે ચિઠ્ઠીઓને થેલામાં મૂકે છે અને તેમને સંપૂર્ણરીતે મિશ્ર કરે છે. પછી તે થેલામાંથી એક ચિઠ્ઠી કાઢે છે. ચિઠ્ઠી પર લખેલ નામ (i) છોકરીનું હોય (ii) છોકરાનું હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : કુલ 40 વિદ્યાર્થીઓ છે અને એક નામની ચિઠ્ઠી પસંદ કરવાની છે.

(i) શક્ય પરિણામોની કુલ સંખ્યા 40 છે.

છોકરીનું નામ લખેલ ચિઠ્ઠી પસંદ કરી હોય તેના માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 25 છે. (શા માટે ?)

તેથી, P (છોકરીના નામવાળી ચિઠ્ઠી) $= \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) છોકરાનું નામ લખેલ ચિઠ્ઠી પસંદ કરી હોય તેના માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 15 છે. (શા માટે ?)

તેથી, P (છોકરાના નામવાળી ચિઠ્ઠી) $= \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

નોંધ : P (છોકરો) આપણે અન્ય રીતે પણ શોધી શકીએ.

P (છોકરો) = 1 – P (છોકરો નથી) = 1 – P (છોકરી) $= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

ઉદાહરણ 8 : એક ડબામાં 3 ભૂરી, 2 સફેદ અને 4 લાલ લખોટીઓ છે. જો ડબ્બામાંથી યાદચ્છિક રીતે એક લખોટી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો તે (i) સફેદ (ii) ભૂરી (iii) લાલ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : એમ કહેવું કે, યાદચ્છિક રીતે એક લખોટી પસંદ કરવી, એ એવું કહેવાનો ટૂંકો રસ્તો છે કે, બધી જ લખોટીઓ સમસંભાવીપણે પસંદ થઈ શકે છે. તેથી, શક્ય પરિણામોની સંખ્યા = 3 + 2 + 4 = 9 (શા માટે ?)

ધારો કે, W એ પસંદ થયેલ ‘લખોટી સફેદ છે’ તે ઘટના, B એ ‘લખોટી ભૂરી છે’ તે ઘટના અને R એ ‘લખોટી લાલ છે’ તે ઘટના દર્શાવે છે.

(i) ઘટના W માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 2 છે.

તેથી, $P(W) = \frac{2}{9}$

આ જ પ્રમાણે, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ અને (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

નોંધ કરો કે, P(W) + P(B) + P(R) = 1

ઉદાહરણ 9 : હરપ્રીત બે જુદા-જુદા સિક્કાઓને એક સાથે ઉછાળે છે (કહો, 1 ₹ નો એક અને 2 ₹ નો બીજો) તે ઓછામાં ઓછી એક છાપ (H) મેળવે તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : આપણે ‘છાપ’ માટે H અને ‘કાંટો’ માટે T લખીશું. જ્યારે બે સિક્કા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે, ત્યારે શક્ય પરિણામો (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) મળે છે, તે તમામ સમસંભાવી છે. અહીં, (H, H) નો અર્થ પ્રથમ સિક્કા (કહો, ₹ 1) પર છાપ અને બીજા સિક્કા (₹ 2) પર પણ છાપ મળે છે. આ જ પ્રમાણે (H, T) નો અર્થ પ્રથમ સિક્કા પર છાપ અને બીજા સિક્કા પર કાંટો છે અને આમ આગળ.

ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામો, ‘ઓછામાં ઓછી એક છાપ’; (H, H), (H, T) અને (T, H) છે. (શા માટે ?)

તેથી, E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 3 છે.

માટે, $\quad P(E) = \frac{3}{4}$

એટલે કે, હરપ્રીત ઓછામાં ઓછી એક છાપ મેળવે તેની સંભાવના $\frac{3}{4}$ છે.

નોંધ : તમે P(E) નીચે પ્રમાણે પણ શોધી શકો છો :

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad (\text{કારણ કે, } P(\overline{E}) = P\ (\text{છાપ નહિ}) = \frac{1}{4})$$

અત્યાર સુધી જેમની ચર્ચા કરી તે બધાં જ ઉદાહરણોમાં તમે એ નિરીક્ષણ કર્યું કે પ્રત્યેક પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામોની સંખ્યા સાન્ત (finite) હતી ? જો ના હોય, તો શું થાય તે ચકાસીએ.

એવા ઘણા પ્રયોગો છે કે જેનાં પરિણામો આપેલ બે સંખ્યાઓ વચ્ચેની ગમે તે સંખ્યા હોય, અથવા જેનાં પરિણામો વર્તુળ અથવા લંબચોરસની અંદરનું પ્રત્યેક બિંદુ હોય, વગેરે. શું હવે તમે તમામ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા ગણી શકો છો ? તમે જાણો છો કે, આ શક્ય નથી ‘કારણ કે બે સંખ્યાઓ વચ્ચે અસંખ્ય (અનંત) સંખ્યાઓ હોય છે, અથવા વર્તુળની અંદર અનંત બિંદુઓ હોય છે. તેથી, સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાની જે વ્યાખ્યા તમે શીખ્યાં તે વર્તમાન સ્વરૂપમાં લાગુ કરી શકાશે નહિ. આમાંથી બહાર નીકળવાનો શું માર્ગ છે ? આના ઉત્તર માટે, ચાલો આપણે નીચે આપેલ ઉદાહરણનો વિચાર કરીએ :

ઉદાહરણ 10* : સંગીત ખુરશીની રમતમાં, સંગીત પૂરું પાડતી વ્યક્તિને સૂચના આપવામાં આવી છે કે, તે વગાડવાનું શરૂ કરે તેની 2 મિનિટમાં ગમે તે સમયે સંગીત વગાડવાનું રોકી દે. સંગીત શરૂ થયા પછીની પહેલી અડધી મિનિટમાં સંગીત બંધ થઈ જશે તેની સંભાવના શું છે ?

ઉકેલ : અહીં શક્ય પરિણામો 0 અને 2 વચ્ચેની તમામ સંખ્યાઓ છે. આ 0 થી 2 વચ્ચેનો સંખ્યા રેખા પરનો ભાગ છે. (આકૃતિ 15.1 જુઓ.)

આકૃતિ 15.1

ધારો કે, E એ ઘટના છે કે ‘પ્રથમ અડધી મિનિટ દરમિયાન સંગીત રોકાયું છે.’ ઘટના E ને સાનુકૂળ પરિણામો સંખ્યા રેખા પર 0 થી $\frac{1}{2}$ સુધીનાં બિંદુઓ છે.

0 થી 2 સુધીનું અંતર 2 છે અને 0 થી $\frac{1}{2}$ સુધીનું અંતર $\frac{1}{2}$ છે. બધાં પરિણામો સમસંભાવી હોવાથી આપણે કહી શકીએ કે, કુલ અંતર 2 માંથી, ઘટના E માટે સાનુકૂળ અંતર $\frac{1}{2}$ છે.

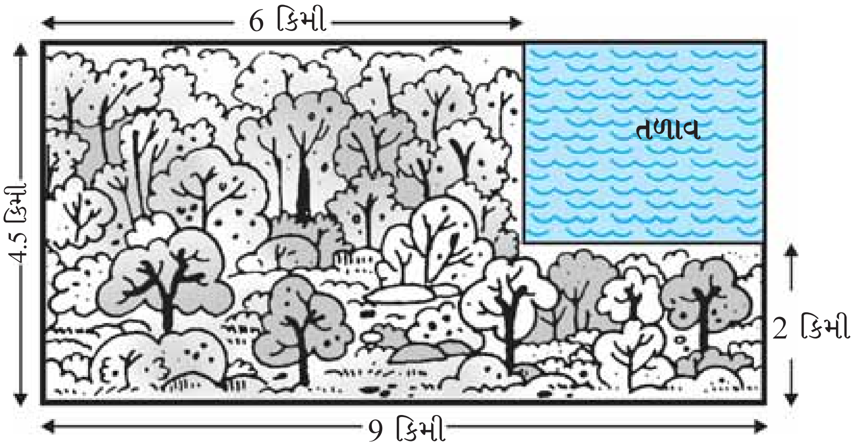
તેથી, $\quad P(E) = \dfrac{\text{ઘટના E માટે સાનુકૂળ અંતર}}{\text{કુલ અંતર કે, જેમાં પરિણામો સમાઈ શકે છે}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

શું આપણે ઉદાહરણ 10 નો ખ્યાલ, સાનુકૂળ ક્ષેત્રફળ અને કુલ ક્ષેત્રફળના ગુણોત્તરની સંભાવના શોધવા માટે વિસ્તૃત કરી શકીએ ?

* પરીક્ષાના દૃષ્ટિબિંદુથી નથી.

ઉદાહરણ 11* : ખોવાઈ ગયેલ હેલિકૉપ્ટર વિશે ખબર મળી છે કે તે આકૃતિ 15.2 માં દર્શાવેલ લંબચોરસ વિસ્તારમાં ક્યાંક તૂટી પડ્યું છે. શું સંભાવના છે કે, તે આકૃતિમાં બતાવેલ તળાવમાં તૂટી પડ્યું છે ?



આકૃતિ 15.2

ઉકેલ : હેલિકૉપ્ટર આપેલ વિસ્તારમાં ગમે ત્યાં તૂટી પડે તે સમસંભાવી છે.

હેલિકૉપ્ટર જ્યાં તૂટીને પડી શકે છે તે વિસ્તારનું ક્ષેત્રફળ = (4.5 × 9) કિમી^{2} = 40.5 કિમી^{2}

તળાવનું ક્ષેત્રફળ = (2.5 × 3) કિમી^{2} = 7.5 કિમી^{2}

તેથી, P (હેલિકૉપ્ટર તળાવમાં તૂટી પડે) = $\frac{7.5}{40.5} = \frac{75}{405} = \frac{5}{27}$

ઉદાહરણ 12 : પૂંઠાની પેટીમાં રાખેલાં 100 ખમીસ પૈકી 88 ક્ષતિરહિત છે. તે પૈકી 8 માં નાની ખામીઓ છે અને 4 માં મોટી ખામીઓ છે. વેપારી જિમી ક્ષતિરહિત ખમીસ જ સ્વીકારશે, પરંતુ અન્ય વેપારી સુજાતા માત્ર મોટી ખામીવાળા ખમીસ જ નકારશે. પેટીમાંથી એક ખમીસ યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે.

(i) તે જિમીને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) તે સુજાતાને સ્વીકાર્ય હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : 100 ખમીસ ધરાવતી પેટીમાંથી એક ખમીસ યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. માટે, 100 સમસંભાવી પરિણામો છે.

(i) જિમીને સાનુકૂળ (એટલે કે, સ્વીકાર્ય) પરિણામોની સંખ્યા = 88 (શા માટે ?)

આથી, જિમીને સ્વીકાર્ય હોય તેવું ખમીસ પસંદ થયું હોય તેની સંભાવના = $\frac{88}{100}$ = 0.88

(ii) સુજાતાને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા = 88 + 8 = 96 (શા માટે ?)

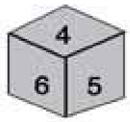
તેથી, P (સુજાતાને સ્વીકાર્ય હોય તેવું ખમીસ) = $\frac{96}{100}$ = 0.96

ઉદાહરણ 13 : એક ભૂરો અને એક રાખોડી એમ બે પાસાને એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. તમામ શક્ય પરિણામો લખો. પાસાની ઉપરની સપાટી પર દેખાતી સંખ્યાઓનો સરવાળો (i) 8 હોય (ii) 13 હોય (iii) 12 કે, તેનાથી નાનો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : જ્યારે ભૂરો પાસો '1' બતાવે, ત્યારે રાખોડી પાસો 1, 2, 3, 4, 5, 6 પૈકી કોઈ પણ એક સંખ્યા બતાવે. આ

* પરીક્ષાના દૃષ્ટિબિંદુથી નથી.

જ રીતે જ્યારે ભૂરો પાસો '2', '3', '4', '5' અથવા '6' બતાવે ત્યારે શક્ય પરિણામોની સૂચિ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે ; પ્રત્યેક ક્રમયુક્ત જોડનો પ્રથમ ઘટક એ ભૂરા પાસા પર દેખાતી સંખ્યા અને દ્વિતીય ઘટક એ રાખોડી પાસા પર દેખાતી સંખ્યા છે.



	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

આકૃતિ 15.3

આપણે નોંધીએ કે, (1, 4) એ (4, 1) કરતાં જુદી છે. (શા માટે ?)

તેથી શક્ય પરિણામોની સંખ્યા $= 6 \times 6 = 36$

(i) ઘટના 'બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 8 છે' ને E વડે દર્શાવો તેનાં સાનુકૂળ પરિણામો (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) અને (6, 2) છે. (જુઓ આકૃતિ 15.3.)

એટલે કે, ઘટના E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 5 છે.

તેથી, $P(E) = \frac{5}{36}$

(ii) આકૃતિ 15.3 પરથી, તમે જોઈ શકો છો તેમ ઘટના F, 'બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 13' માટે કોઈ પણ પરિણામ સાનુકૂળ નથી.

તેથી, $P(F) = \frac{0}{36} = 0$

(iii) આકૃતિ 15.3 પરથી, તમે જોઈ શકો છો તેમ ઘટના G, 'બે સંખ્યાઓનો સરવાળો 12 કે તેથી ઓછો હોય તે માટે તમામ પરિણામો સાનુકૂળ છે. તેથી, $P(G) = \frac{36}{36} = 1$.

સ્વાધ્યાય 15.1

1. નીચેનાં વિધાનો પૂર્ણ કરો :

(i) ઘટના E ની સંભાવના + ઘટના 'E નહિ' ની સંભાવના = ...

(ii) ઉદ્‌ભવી ન શકે તેવી ઘટનાની સંભાવના .... છે. આવી ઘટનાને .... કહે છે.

(iii) ચોક્કસપણે ઉદ્‌ભવતી ઘટનાની સંભાવના .... છે. આવી ઘટનાને .... કહે છે.

(iv) પ્રયોગની તમામ મૂળભૂત (પ્રાથમિક) ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો .... છે.

(v) ઘટનાની સંભાવના .... થી મોટી અથવા તેના જેટલી અને .... થી નાની અથવા તેના જેટલી હોય છે.

2. નીચે આપેલ પૈકી કયા પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે ? સમજાવો.

(i) **પ્રયોગ :** ડ્રાઈવર કાર ચાલુ કરવાનો પ્રયત્ન કરે છે. **પરિણામ :** કાર ચાલુ થાય છે અથવા ચાલુ નથી થતી.

(ii) **પ્રયોગ :** ખેલાડી બાસ્કેટબૉલને તાકીને મારવાનો પ્રયત્ન કરે છે. **પરિણામ :** તે તાકીને બાસ્કેટમાં નાખે છે અથવા ચૂકી જાય છે.

(iii) **પ્રયોગ :** ખરા-ખોટા પ્રશ્નનો જવાબ આપવાની કસોટી આપવામાં આવી છે. **પરિણામ :** જવાબ સત્ય છે કે અસત્ય.

(iv) **પ્રયોગ :** બાળક જન્મ્યું છે. **પરિણામ :** તે બાબો છે કે બેબી.

3. શા માટે ફુટબૉલની રમતની શરૂઆતમાં કઈ ટુકડીને બૉલ મળવો જોઈએ તે નક્કી કરવા, સિક્કાને ઉછાળવો નિષ્પક્ષ ક્રિયા છે એવું વિચારાય છે ?

4. નીચેનામાંથી કયા વિકલ્પ ઘટનાની સંભાવના ન હોઈ શકે.

(A) $\frac{2}{3}$ (B) – 1.5 (C) 15 % (D) 0.7

5. જો P(E) = 0.05 હોય તો 'E-નહિ' ની સંભાવના શું છે ?

6. એક થેલામાં લીંબુના સ્વાદની જ મીઠાઈઓ છે. માલિની થેલામાં જોયા વગર એક મીઠાઈ બહાર કાઢે છે. તે (i) નારંગીના સ્વાદની મીઠાઈ હોય (ii) લીંબુના સ્વાદની મીઠાઈ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

7. આપેલ છે કે 3 વિદ્યાર્થીઓના સમૂહમાં બે વિદ્યાર્થીઓનો જન્મદિવસ સમાન ન હોય તેની સંભાવના 0.992 છે. બે વિદ્યાર્થીઓનો જન્મદિવસ સમાન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

8. એક થેલામાં 3 લાલ અને 5 કાળા દડા છે. થેલામાંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. બહાર કાઢેલ દડો (i) લાલ હોય (ii) લાલ ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

9. એક પેટીમાં 5 લાલ લખોટીઓ, 8 સફેદ લખોટીઓ અને 4 લીલી લખોટીઓ છે. પેટીમાંથી એક લખોટી યાદચ્છિક રીતે બહાર કાઢવામાં આવે છે. બહાર કાઢેલ લખોટી (i) લાલ હોય (ii) સફેદ હોય (iii) લીલી ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

10. એક ગલ્લામાં 50 p ના સો સિક્કા, ₹ 1ના પચાસ સિક્કા, ₹ 2 ના વીસ સિક્કા અને ₹ 5 ના દસ સિક્કા છે. જ્યારે આ ગલ્લાને ઊંધો કરવામાં આવે ત્યારે પાત્રમાંથી કોઈ એક સિક્કો બહાર પડે તે સમસંભાવી હોય, તો સિક્કો (i) 50 p નો સિક્કો હશે (ii) ₹ 5 નો સિક્કો નહિ હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

11. ગોપી પોતાના માછલીઘર માટે દુકાનમાંથી માછલી ખરીદે છે. દુકાનદાર મોટી ટાંકીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક માછલી બહાર કાઢે છે. આ ટાંકીમાં 5 નર માછલી અને 8 માદા માછલી (જુઓ આકૃતિ 15.4.) છે. બહાર કાઢેલ નર માછલી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

આકૃતિ 15.4

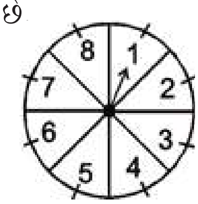
12. તકની એક રમતમાં ગોળ ફરતું એક તીર (arrow) હોય છે. તે 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 માંથી કોઈ એક સંખ્યા પાસે નિર્દેશ કરતું અટકે છે (આકૃતિ 15.5 જુઓ.) અને આ સમસંભાવી પરિણામો છે

(i) તે 8 તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) અયુગ્મ સંખ્યા તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

(iii) 2 કરતાં મોટી સંખ્યા તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

(iv) 9 કરતાં નાની સંખ્યા તરફ નિર્દેશ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?



આકૃતિ 15.5

13. પાસાને એકવાર ફેંકવામાં આવે છે તો (i) અવિભાજ્ય સંખ્યા (ii) 2 અને 6 વચ્ચેની સંખ્યા (iii) અયુગ્મ સંખ્યા મળવાની સંભાવના શોધો.

14. સરખી રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંની થોકડીમાંથી એક પત્તું કાઢવામાં આવે, તો

(i) લાલ રંગનો રાજા (ii) મુખમુદ્રાવાળું પત્તું (iii) લાલ રંગનું મુખમુદ્રાવાળું પત્તું

(iv) લાલનો ગુલામ (v) કાળીનું પત્તું (vi) ચોકટની રાણી

મળવાની સંભાવના શોધો.

15. પાંચ ચોકટનાં પત્તાં - દસ્સો, ગુલામ, રાણી, રાજા અને એક્કો એ તમામના મુખ નીચે તરફ રાખીને સરખી રીતે ચીપેલાં છે પછી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે ખેંચવામાં આવે છે.

(i) પત્તું રાણીનું હશે તેની સંભાવના શું છે ?

(ii) જો રાણીને કાઢીને એક બાજુએ મૂકવામાં આવે અને બીજું પત્તું ખેંચવામાં આવે તે (a) એક્કો હોય (b) રાણી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

16. ખામીવાળી 12 પેન આકસ્મિક રીતે 132 સારી પેનની સાથે ભળી ગઈ છે. એવું શક્ય નથી કે, કેવળ પેનને જોઈને જ કહી શકાય કે, પેન ખામીયુક્ત છે કે નહિ. આ જથ્થામાંથી એક પેન યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. કાઢવામાં આવેલી પેન ખામીરહિત છે તેની સંભાવના શોધો.

17. (i) 20 વીજળીના ગોળાઓનો જથ્થો 4 ખામીયુક્ત ગોળા ધરાવે છે. આ જથ્થામાંથી એક ગોળો યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. આ ગોળો ખામીયુક્ત હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) ધારો કે, (i) માં કાઢવામાં આવેલ ગોળો ખામીયુક્ત નથી અને તેને પાછો મૂકવામાં પણ નથી આવ્યો. હવે, બાકીનાં ગોળામાંથી એક ગોળો યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે છે. આ ગોળો ખામીયુક્ત ન હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

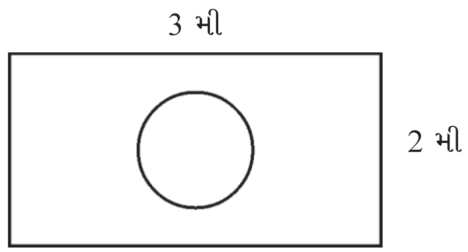
18. એક ખોખામાં 1 થી 90 સુધીના અંક લખેલી 90 ગોળ તકતીઓ છે. જો ખોખામાંથી એક ગોળ તકતી યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તેના પર (i) બે અંકની સંખ્યા (ii) પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા (iii) 5 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

19. એક બાળક પાસે એક એવો પાસો છે જેની છ સપાટીઓ નીચે આપેલા અક્ષરો બતાવે છે :

A	B	C	D	E	A

આ પાસાને એકવાર ઉછાળવામાં આવે છે પાસા પર (i) A મળે (ii) D મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

20*. ધારો કે, એક પાસાને તમે યાદચ્છિક રીતે આકૃતિ 15.6 માં બતાવ્યા પ્રમાણે લંબચોરસ ક્ષેત્ર પર ફેંકો છો. તે 1 મી વ્યાસના વર્તુળની અંદર પડશે તેની સંભાવના કેટલી ?



આકૃતિ 15.6

21. એક જથ્થો 144 બૉલપેન ધરાવે છે. તેમાંથી 20 ખામીયુક્ત અને બાકીની સારી છે. જો પેન સારી હશે તો, નુરી પેન ખરીદશે, પરંતુ જો તે ખામીયુક્ત હશે તો ખરીદશે નહિ. દુકાનદાર યાદચ્છિક રીતે એક પેન કાઢે છે અને તેને આપે છે.

(i) તે પેન ખરીદશે તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) તે પેન નહિ ખરીદે તેની સંભાવના કેટલી ?

22. ઉદાહરણ 13 નાં સંદર્ભમાં (i) નીચે આપેલ કોષ્ટક પૂરું કરો :

ઘટના : 'પાસા પરનો સરવાળો'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
સંભાવના	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) એક વિદ્યાર્થી દલીલ કરે છે કે 11 શક્ય પરિણામો 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 અને 12 છે. તેમાંનાં પ્રત્યેકની સંભાવના $\frac{1}{11}$ છે. શું આપ આ દલીલ સાથે સહમત છો ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

23. એક રમતમાં એક રૂપિયાના સિક્કાને 3 વાર ઉછાળવાનો છે અને તેના પરિણામ દરેક વખતે નોંધવાના છે. જો તમામ વખત ઉછાળતાં સરખું પરિણામ મળે, એટલે કે ત્રણ છાપ અથવા ત્રણ કાંટા તો હનિફ રમત જીતી જાય છે, અન્યથા હારે છે. તો હનિફ રમત હારે તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

24. પાસાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે :

(i) એક પણ વખત ઉપરના પૃષ્ઠ પર 5 મળે નહિ.

(ii) ઓછામાં ઓછી એકવાર ઉપરના પૃષ્ઠ પર 5 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

[**સૂચન :** એક પાસાને બે વાર ઉછાળવો અને બે પાસાને એક સાથે ઉછાળવા, એ બંનેને એક જ પ્રયોગ ગણવામાં આવે છે.]

25. નીચેનામાંથી કઈ દલીલો સાચી છે અને કઈ સાચી નથી ? તમારા જવાબ માટે કારણો આપો.

(i) જો બે સિક્કાને એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો ત્રણ શક્યતાઓ મળે છે - બે છાપ અથવા બે કાંટા અથવા પ્રત્યેકનો એક તેથી, આ પ્રત્યેક પરિણામની સંભાવના $\frac{1}{3}$ છે.

(ii) જો પાસાને ઉછાળવામાં આવે તો બે શક્ય પરિણામો મળે છે - અયુગ્મ સંખ્યા અથવા યુગ્મ સંખ્યા, તેથી અયુગ્મ સંખ્યા મળવાની સંભાવના $\frac{1}{2}$ છે.

સ્વાધ્યાય 15.2 (વૈકલ્પિક)*

1. બે ગ્રાહકો શ્યામ અને એકતા એક જ અઠવાડિયામાં (મંગળવાર થી શનિવાર) કોઈ ચોક્કસ દુકાનની મુલાકાત લે છે. દરેક વ્યક્તિ કોઈ પણ દિવસે દુકાનની મુલાકાત, અન્ય દિવસની જેમ જ લે છે. બંને વ્યક્તિ દુકાનની મુલાકાત (i) એક જ દિવસે (ii) ક્રમિક (એક પછી એક) દિવસોએ (iii) જુદા-જુદા દિવસોએ લેશે તેની સંભાવના કેટલી ?

2. પાસા પર સંખ્યાઓ એ રીતે લખવામાં આવી છે કે તેનાં પૃષ્ઠ, સંખ્યાઓ 1, 2, 2, 3, 3, 6 દર્શાવે છે. તે પાસાને બે વાર ઉછાળવામાં આવે છે અને બંને પાસા પર મળતી સંખ્યાઓનો સરવાળો પાછળના કોષ્ટકમાં નોંધી તે પૂર્ણ કરો :

* પરીક્ષાના દૃષ્ટિબિંદુથી નથી.

બીજીવાર ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓ	પ્રથમવાર ઉછાળતાં મળતી સંખ્યાઓ					
+	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2					5	
3						
3			5			9
6	7	8	8	9	9	12

કુલ સરવાળો

(i) યુગ્મ મળે. (ii) 6 મળે. (iii) ઓછામાં ઓછો 6 મળે તેની સંભાવના કેટલી ?

3. એક થેલામાં 5 લાલ દડા અને કેટલાંક વાદળી (ભૂરા) દડા છે. જો ભૂરો દડો નીકળવાની સંભાવના લાલ દડો નીકળે તેની સંભાવના કરતાં બમણી હોય, તો થેલામાં રહેલા ભૂરા દડાઓની સંખ્યા શોધો.

4. એક પેટીમાં 12 દડા છે. તેમાંના x દડા કાળા છે. જો પેટીમાંથી એક દડો યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તે કાળો દડો હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

જો બીજા 6 કાળા દડા ખોખામાં મૂકવામાં આવે તો કાળો દડો નીકળવાની સંભાવના હવે પહેલાં હતી તેનાં કરતાં બમણી થાય છે, તો x શોધો.

5. એક બરણીમાં 24 લખોટીઓ છે, કેટલીક લીલી અને બાકીની ભૂરી છે. બરણીમાંથી જો એક લખોટી યાદચ્છિક રીતે કાઢવામાં આવે, તો તે લીલી હોય તેની સંભાવના $\frac{2}{3}$ છે. બરણીમાંની ભૂરી લખોટીઓની સંખ્યા શોધો.

15.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે :

1. પ્રાયોગિક સંભાવના અને સૈદ્ધાંતિક સંભાવના વચ્ચેનો તફાવત
2. ઘટના E ની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના, સંકેત P(E) વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$P(E) = \frac{\text{E માટે સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામોની સંખ્યા}}$$

   આપણે ધારી લઈએ છીએ કે, પ્રયોગનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

3. ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના 1 છે.
4. અશક્ય ઘટનાની સંભાવના 0 છે.
5. ઘટના E ની સંભાવના એ સંખ્યા P(E) છે

   તથા, $0 \le P(E) \le 1$

6. માત્ર એક જ પરિણામ ધરાવતી ઘટનાને પ્રાથમિક (મૂળભૂત) ઘટના કહે છે. પ્રયોગની તમામ પ્રાથમિક ઘટનાઓની સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય છે.

7. કોઈ પણ ઘટના E માટે $P(E) + P(\overline{E}) = 1$. $\overline{E}$ એ ઘટના 'E નહિ' દર્શાવે છે. E અને $\overline{E}$ પૂરક ઘટનાઓ કહેવાય છે.

વાચકને નોંધ

ઘટનાની એક પ્રાયોગિક અથવા પ્રયોગમૂલક સંભાવના એ હકીકતમાં જે બન્યું છે તેના પર આધારિત છે અને ઘટનાની સૈદ્ધાંતિક સંભાવના, ચોક્કસ ધારણાઓના આધાર પર શું ઘટિત થશે તેની આગાહી કરવાના પ્રયત્નો કરે છે. જેમ પ્રયોગ કરવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા વધતી જાય છે તેમ આપણે અપેક્ષા રાખી શકીએ કે, પ્રાયોગિક અને સૈદ્ધાંતિક સંભાવનાઓ લગભગ સમાન થાય છે.

ગણિતમાં સાબિતીઓ A1

A1.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણા રોજિંદા જીવનમાં તર્ક કરવાની અને વિચારવાની ક્ષમતા ખૂબ જ ઉપયોગી છે. ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, જો કોઈ રાજકારણી તમને એમ કહે કે, 'જો તમને સ્વચ્છ સરકારમાં રસ હોય, તો તમારે મને મત આપવો જોઈએ' તો તે વાસ્તવમાં તમને એમ ગળે ઉતારવા ઇચ્છે છે કે, જો તમે તેને મત ન આપ્યો, તો તમને સ્વચ્છ સરકારમાં રસ નથી. એ જ રીતે, જો કોઈ જાહેરાત એવું દર્શાવતી હોય કે, 'બુદ્ધિશાળી લોકો *XYZ* બુટ પહેરે છે,' તો શું કંપની તમને એવું તારણ કાઢવા પ્રેરે છે કે, જો તમે *XYZ* બુટ નહિ પહેરો, તો તમે પૂરતા બુદ્ધિશાળી નથી. તમે એ જોઈ શકો છો કે, ઉપરનાં વિધાનો સામાન્ય લોકોને ગેરમાર્ગે દોરી શકે છે. તેથી, જો આપણે તર્કની પદ્ધતિ યોગ્ય રીતે સમજીએ, તો આપણે અજાણતાં પણ આવા છળમાં પડીએ નહિ.

તર્કનો સાચો ઉપયોગ ગણિતનું હાર્દ છે. વિશિષ્ટ રીતે સાબિતીની રચનામાં તેનો ઉપયોગ થાય છે. ખાસ કરીને ભૂમિતિમાં ધોરણ IXમાં તમે સાબિતીની સંકલ્પનાનો પરિચય મેળવ્યો છે અને તમે ખરેખર ઘણાં વિધાનો સાબિત કર્યાં છે. યાદ કરો કે, જેમાંનું પ્રત્યેક ગાણિતિક વિધાન સાબિતીમાંના અગાઉના વિધાન પરથી અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ કોઈ પ્રમેય પરથી અથવા પૂર્વધારણા કે પ્રતીપ પરથી તાર્કિક રીતે તારવેલું હોય છે એવાં કેટલાંક વિધાનોથી સાબિતી રચાય છે. સાબિતીની રચનામાં મુખ્ય સાધન, આનુમાનિક તર્કની પ્રક્રિયા છે.

આ પ્રકરણની શરૂઆત આપણે ગાણિતિક વિધાન શું છે, તેના પુનરાવર્તનથી કરીશું. આપણે આનુમાનિક તર્કમાં આપણાં કૌશલ્યો ધારદાર બનાવવા કેટલાંક ઉદાહરણોનો ઉપયોગ કરીને આગળ વધીશું. આપણે નિષેધનો ખ્યાલ પણ મેળવીશું અને આપેલા વિધાનનું નિષેધ મેળવીશું. પછી આપણે ચર્ચા કરીશું કે, આપેલ વિધાનનું પ્રતીપ કેવી રીતે શોધી શકાય. અંતે, આપણે ધોરણ IX માં શીખેલા કેટલાક પ્રમેયોની સાબિતીના પૃથક્કરણથી સાબિતીના ઘટકોનું પુનરાવર્તન કરીશું. તેનો તમે ધોરણ IX માં પરિચય મેળવ્યો છે તેમ જ તે આ પુસ્તકના ઘણાં પ્રકરણમાં છે.

A1.2 ગાણિતિક વિધાનોનો પુનઃપરિચય

યાદ કરો કે, વિધાન એ આજ્ઞા, ઉદ્‌ગાર કે પ્રશ્ન ન હોય તેવું અર્થપૂર્ણ વાક્ય છે, ઉદાહરણ તરીકે, ''ક્રિકેટના

વિશ્વકપની અંતિમ મૅચમાં કઈ બે ટીમ રમી રહી છે ?'' તે પ્રશ્ન છે, વાક્ય નથી. ''જાઓ અને તમારું ગૃહકાર્ય પૂરું કરો.'' તે આજ્ઞા છે, વિધાન નથી. ''કેવો અદ્ભૂત ગોલ !'' તે ઉદ્ગાર છે, વિધાન નથી.

યાદ રાખો, સામાન્ય રીતે વાક્ય નીચેનામાંથી કોઈ એક હોઈ શકે :

- *હંમેશાં સત્ય*
- *હંમેશાં અસત્ય*
- *અસ્પષ્ટ (સંદિગ્ધ)*

ધોરણ IX માં તમે ગણિતમાં એ પણ અભ્યાસ કર્યો છે, **જો વાક્ય કાં તો સત્ય હોય અથવા અસત્ય હોય તો જ તે વાક્ય સ્વીકાર્ય વિધાન બને.** તેથી સંદિગ્ધ વાક્યો ગાણિતિક વિધાનો તરીકે ગણતરીમાં લેવામાં આવતાં નથી.

હવે, ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણોથી આપણી સમજની સમીક્ષા કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વાક્યો હંમેશાં સત્ય, હંમેશાં અસત્ય કે સંદિગ્ધ છે તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો :

(i) સૂર્ય પૃથ્વીની આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે.

(ii) વાહનોને ચાર પૈડાં હોય છે.

(iii) પ્રકાશની અંદાજિત ઝડપ 3×10^5 કિમી/સે છે.

(iv) કોલકત્તાનો રસ્તો નવેમ્બરથી માર્ચ બંધ રહે છે.

(v) દરેક મનુષ્ય મૃત્યુને અધીન છે.

ઉકેલ :

(i) આ વાક્ય હંમેશાં અસત્ય છે. કારણ કે, ખગોળશાસ્ત્રીઓએ પ્રસ્થાપિત કર્યું છે કે, પૃથ્વી સૂર્યની આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે.

(ii) આ વાક્ય સંદિગ્ધ છે, કારણ કે, આપણે નક્કી ન કરી શકીએ કે, તે હંમેશાં સત્ય છે કે હંમેશાં અસત્ય. તે વાહન કયું છે તેના પર આધારિત છે. વાહનને *2, 3, 4, 6, 10* વગેરે પૈડાં હોઈ શકે.

(iii) આ વાક્ય હંમેશાં સત્ય છે, કારણ કે, ભૌતિકશાસ્ત્રીઓએ તે સિદ્ધ કર્યું છે.

(iv) આ વાક્ય સંદિગ્ધ છે, કારણ કે, કયા રસ્તાનો નિર્દેશ કરેલો છે, તે સ્પષ્ટ નથી.

(v) આ વાક્ય હંમેશાં સત્ય છે કારણ કે, દરેક મનુષ્યે ક્યારેક તો મરવાનું છે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો અને તમારા જવાબનાં કારણો જણાવો :

(i) બધા સમબાજુ ત્રિકોણો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

(ii) કેટલાક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણો સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(iii) બધા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણો સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(iv) કેટલીક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

(v) કેટલીક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.

(vi) બધા પૂર્ણાંકો સંમેય હોય છે તેવું નથી.

(vii) કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે કોઈ સંમેય સંખ્યા નથી.

ઉકેલ :

(i) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે સમબાજુ ત્રિકોણોમાં બધી બાજુઓ સમાન હોય છે, અને તેથી તે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ પણ છે.

(ii) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, જેના આધાર ખૂણાઓ $60°$ ના હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ હોઈ શકે છે.

(iii) આ વિધાન અસત્ય છે. તેનું કોઈ પ્રતિ ઉદાહરણ આપો.

(iv) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, જ્યાં p કોઈ પૂર્ણાંક અને $q = 1$ હોય તેવી $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંકો છે. (ઉદાહરણ તરીકે $3 = \frac{3}{1}$)

(v) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં છે, p અને q પૂર્ણાંક છે અને p એ q વડે નિ:શેષ વિભાજ્ય ન હોય, તો તે પૂર્ણાંક નથી. (ઉદાહરણ તરીકે $\frac{3}{2}$)

(vi) 'સંમેય સંખ્યા ન હોય તેવી પૂર્ણાંક સંખ્યા છે' એવું આ વિધાન કહે છે. આ અસત્ય છે, કારણ કે, બધા પૂર્ણાંકો સંમેય સંખ્યા છે.

(vii) આ વિધાન અસત્ય છે. તમે જાણો છે કે બે સંમેય સંખ્યાઓ r અને s વચ્ચે સંમેય સંખ્યા $\frac{r+s}{2}$ છે.

ઉદાહરણ 3 : જો $x < 4$ હોય, તો નીચેનાં વિધાનોમાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

ઉકેલ :

(i) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $x = 3$ લેતાં $x < 4$ છે અને $2x > 8$ નું સમાધાન ન થાય.

(ii) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $x = 3.5$ લેતાં $x < 4$ છે અને $2x < 6$ નું સમાધાન ન થાય.

(iii) આ વિધાન સત્ય છે. તે $x < 4$ અને $2x < 8$ સમાન વિધાનો છે.

ઉદાહરણ 4 : નીચેનાં વિધાનોને યોગ્ય શરત સાથે એવી રીતે પુન: લખો કે જેથી સત્ય વિધાન મળે.

(i) જો કોઈ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય, તો તે લંબચોરસ છે.

(ii) કોઈ ત્રિકોણની બે બાજુઓ પરનાં કોઈ પણ બે બિંદુઓને જોડતી રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.

(iii) બધા પૂર્ણાંક p માટે $\sqrt{p}$ એ અસંમેય છે.

(iv) બધાં દ્વિઘાત સમીકરણોને બે વાસ્તવિક ઉકેલ હોય છે.

ઉકેલ :

(i) જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય, તો તે લંબચોરસ છે.

(ii) કોઈ ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતી રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.

(iii) બધા અવિભાજ્યો p માટે $\sqrt{p}$ એ અસંમેય છે.

(iv) બધાં દ્વિઘાત સમીકરણોને વધુમાં વધુ બે વાસ્તવિક ઉકેલ હોય છે.

નોંધ : ઉપરનાં વિધાનોને ફરીથી દર્શાવવાની અન્ય રીત પણ હોઈ શકે. સરળતા ખાતર (iii) ને ફરીથી $\sqrt{p}$ એ બધા પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવા પૂર્ણાંકો માટે અસંમેય છે એમ પણ દર્શાવી શકાય.

સ્વાધ્યાય A 1.1

1. નીચેનાં વાક્યો હંમેશાં સત્ય, હંમેશાં અસત્ય કે સંદિગ્ધ પૈકી કયાં પ્રકારનાં છે તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણ આપો :

(i) ગણિતનાં બધાં પાઠ્યપુસ્તકો રસપ્રદ હોય છે.

(ii) પૃથ્વીથી સૂર્યનું અંતર આશરે 1.5×10^8 કિમી છે.

(iii) બધા મનુષ્યો વૃદ્ધ થશે.

(iv) ઉત્તરકાશીથી હર્શિલની મુસાફરી કંટાળાજનક છે.

(v) એક સ્ત્રીએ દૂરબીનમાંથી એક હાથી જોયો.

2. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો :

(i) બધા ષટ્કોણો બહુકોણો છે.

(ii) કેટલાક બહુકોણો પંચકોણો છે.

(iii) બધી જ યુગ્મ સંખ્યાઓ 2 વડે વિભાજ્ય હોય તે સત્ય નથી.

(iv) કેટલીક વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અસંમેય છે.

(v) બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંમેય હોય તે સત્ય નથી.

3. ધારો કે, a તથા b એવી વાસ્તવિક સંખ્યા છે જેની માટે $ab \neq 0$ છે. નીચેનામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ? તમારા જવાબનું કારણ આપો :

(i) a અને b બંને શૂન્ય હોવા જોઈએ.

(ii) a અને b બંને શૂન્યેતર હોવા જોઈએ.

(iii) a અને b પૈકી કોઈ એક શૂન્યેતર હોવો જોઈએ.

4. નીચેનાં વિધાનોને યોગ્ય શરતોની સાથે તે સત્ય બને તે રીતે પુનઃ લખો :

(i) જો $a^2 > b^2$, હોય, તો $a > b$

(ii) જો $x^2 = y^2$, હોય, તો $x = y$

(iii) જો $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ હોય, તો $x = 0$

(iv) ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે.

A1.3 આનુમાનિક તર્ક

ધોરણ IX માં તમે આનુમાનિક તર્કની સંકલ્પનાનો પરિચય મેળવ્યો છે. અહીં આપણે બીજાં વધુ ઉદાહરણો લઈને આપણે આપેલાં સત્ય ધારેલાં વિધાનો પરથી તારણ કાઢવામાં આનુમાનિક તર્ક કેવી રીતે ઉપયોગી છે તે દર્શાવીશું. આપેલાં વિધાનોને 'પ્રતિજ્ઞાઓ' અથવા 'પૂર્વધારણાઓ' કહે છે. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોથી શરૂ કરીશું.

ઉદાહરણ 5 : 'બિજાપુર કર્ણાટક રાજ્યમાં છે' એમ આપેલ છે અને ધારો કે, શબાના બિજાપુરમાં રહે છે. શબાના કયા રાજ્યમાં રહે છે ?

ઉકેલ : અહીં બે આધાર વાક્યો છે :

(i) બિજાપુર કર્ણાટક રાજ્યમાં છે. (ii) શબાના બિજાપુરમાં રહે છે.

આ આધાર વાક્યો પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, શબાના કર્ણાટક રાજ્યમાં રહે છે.

ઉદાહરણ 6 : 'ગણિતનાં બધાં પાઠ્યપુસ્તકો રસપ્રદ હોય છે' એવું આપેલ છે અને ધારો કે, તમે ગણિતનું પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો. તમે જે પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો તેના વિશે શું કહી શકાય ?

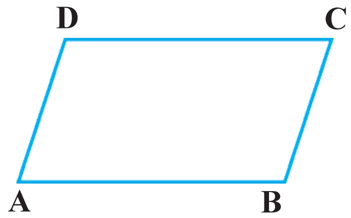
ઉકેલ : આપેલ પ્રતિજ્ઞાનું વિધાન (અથવા પૂર્વધારણાઓ)નો ઉપયોગ કરીને તારવી શકાય કે તમે રસપ્રદ પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો.

ઉદાહરણ 7 : આપેલું છે કે, $y = -6x + 5$ અને જો $x = 3$ તો y નું મૂલ્ય કેટલું ?

ઉકેલ : આપેલ બે પૂર્વધારણાઓ પરથી,

$y = -6\ (3) + 5 = -13$ મળે.

ઉદાહરણ 8 : ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એવું આપેલું છે. ધારો કે, AD = 5 સેમી અને AB = 7 સેમી (જુઓ આકૃતિ A1.1.) DC અને BC ની લંબાઈઓ વિશે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?



આકૃતિ A 1.1

ઉકેલ : અહીં આપેલ છે કે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. તેથી આપણે તારવી શકીએ કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બધા ગુણધર્મો ચતુષ્કોણ ABCD ને લાગુ પડે છે. વિશેષ કરીને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુ એકબીજીને સમાન છે તે ગુણધર્મ સત્ય છે. તેથી હવે AD = 5 સેમી છે તે પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, BC = 5 સેમી. એ જ રીતે તારવી શકાય કે DC = 7 સેમી.

નોંધ : આ ઉદાહરણમાં જોયું કે, આપણે અવારનવાર જરૂરી છે તે કેવી રીતે શોધી કાઢવું અને આપેલા પક્ષમાં સમાયેલા ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરવો.

ઉદાહરણ 9 : બધા અવિભાજ્યો p માટે $\sqrt{p}$ અસંમેય છે અને ધારો કે, 19423 અવિભાજ્ય છે. $\sqrt{19423}$ માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?

ઉકેલ : આપણે તારવી શકીએ કે, $\sqrt{19423}$ અસંમેય છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે નોંધ્યું હશે કે, આપણે જાણતા નથી કે, પ્રતિજ્ઞા સત્ય છે કે નહિ. આપણે માની લઈએ છીએ કે પક્ષ સત્ય છે અને પછી આનુમાનિક તર્ક લગાડીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, ઉદાહરણ 9 માં આપણે પરીક્ષણ નથી કર્યું કે 19423 એ અવિભાજ્ય છે કે નહીં. દલીલની સરળતા ખાતર આપણે એવું ધાર્યું છે કે, તે અવિભાજ્ય છે. આ વિભાગમાં આપણે એ વાત પર ભાર મૂકવા માંગીએ છીએ કે, એક ચોક્કસ વિધાન આપ્યું હોય તો તારણ પર આવવા માટે આનુમાનિક તર્કનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો. અહીં વાસ્તવિક બાબત એ છે કે, આપણે તર્કની સાચી પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી રહ્યા છીએ અને તર્કની આ પદ્ધતિ પૂર્વધારણાઓની સત્યાર્થતા કે અસત્યાર્થતા હોવા પર આધારિત નથી. એ નોંધવું જોઈએ કે, જો આપણે અસત્ય આધાર વિધાનોથી (કે પૂર્વધારણાઓથી) શરૂ કરીએ તો આપણે અસત્ય તારણ પર આવીએ.

સ્વાધ્યાય A 1.2

1. એવું આપેલ છે કે, 'સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે' અને ધારો કે A સ્ત્રી છે. આપણે A ના વિશે શું તારણ કાઢી શકીએ ?
2. 'બે સંમેય સંખ્યાઓનો ગુણાકાર સંમેય છે' તેમ આપેલ છે. a અને b સંમેય સંખ્યાઓ છે. ab માટે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?
3. 'અસંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત છે અને $\sqrt{17}$ અસંમેય છે' એમ આપેલ છે. $\sqrt{17}$ ના દશાંશ નિરૂપણ માટે આપણે શું તારણ કાઢી શકીએ ?
4. '$y = x^2 + 6$ અને $x = -1$' આપેલ હોય તો y ની કિંમત માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?

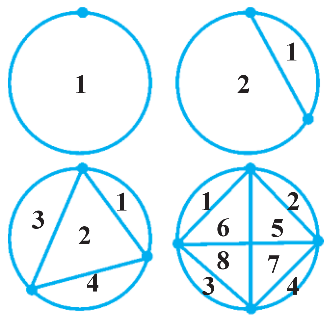
5. ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ આપેલ છે અને $\angle B = 80°$. સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણના બીજા ખૂણાઓ માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?

6. 'PQRS ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે' એવું આપેલ છે અને તેના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે. ચતુષ્કોણ PQRS વિશે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?

7. બધા અવિભાજ્યો p માટે $\sqrt{p}$ અસંમેય છે એમ આપેલું છે અને ધારો કે, 3721 અવિભાજ્ય છે. તમે તારવી શકો કે, $\sqrt{3721}$ અસંમેય સંખ્યા છે ? તમારું તારણ સાચું છે ? સત્ય હોય તો શા માટે અને અસત્ય હોય તો શા માટે ?

A1.4 ધારણાઓ, પ્રમેયો, સાબિતીઓ અને ગાણિતિક તર્ક

આકૃતિ A 1.2 ધ્યાનમાં લો. પ્રથમ વર્તુળમાં એક બિંદુ, બીજા વર્તુળમાં બે બિંદુઓ, ત્રીજા વર્તુળમાં ત્રણ બિંદુઓ અને એ પ્રમાણે આગળ આપેલું છે. દરેક વિકલ્પમાં બિંદુઓને જોડતી શક્ય બધી રેખાઓ દોરેલી છે.



આકૃતિ A 1.2

રેખાઓ વર્તુળને પરસ્પર અનાચ્છાદી પ્રદેશોમાં (સામાન્ય ભાગ ન હોય તેવા) વિભાજિત કરે છે. આ પ્રદેશોને આપણે ગણી શકીએ અને પરિણામોને નીચે દર્શાવેલા કોષ્ટકમાં નોંધીએ :

બિંદુઓની સંખ્યા	પ્રદેશોની સંખ્યા
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

તમારામાંથી કેટલાકે આપેલાં બિંદુઓથી બનતા પ્રદેશોની સંખ્યા વિશેના સૂત્રનું અનુમાન કર્યું હશે. ધોરણ IXના અભ્યાસ પરથી તમને યાદ હશે કે, આ બુદ્ધિગમ્ય અનુમાનને ગાણિતિક અટકળ કહે છે.

ધારો કે, તમારી ધારણા છે કે, વર્તુળ પર આપેલાં n બિંદુઓમાંથી પ્રત્યેક બે બિંદુઓને જોડતી બધી શક્ય રેખાઓ દોરીએ તો મળતા પરસ્પર અનાચ્છાદી પ્રદેશોની સંખ્યા 2^{n-1} છે. આ એક ખૂબ જ બુદ્ધિગમ્ય અનુમાન છે. અને કોઈ પરીક્ષણ કરી શકે કે, જો $n = 5$ હોય, તો આપણને 16 પ્રદેશો મળે. તેથી, 5 બિંદુઓ માટે આ સૂત્ર સત્ય

છે. તમે ગમે તે n બિંદુઓ માટે 2^{n-1} અનાચ્છાદિત પ્રદેશો મળે તે સત્ય છે એમ તમે કેવી રીતે જવાબ આપશો. જો કોઈ તમને પૂછે કે, આ $n = 25$ માટે તમે સંતુષ્ટ થશો ? તો આવા પ્રશ્નો સાથે કામ કરવા માટે તમારે જે શંકાથી પર રહીને આ પરિણામ સત્ય છે તેવું દર્શાવતી હોય એવી સાબિતીની જરૂર પડે અથવા કોઈ n માટે આ પરિણામ ખોટું છે તેવું દર્શાવતા ઉદાહરણની જરૂર પડે. ખરેખર, જો તમે આના માટે ગંભીર હો અને $n = 6$ માટે પ્રયત્ન કર્યો હોય, તો તમે જોશો કે, 31 પ્રદેશો મળે છે. અને $n = 7$ માટે 57 પ્રદેશો છે. તેથી, $n = 6$ એ ઉપરની ધારણા માટેનું પ્રતિઉદાહરણ છે. આ પ્રતિઉદાહરણની અગત્યતા દર્શાવે છે. તમને કદાચ યાદ હશે કે, ધોરણ IX માં આપણે ચર્ચા કરી છે કે **કોઈ વિધાનને અસત્ય છે તેમ સાબિત કરવા કોઈ એક પ્રતિઉદાહરણ આપવું પર્યાપ્ત છે.**

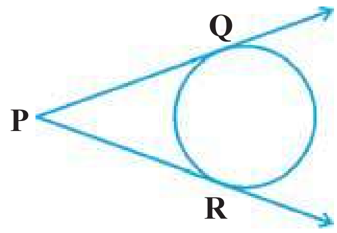
તમારા ધ્યાનમાં આવ્યું હશે કે, $n = 1, 2, 3, 4$ અને 5 માટે પરિણામ ચકાસવાને બદલે પ્રદેશોની સંખ્યા સંબંધી સાબિતી પર આપણે ભાર મૂકવો જોઈએ. હવે બીજાં વધારે ઉદાહરણો જોઈએ. તમે નીચેના પરિણામથી પરિચિત છો. (પ્રકરણ 5માં આપેલું છે.)

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

તેની યથાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માટે પરિણામને $n = 1, 2, 3\ldots$ વગેરે માટે ચકાસવું પૂરતું નથી, કારણ કે, કોઈ n માટે આ પરિણામ સત્ય ન પણ હોય. ઉપરના ઉદાહરણમાં $n = 6$ માટે પરિણામ અસત્ય ઠરે છે. જે શંકાથી પર રહીને સત્ય પ્રસ્થાપિત કરે છે એવી સાબિતીની આપણી જરૂરિયાત છે. પછીના વર્ગોમાં તમે સાબિતી શીખશો.

હવે, આકૃતિ A 1.3 ધ્યાનમાં લો. તેમાં P માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો PQ અને PR દોરેલા છે.

તમે સાબિત કર્યું છે કે, PQ = PR (પ્રમેય 10.2). તમે ફક્ત આવી કેટલીક આકૃતિઓ દોરી, સંબંધિત સ્પર્શકોની લંબાઈ માપીને અને દરેક કિસ્સામાં પરિણામ સત્ય છે તેવું તમારી જાતે ચકાસીને સંતુષ્ટ થતા નથી.



આકૃતિ A 1.3

તમને યાદ છે કે, સાબિતી શાની બનેલી છે ? તે સાબિતીમાં આવેલાં અગાઉનાં વિધાન પરથી અથવા સાબિત કરવાના પરિણામ પર આધારિત ન હોય તેવાં અગાઉ સાબિત કરેલાં (અને જાણીતાં) પરિણામો પરથી અથવા પૂર્વધારણાઓથી અથવા વ્યાખ્યા પરથી અથવા તમે કરેલી ધારણાઓ પરથી મળેલાં વિધાનોની શ્રૃંખલાથી (યથાર્થ દલીલો) તે બની હતી. તમે જે વિધાન સાબિત કરવા માંગો છો તે વિધાન PQ = PR પરથી તમારી સાબિતી પૂરી કરો. કોઈ સાબિતી રચવાનો આ રસ્તો છે.

સાબિતીની રચના કેમ થાય તેની વધુ સારી સમજ મેળવવામાં ઉપયોગી થાય તે માટે હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો અને પ્રમેયો અને સાબિતીનાં પૃથક્કરણ જોઈશું.

આપણે સાબિતીની કહેવાતી પ્રત્યક્ષ રીત કે આનુમાનિક રીતનો ઉપયોગ કરીને શરૂ કરીશું. આ રીતમાં, આપણે કેટલાંક વિધાનો રચીશું. દરેક વિધાન આગળનાં વિધાનો પર આધારિત છે. જો દરેક વિધાન તાર્કિક રીતે સત્ય હોય (એટલે કે માન્ય દલીલ હોય), તો તાર્કિક સત્ય તારણ મળે.

ઉદાહરણ 10 : બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો સંમેય સંખ્યા છે.

ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે, x અને y સંમેય સંખ્યા છે.	આપણે x અને y સંમેય છે ત્યાંથી શરૂ કરીશું, કારણ કે, પરિણામ સંમેય સંખ્યા વિશે છે.
2	ધારો કે, પૂર્ણાંકો m, n, p અને q માટે $x = \frac{m}{n}, n \neq 0$ અને $y = \frac{p}{q}, q \neq 0$	સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરતાં
3	તેથી, $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq}$	પરિણામ સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળાનો નિર્દેશ કરે છે. તેથી, આપણે $x + y$ મેળવીએ.
4	પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને, આપણે જોઈ શકીએ કે, $mq + np$ અને nq પૂર્ણાંકો છે.	પૂર્ણાંકોના જાણીતા ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કર્યો.
5	$n \neq 0$ અને $q \neq 0$ હોવાથી $nq \neq 0$ મળે.	પૂર્ણાંકોના જાણીતા ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કર્યો.
6	તેથી, $x + y = \frac{mq+np}{nq}$ સંમેય સંખ્યા છે.	સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કર્યો.

નોંધ : ધ્યાન આપો કે, ઉપરની સાબિતીનું દરેક વિધાન આગળ પ્રસ્થાપિત થયેલ તથ્ય કે વ્યાખ્યા પર આધારિત છે.

ઉદાહરણ 11 : 3 કરતાં મોટી દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા કોઈક પૂર્ણાંક k માટે $6k + 1$ કે $6k + 5$ સ્વરૂપમાં હોય છે.

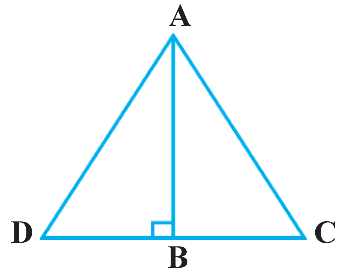
ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે, p એ 3 કરતાં મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.	3 કરતાં મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા વિષે પરિણામ છે. આથી, આપણે એવી સંખ્યાથી શરૂ કરીશું.
2	p ને 6 વડે ભાગતાં, p એ ધન પૂર્ણાંક k માટે $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, અનૃણ k માટે $6k + 5$ સ્વરૂપનો હોઈ શકે.	યુક્લિડની ભાગવિધિ પરથી
3	પરંતુ $6k = 2\ (3k)$, $6k + 2 = 2\ (3k + 1)$, અને $6k+3 = 3\ (2k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k+2)$ તેથી, તે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ નથી.	p અવિભાજ્ય છે એમ આપેલું હોવાથી p ના સ્વરૂપનું પૃથક્કરણ કરીએ.
4	તેથી કોઈ ધનપૂર્ણાંક k માટે, p એ $6k + 1$ કે અનૃણ પૂર્ણાંક k માટે $6k + 5$ સ્વરૂપમાં જ હોવો જોઈએ.	બીજા વિકલ્પો દૂર કરીને આપણે આ તારણ પર આવીએ.

નોંધ : (1) $3k$, $3k + 1$, $2k + 1$ અને $3k + 2$ એ 1 કરતાં મોટા છે. કારણ કે, $k \neq 0$

(2) ઉપરના ઉદાહરણમાં, આપણે અલગ-અલગ વિકલ્પો દૂર કરીને તારણ પર આવ્યા. આ રીતને કેટલીક વાર **વિકલ્પ નિવારણની રીત** તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

પ્રમેય A1.1 : (*પાયથાગોરસના પ્રમેયનું પ્રતીપ*) : જો કોઈ ત્રિકોણમાં એક બાજુનો વર્ગ બાકીની બે બાજુના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય, તો પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો છે.



આકૃતિ A 1.4

ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે ΔABC એ વિધાન $AC^2 = AB^2 + BC^2$ નું સમાધાન કરે છે.	આપણે આવા ત્રિકોણ વિશેનું એક વિધાન સાબિત કરીએ છીએ. આથી આ પરિણામ લઈને આપણે શરૂઆત કરીએ.
2	AB ને લંબરેખા BD રચો જેથી BD = BC અને A તથા D જોડો.	જેના વિશે વાત કરી છે તેવું આ એક સાહજિક સોપાન છે. આપણે વારંવાર સાબિત થયેલા પ્રમેયોની જરૂર પડશે.
3	રચના પરથી, ΔABD કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી $AD^2 = AB^2 + BD^2$	આપણે પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું. તેને સાબિત કર્યો છે.
4	રચના પરથી, BD = BC હોવાથી $AD^2 = AB^2 + BC^2$	તાર્કિક તારણ
5	તેથી, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	ધારણાનો ઉપયોગ અને આગળનું વિધાન
6	AC અને AD ધન હોવાથી AC = AD	સંખ્યાના જાણીતા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં
7	આપણે દર્શાવ્યું છે કે AC = AD. ઉપરાંત રચના કરી છે કે BC = BD અને AB સામાન્ય છે. તેથી બાબાબા પરથી, $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	જાણીતા પ્રમેયનો ઉપયોગ કર્યો.
8	$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ હોવાથી, $\angle ABC \cong \angle ABD$ મળે અને $\angle ABD$ કાટકોણ છે. $\therefore \angle ABC = 90°$	અગાઉ પ્રસ્થાપિત હકીકતને આધારે તાર્કિક તારણ

નોંધ : ઉપરના પૈકી દરેક પરિણામ બધાં એક સાથે જોડાયેલાં પરિણામો છે. તેમને સોપાનોની ક્રમિકતાથી સાબિત કર્યાં છે તેમનો ક્રમ અગત્યનો છે. સાબિતીમાંનું દરેક સોપાન આગળના સોપાનને અને અગાઉના જાણીતાં પરિણામોને અનુસરે છે. (જુઓ પ્રમેય 6.9.)

સ્વાધ્યાય A 1.3

નીચેનાં દરેક પ્રશ્નમાં એક વિધાન સાબિત કરવાનું છે. દરેક સાબિતીમાં બધાં સોપાનોની યાદી બનાવો અને દરેક સોપાન માટે કારણ આપો :

1. બે ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો 4 વડે વિભાજ્ય છે.
2. બે ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાઓ લો. તેમના વર્ગોનો સરવાળો લો. અને મળતા પરિણામમાં 6 ઉમેરો. સાબિત કરો કે આ રીતે પ્રાપ્ત નવી સંખ્યા હંમેશાં 8 વડે વિભાજ્ય છે.
3. જો $p \geq 5$ અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય, તો સાબિત કરો કે, $p^2 + 2$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

   (***સૂચન :*** ઉદાહરણ 11નો ઉપયોગ કરો.)
4. જો x અને y સંમેય સંખ્યાઓ હોય, તો સાબિત કરો કે, xy સંમેય સંખ્યા છે.
5. જો a અને b ધન પૂર્ણાંક હોય, તો તમે જાણો છો કે, $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, જ્યાં q એ પૂર્ણ સંખ્યા છે. સાબિત કરો કે ગુ.સા.અ. (a, b) = ગુ.સા.અ. (b, r)

   [**સૂચન :** ધારો કે, ગુ.સા.અ. $(b, r) = h$. તેથી, $b = k_1h$ અને $r = k_2h$ જ્યાં k_1 અને k_2 પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.]
6. ત્રિકોણ ABCની બાજુ BC ને સમાંતર રેખા AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

A1.5 વિધાનનું નિષેધ

આ વિભાગમાં, આપણે વિધાનના નિષેધનો અર્થ શું છે તેની ચર્ચા કરીશું. આપણે શરૂ કરીએ તે પહેલાં આપણે સંકલ્પના સમજવી સરળ બને તે માટે કેટલાક સંકેત દાખલ કરીએ. શરૂઆતમાં આપણે વિધાનને એક એકમ તરીકે લઈએ અને તેને એક સંકેત આપીએ. ઉદાહરણ તરીકે, વિધાન : 'દિલ્લીમાં પહેલી સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.' ને આપણે p વડે દર્શાવીએ. આને આમ પણ લખી શકાય.

p : દિલ્લીમાં પહેલી સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.

એ જ રીતે, ચાલો આપણે લખીએ.

q : બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે.

r : માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી છે.

s : $2 + 2 = 4$

t : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

આ સંકેત આપણને વિધાનોના ગુણધર્મોની ચર્ચા કરવા તેમજ કેવી રીતે તેમને જોડી શકાય તે માટે મદદ કરે છે. શરૂઆતમાં આપણે જેને 'સાદું' વિધાન કહીએ છીએ તેના વિશે જોઈશું અને પછી 'સંયુક્ત' વિધાન વિશે જોઈશું.

હવે નીચેનું કોષ્ટક ધ્યાનમાં લો. તેમાં આપેલા દરેક વિધાન પરથી નવું વિધાન બનાવ્યું છે.

મૂળ વિધાન	નવું વિધાન
p : દિલ્લીમાં 1 સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.	$\sim p$: તે અસત્ય છે કે, 1 સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ દિલ્લીમાં વરસાદ હતો.
q : બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે.	$\sim q$: તે અસત્ય છે કે, બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે.
r : માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી છે.	$\sim r$: તે અસત્ય છે કે, માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી છે.
$s : 2 + 2 = 4$	$\sim s$: તે અસત્ય છે કે, $2 + 2 = 4$
t : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.	$\sim t$: તે અસત્ય છે કે, ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.

કોષ્ટકમાંનું નવું વિધાન જૂના વિધાનને અનુરૂપ નિષેધ છે. એટલે કે, $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ અને $\sim t$ અનુક્રમે વિધાનો p, q, r, s અને t નાં નિષેધ છે. અહીં, $\sim p$ એ 'p નથી' એમ વંચાય. વિધાન $\sim p$ એ હકાર વિધાન p નું નકાર બનાવે છે. ધ્યાન આપો કે, આપણી સામાન્ય વાતચીતમાં આપણે $\sim p$ નો સરળ અર્થ 'દિલ્લીમાં *1* સપ્ટેમ્બર *2005*ના રોજ વરસાદ ન હતો એમ લઈએ છીએ.' તેમ છતાં જ્યારે આપણે આમ કરીએ ત્યારે તેની કાળજી લેવી જરૂરી છે. તમે કદાચ એવું ધારતા હો કે, વિધાનનું નિષેધ સરળ રીતે મેળવવા આપેલા વિધાનમાં યોગ્ય જગ્યાએ 'નહી' દાખલ કરીને મેળવી શકાય.

જ્યારે વિધાન ''બધા''થી શરૂ થતું હોય, ત્યારે p ના આ કિસ્સામાં મુશ્કેલી આવશે. ઉદાહરણ તરીકે વિધાન q નો વિચાર કરો. q : બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે. આ વિધાનનું નિષેધ આપણે $\sim q$ તરીકે લઈએ. તે અસત્ય છે કે, બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે તે ''કેટલાક શિક્ષકો પુરુષ છે''ના જેવું વિધાન છે.

ચાલો આપણે જોઈએ કે, જો માત્ર ''નહિ'' એ q માં ઉમેરીએ તો શું થાય. આપણને એવું વિધાન મળે : ''બધા શિક્ષકો સ્ત્રી નથી'' અથવા આપણે એ વિધાન મેળવી શકીએ : ''બધા જ શિક્ષકો સ્ત્રી નથી.'' પહેલું વિધાન લોકોને ગૂંચવણમાં મૂકી શકે. તેનો સૂચિતાર્થ (જો આપણે શબ્દ 'બધા' પર ભાર મૂકીએ) એ છે કે, બધા શિક્ષકો પુરુષ છે. આ ચોક્કસ રીતે q નું નિષેધ નથી. તેમ છતાં, બીજું વિધાન $\sim q$ નો અર્થ આપે છે. એટલે કે, ઓછામાં ઓછો એક શિક્ષક હોય જે સ્ત્રી ન હોય. તેથી, જ્યારે વિધાનનું નિષેધ લખો ત્યારે કાળજી લો !

તેથી, આપણે સાચા નિષેધનો નિર્ણય કેવી રીતે કરીશું? આપણે નીચેના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીએ.

ધારો કે, p એક વિધાન છે અને $\sim p$ તેનું નિષેધ છે. જ્યારે p સત્ય હોય ત્યારે $\sim p$ અસત્ય હોય અને જ્યારે p અસત્ય હોય ત્યારે $\sim p$ સત્ય હોય.

ઉદાહરણ તરીકે, જો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી છે, તે સત્ય હોય, તો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી નથી તે અસત્ય છે. ''જો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી છે'' એ અસત્ય હોય તો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી નથી તે સત્ય હોય.

આ જ રીતે વિધાનો s અને t ના નિષેધ માટે, $s = 2 + 2 = 4$ નું નિષેધ, $\sim s = 2 + 2 \neq 4$

t : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.

નિષેધ, $\sim t$: ત્રિકોણ ABC સમબાજુ નથી.

તો હવે, $\sim(\sim s)$ શું થશે ? તે $2 + 2 = 4$ થશે. તે s છે અને $\sim(\sim t)$ શું છે ?

"ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે" તેમ થશે. એટલે કે t છે.

હકીકતમાં કોઈ પણ વિધાન p માટે $\sim(\sim p)$ એ p છે.

ઉદાહરણ 12 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ જણાવો :

(i) માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી નથી.

(ii) બધી અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

(iii) $\sqrt{2}$ અસંમેય સંખ્યા છે.

(iv) કેટલીક સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

(v) બધા શિક્ષકો પુરુષ નથી.

(vi) કેટલાક ઘોડાઓ બદામી રંગના નથી.

(vii) કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા x એવી નથી કે, જેથી $x^2 = -1$ થાય.

ઉકેલ :

(i) માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી નથી તે અસત્ય છે. એટલે કે, માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી છે.

(ii) બધી અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તે અસત્ય છે, એટલે કે, કેટલીક (ઓછામાં ઓછી એક) અસંમેય સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા નથી. કોઈ આને એવું પણ લખી શકે "બધી જ અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તેવું સત્ય નથી."

(iii) $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તે અસત્ય છે, એટલે કે, $\sqrt{2}$ અસંમેય નથી.

(iv) કેટલીક સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે તે અસત્ય છે, એટલે કે કોઈક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.

(v) બધા શિક્ષકો પુરુષો નથી તે અસત્ય છે, એટલે કે, કેટલાક શિક્ષકો સ્ત્રીઓ છે.

(vi) કેટલાક ઘોડાઓ બદામી રંગના નથી તે અસત્ય છે, એટલે કે, બધા ઘોડાઓ બદામી રંગના છે.

(vii) કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા એવી નથી કે જેથી, $x^2 = -1$ થાય તે અસત્ય છે, એટલે કે, ઓછામાં ઓછી એક વાસ્તવિક સંખ્યા x એવી છે જેથી, $x^2 = -1$ થાય.

નોંધ : ઉપરની ચર્ચા પરથી, કોઈ વિધાનનું નિષેધ મેળવવા માટે આપણે નીચેના કાર્યનિયમો સુધી પહોંચ્યા છીએ.

(i) પહેલાં નહિ લખીને વિધાન લખો.

(ii) જો તેમાં કોઈ ગૂંચવણ હોય, તો વિશિષ્ટ રીતે, વિધાનોમાં 'બધા' કે 'કેટલાક' સમાયેલા હોય ત્યારે યોગ્ય સુધારા કરો.

સ્વાધ્યાય A 1.4

1. નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ જણાવો :

(i) મનુષ્ય મૃત્યુને અધીન છે.

(ii) રેખા l એ રેખા m ને સમાંતર છે.

(iii) આ પ્રકરણમાં ઘણા સ્વાધ્યાય છે.

(iv) બધી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંમેય સંખ્યાઓ છે.

(v) કેટલીક અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ છે.

(vi) કોઈ વિદ્યાર્થી આળસુ નથી.

(vii) કેટલીક બિલાડીઓ કાળી નથી.

(viii) $\sqrt{x} = -1$ થાય તેવી કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા x નથી.

(ix) પૂર્ણાંક સંખ્યા a, 2 વડે વિભાજ્ય છે.

(x) a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો છે.

2. નીચેના દરેક પ્રશ્નોમાં, બે વિધાનો છે. બીજું વિધાન એ પહેલા વિધાનનું નિષેધ છે કે નહીં તે જણાવો.

(i) મુમતાઝ ભૂખી છે.
મુમતાઝ ભૂખી નથી.

(ii) કેટલીક બિલાડીઓ કાળી છે.
કેટલીક બિલાડીઓ કથ્થાઈ છે.

(iii) બધા હાથી મોટા છે.
એક હાથી મોટો નથી.

(iv) બધાં અગ્નિશામક યંત્રો લાલ હોય છે.
બધાં અગ્નિશામક યંત્રો લાલ નથી.

(v) કોઈ મનુષ્ય ગાય નથી.
કેટલાક મનુષ્યો ગાય છે.

A1.6 વિધાનનું પ્રતીપ

હવે, આપણે વિધાનના પ્રતીપની સંકલ્પનાનું પરીક્ષણ કરીએ. આના માટે, આપણને સંયુક્ત વિધાનની સંકલ્પનાની જરૂર પડશે તે એક અથવા વધારે સાદાં વિધાનોનું સંયોજન છે. સંયુક્ત વિધાનો બનાવવા માટેની ઘણી રીતો છે. પરંતુ, આપણે બે સાદાં વિધાનોને 'જો અને તો' નો ઉપયોગ કરી જોડવા ઉપર ધ્યાન આપીશું. ઉદાહરણ તરીકે, કોઈ વિધાન 'જો વરસાદ પડે, તો સાયકલ પર જવું મુશ્કેલ પડે' એ બે વિધાનોનું બનેલું છે.

p : વરસાદ પડે છે.

q : સાઈકલ પર જવું મુશ્કેલ પડે.

આગળ દર્શાવેલ સંકેતનો ઉપયોગ કરીને આપણે કહી શકીએ : ***જો p તો q.***

આપણે એવું પણ કહી શકીએ કે, ***p પરથી q સૂચિત થાય છે અને તેને $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય છે.***

હવે, ધારો કે, કોઈ એવું વિધાન છે, 'જો પાણીની ટાંકી કાળી હોય, તો તેમાં પીવાલાયક પાણી છે.' આ વિધાન $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપમાં છે.

અહીં p પક્ષ છે. (પાણીની ટાંકી કાળી છે) અને q તારણ છે. (ટાંકીમાં પીવાલાયક પાણી છે) ધારો કે, આપણે પક્ષ અને તારણને બદલીએ, તો શું મળે ? અહીં $q \Rightarrow p$ મળે. એટલે કે, જો ટાંકીમાંનું પાણી પીવાલાયક હોય, તો તે ટાંકી કાળી હોય. આ વિધાનને વિધાન $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ વિધાન કહે છે.

સામાન્ય રીતે, જો p અને q વિધાનો હોય, તો વિધાન $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ વિધાન $q \Rightarrow p$ છે, યાદ રાખો કે, $p \Rightarrow q$ અને $q \Rightarrow p$ બંને એકબીજાનાં પ્રતીપ વિધાનો છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો :

(i) જો જમિલા સાયકલ ચલાવતી હોય, તો 17 ઑગસ્ટે રવિવાર હોય.

(ii) જો 17 ઓગસ્ટે રવિવાર હોય, તો જમિલા સાઇકલ ચલાવતી હોય.

(iii) જો પૌલિન ગુસ્સે થાય, તો તેનો ચહેરો લાલ થાય.

(iv) જો કોઈ વ્યક્તિ પાસે શિક્ષણની ડિગ્રી હોય, તો તે ભણાવી શકે.

(v) જો કોઈ વ્યક્તિને વાયરસનો ચેપ લાગે, તો તેનું તાપમાન ઊંચું રહે.

(vi) જો અહમદ મુંબઈમાં હોય, તો તે ભારતમાં છે.

(vii) જો ત્રિકોણ ABC સમબાજુ ત્રિકોણ હોય, તો તેના અંતઃકોણો સમાન છે.

(viii) જો x એ અસંમેય સંખ્યા હોય, તો x નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત્ત છે.

(ix) જો $x - a$ બહુપદી $p(x)$ નો અવયવ હોય, તો $p(a) = 0$

ઉકેલ :

ઉપરનું દરેક વિધાન $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપમાં છે. તેથી તેનું પ્રતીપ શોધવા માટે પહેલા p અને q ઓળખીશું અને પછી $q \Rightarrow p$ લખીશું.

(i) p : જમિલા સાઇકલ ચલાવે છે અને

q : 17 ઑગસ્ટ રવિવારે આવશે.

તેથી તેનું પ્રતીપ થશે : જો 17 ઑગસ્ટ રવિવાર આવે, તો જમિલા સાઇકલ ચલાવે.

(ii) આ વિધાન (i) નું પ્રતીપ વિધાન છે. તેથી, તેનું પ્રતીપ એ ઉપર આપેલું વિધાન (i) છે.

(iii) જો પૌલિનનો ચહેરો લાલ થાય, તો તે ગુસ્સે હોય.

(iv) જો કોઈ વ્યક્તિ ભણાવી શકે, તો તેની પાસે શિક્ષણની ડિગ્રી હોય.

(v) જો કોઈ વ્યક્તિનું તાપમાન ઊંચુ રહે, તો તેને વાઇરસનો ચેપ લાગ્યો હોય.

(vi) જો અહમદ ભારતમાં હોય, તો તે મુંબઈમાં હોય.

(vii) જો ત્રિકોણ ABC ના બધા અંતઃકોણો સમાન હોય, તો તે સમબાજુ છે.

(viii) જો x નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત્ત હોય, તો x એ અસંમેય સંખ્યા છે.

(ix) જો $p(a) = 0$ હોય, તો $x - a$ એ બહુપદી $p(x)$નો અવયવ છે.

જુઓ કે, આપણે ઉપર આપેલા દરેક વિધાનના પ્રતીપ તે સત્ય છે કે, અસત્ય તેની ચિંતા કર્યા સિવાય એમ જ લખ્યાં છે. ઉદાહરણ તરીકે નીચેનું વિધાન વિચારો. જો અહમદ મુંબઈમાં હોય, તો તે ભારતમાં છે. આ વિધાન સત્ય છે. હવે, તેનું પ્રતીપ વિધાન ધ્યાનમાં લો : જો અહમદ ભારતમાં હોય, તો તે મુંબઈમાં છે. આ હંમેશાં સત્ય ન પણ હોઈ શકે. તે ભારતનાં ગમે તે ભાગમાં હોઈ શકે.

ગણિતમાં, ચોક્કસ રીતે ભૂમિતિમાં, તમે એવી ઘણી સ્થિતિમાં આવ્યા હશો કે, જ્યાં $p \Rightarrow q$ સત્ય હોય અને તેનું પ્રતીપ વિધાન, અર્થાત્, $q \Rightarrow p$ પણ સત્ય છે કે નહીં તે નક્કી કરવું પડે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ વિધાનો જણાવો. દરેક કિસ્સામાં તે સત્ય છે કે અસત્ય એ પણ નક્કી કરો.

(i) જો n યુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો $2n + 1$ અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

(ii) જો વાસ્તવિક સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય, તો તે સંખ્યા સંમેય છે.

(iii) જો બે સમાંતર રેખાઓને એક છેદિકા છેદતી હોય, તો અનુકોણોની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય છે.

(iv) જો કોઈ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(v) જો બે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય, તો તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય છે.

ઉકેલ :

(i) પ્રતીપ વિધાન 'જો $2n + 1$ અયુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો n યુગ્મ પૂર્ણાંક છે' થાય. આ વિધાન અસત્ય છે. (ઉદાહરણ તરીકે, $15 = 2\,(7) + 1$ અને 7 તે અયુગ્મ છે.)

(ii) પ્રતીપ વિધાન 'જો કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા સંમેય હોય, તો તેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય' થાય. આ અસત્ય વિધાન છે, કારણ કે, સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત આવૃત પણ હોઈ શકે છે.

(iii) પ્રતીપ વિધાન થશે 'જો કોઈ છેદિકા બે રેખાને એવી રીતે છેદે કે તેથી બનતા અનુકોણ સમાન થાય, તો તે બે રેખાઓ સમાંતર છે.' આપણે ધોરણ IX પાઠ્યપુસ્તકની પૂર્વધારણા 6.4માં એવું ધાર્યું છે. તેથી આ વિધાન સત્ય છે.

(iv) જો કોઈ ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો તેની સામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુ સમાન છે. આ સત્ય છે. (પ્રમેય 8.1, ધોરણ IX)

(v) 'જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો એકરૂપ છે' એ પ્રતીપ છે. આ વિધાન અસત્ય છે. આનું કોઈ યોગ્ય પ્રતિઉદાહરણ શોધવાનું તમારા પર છોડી દઈશું.

સ્વાધ્યાય A 1.5

1. નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો :

(i) જો ટોક્યોમાં ગરમી હોય, તો શરણને ખૂબ પરસેવો વળે.

(ii) જો શાલિની ભૂખી હોય, તો તેના પેટમાં બિલાડાં બોલતાં હોય.

(iii) જો જસવંતને શિષ્યવૃત્તિ મળે, તો તે ડિગ્રી મેળવી શકે.

(iv) જો વનસ્પતિને ફૂલો હોય, તો તે જીવંત છે.

(v) જો કોઈ પ્રાણી બિલાડી હોય, તો તેને પૂંછડી હોય.

2. નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો. ઉપરાંત દરેક કિસ્સામાં, તેનું પ્રતીપ સત્ય છે કે અસત્ય છે તે નક્કી કરો.

(i) જો ત્રિકોણ ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ હોય, તો તેના આધાર પરના ખૂણા સમાન હોય.

(ii) જો કોઈ પૂર્ણાંક અયુગ્મ હોય, તો તેનો વર્ગ અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

(iii) જો $x^2 = 1$ હોય, તો $x = 1$

(iv) જો ABCD સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો AC અને BD એકબીજાને દુભાગે છે.

(v) જો a, b અને c પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય, તો $a + (b + c) = (a + b) + c$

(vi) જો x અને y બે અયુગ્મ સંખ્યાઓ હોય, તો $x + y$ યુગ્મ સંખ્યા છે.

(vii) જો કોઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ વર્તુળ પર હોય, તો તે લંબચોરસ છે.

A1.7 વિરોધાભાસથી સાબિતી

અત્યાર સુધીનાં આપણાં બધાં ઉદાહરણોમાં આપણે પરિણામોની સત્યાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માટે પ્રત્યક્ષ દલીલોનો ઉપયોગ કર્યો હતો. હવે આપણે પરોક્ષ દલીલો કરીશું, વિશિષ્ટ રીતે ગણિતમાં 'વિરોધાભાસથી સાબિતી' તરીકે ઓળખાતું ખૂબ જ શક્તિશાળી એવું સાધન છે. આપણે આ રીતનો પ્રકરણ 1માં કેટલીક સંખ્યાઓને સંમેય પ્રસ્થાપિત કરવા અને બીજા પ્રકરણોમાં કેટલાક પ્રમેયોમાં પણ ઉપયોગ કર્યો છે. અહીં, આપણે બીજાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણો આ સંકલ્પના દર્શાવવા લઈશું.

શરૂઆત કરતાં પહેલાં, આપણે વિરોધાભાસ શું છે તે સમજીએ. ગણિતમાં, જ્યારે વિધાન p એવું મળે કે p સત્ય હોય અને તેનું નિષેધ $\sim p$ પણ સત્ય હોય, ત્યારે વિરોધાભાસ ઉદ્ભવે.

ઉદાહરણ તરીકે,

$p : x = \frac{a}{b}$, a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.

q : a અને b બંને 2 વડે નિઃશેષ વિભાજ્ય છે.

જો આપણે એવું ધારીએ કે, p સત્ય છે અને q સત્ય છે તેવું સાબિત કરી શકીએ, તો આપણે વિરોધાભાસ પર આવીએ છીએ. કારણ કે, q સૂચિત કરે છે કે, p નું નિષેધ સત્ય છે. તમને યાદ હશે કે, જ્યારે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ, ત્યારે આ જ બન્યું હતું. (જુઓ પ્રકરણ 1)

વિરોધાભાસથી સાબિતી કેવી રીતે મળે છે ?

આપણે આ એક ચોક્કસ ઉદાહરણથી સમજીએ.

ધારો કે, આપણને નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે.

A સ્ત્રી છે. સાબિત કરો કે, A મૃત્યુને અધીન છે.

આ એક અત્યંત સરળ ઉદાહરણ છે. ચાલો આપણે જોઈએ કે, તેને વિરોધાભાસથી કેમ સાબિત કરી શકાય.

- ચાલો, આપણે ધારીએ કે, વિધાન p ની સત્યાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માગીએ છીએ. (અહીં, આપણે સાબિત કરવા માંગીએ છીએ કે, A મૃત્યુને અધીન છે તે સત્ય છે.)

- તેથી, આપણે વિધાન સત્ય નથી એવું ધારીને શરૂઆત કરીશું. એટલે કે, આપણે ધારીશું કે p નું નિષેધ સત્ય છે. (એટલે કે, A મૃત્યુને અધીન નથી.)
- પછી આપણે p ના નિષેધની સત્યાર્થતા પર આધારિત તાર્કિક તારણોની હારમાળા આગળ લઈ જવાની પ્રક્રિયા કરીશું. (કારણ કે, A મૃત્યુને અધીન નથી એ આપેલા વિધાન 'બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે.' નું પ્રતિ ઉદાહરણ છે. તેથી, તે અસત્ય છે કે, બધી સ્ત્રીઓ, મૃત્યુને અધીન છે.)
- જો આ વિરોધાભાસ તરફ દોરતું હોય, તો આપણી અસત્ય ધારણા કે, p સત્ય નથી ના કારણે વિરોધાભાસ ઉદ્ભવે છે. (આપણને વિરોધાભાસ મળે છે, કારણ કે, આપણે બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે' અને તેનું નિષેધ એ જ સાથે 'બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન નથી' એ સત્ય હોવાથી વિરોધાભાસ મળે છે; કારણ કે આપણે ધાર્યું છે કે, A મૃત્યુને અધીન નથી.)
- તેથી આપણી ધારણા અસત્ય છે. એટલે કે, p સત્ય થવું જોઈએ. (તેથી, A મૃત્યુને અધીન છે.)

ચાલો આપણે ગણિતનાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 15 : શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા અને કોઈ પણ અસંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર અસંમેય છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ :

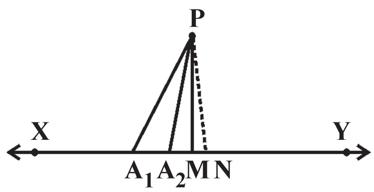
વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
આપણે વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીશું. ધારો કે, r શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા છે અને x અસંમેય સંખ્યા છે. ધારો કે, $r = \frac{m}{n}$ જ્યાં m અને n પૂર્ણાંકો છે અને $m \neq 0$, $n \neq 0$. આપણે એ સાબિત કરવું છે કે rx અસંમેય છે.	
ધારો કે, rx સંમેય છે.	અહીં, આપણે સાબિત કરવા જરૂરી વિધાનનું નિષેધ ધાર્યું છે.
તેથી, પૂર્ણાંક p, શૂન્યેતર પૂર્ણાંક q માટે $rx = \frac{p}{q}$	આગળના વિધાન અને સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યા અનુસાર
$rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ ની પુનઃરચના કરીએ અને $r = \frac{m}{n}$ નો ઉપયોગ કરીએ, $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$ મળે. np અને mq પૂર્ણાંકો છે અને $mq \neq 0$. તેથી x સંમેય સંખ્યા છે.	પૂર્ણાંકોના ગુણધર્મો અને સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યા પરથી.
આ એક વિરોધાભાસ છે, કારણ કે, આપણે સિદ્ધ કર્યું કે x સંમેય છે. પરંતુ પક્ષ પ્રમાણે x અસંમેય છે.	આપણે આ જ વિરોધાભાસ તો શોધતા હતા.
rx સંમેય છે એવી અસત્ય ધારણાના કારણે આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો. આથી rx અસંમેય છે.	તાર્કિક તારણ

હવે, આપણે ઉદાહરણ 11 સાબિત કરીશું. પરંતુ આ વખતે વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીશું. સાબિતી આગળ આપેલી છે.

વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
આપણે એવું ધારીએ કે, વિધાન સત્ય નથી.	આગળ જોયું તેમ, વિરોધાભાસથી સાબિતીનો આ શરૂઆતનો મુદ્દો છે.
તેથી, આપણે ધારીએ કે, પૂર્ણાંક સંખ્યા n માટે $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં ન હોય એવી અવિભાજ્ય સંખ્યા $p > 3$ મળે.	પરિણામમાંના વિધાનનું આ નિષેધ છે.
6 વડે ભાગાકાર માટે યુક્લિડ ભાગ પ્રવિધિ અને p એ $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં નથી એ હકીકતનો ઉપયોગ કરીને $p = 6n$ કે $6n + 2$ કે $6n + 3$ કે $6n + 4$ મળે. ($p > 3$ અવિભાજ્ય હોવાથી $n > 1$)	અગાઉ સાબિત કરેલા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં
તેથી, p એ કાં તો 2 અથવા 3 વડે વિભાજ્ય બને.	તાર્કિક તારણ
તેથી, p અવિભાજ્ય નથી. (નોંધ : $p > 3$ હોવાથી $p = 2$ અથવા 3 નથી.)	તાર્કિક તારણ
આપણી પૂર્વધારણા p અવિભાજ્ય છે. તેનો આ વિરોધાભાસ છે.	આપણને આની જ જરૂર છે.
અહીં, વિરોધાભાસ મળે છે, કારણ કે, આપણે ધાર્યું છે કે એવો અવિભાજ્ય $p > 3$ અસ્તિત્વ ધરાવે જે $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં ન હોય.	
તેથી, 3 કરતાં મોટી પ્રત્યેક અવિભાજ્ય સંખ્યા $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં હોય.	આપણે તારણ મેળવ્યું.

નોંધ : ઉપર તમે સાબિતીનું ઉદાહરણ દર્શાવ્યું, હજુય ફરીથી પરિણામ સાબિત કરવા માટે બીજી કેટલીક રીતો છે.

પ્રમેય A 1.2 : એક બિંદુમાંથી તે બિંદુમાંથી પસાર ન થતી હોય તેવી રેખા પરનાં બિંદુઓ અને આપેલ બિંદુને જોડતા તમામ રેખાખંડોમાં તે બિંદુમાંથી રેખા પરનો લંબરેખાખંડ સૌથી નાનો હોય છે.



આકૃતિ A 1.5

વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
ધારો કે XY આપેલી રેખા છે. P એ રેખા XY પર ન હોય તેવું બિંદુ છે અને PM, PA_1, PA_2, ... વગેરે P માંથી રેખા XY પરનાં બિંદુઓ સુધી દોરેલા રેખાખંડો છે. તેમાં PM સૌથી નાનો છે. (જુઓ આકૃતિ A 1.5.)	આપણે એવું સાબિત કરવું છે કે, PM, PA_1, PA_2, ... વગેરે માંથી XY ને લંબ સૌથી નાનો છે. આપણે આ રેખાખંડો લઈને શરૂ કરીશું.
ધારો કે PM એ XY ને લંબ નથી.	વિરોધાભાસથી સાબિત કરવા માટે વિધાનનું આ નિષેધ છે.
XY પર લંબ PN દોરો. તે આકૃતિ A 1.5માં તૂટક રેખાથી દર્શાવેલ છે.	આપણે આપણું પરિણામ સાબિત કરવા રચનાની અવારનવાર જરૂર પડશે.

PN એ આપેલા બધા રેખાખંડો PM, PA_1, PA_2, ... વગેરેમાં સૌથી નાનો છે. એટલે કે, PN < PM	કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુ કર્ણથી નાની હોય છે અને સંખ્યાઓનો જાણીતો ગુણધર્મ
આપણી પૂર્વધારણા કે PM એ બધા રેખાખંડોમાં સૌથી નાનો છે તેનો વિરોધાભાસ મળે છે.	ચોક્કસપણે આપણે આની જ તો જરૂર છે.
તેથી, રેખાખંડ PM એ XY ને લંબ છે.	આપણે તારણ મેળવ્યું.

સ્વાધ્યાય A 1.6

1. ધારો કે, $a + b = c + d$, અને $a < c$, વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે, $b > d$
2. જો r સંમેય સંખ્યા હોય અને x અસંમેય સંખ્યા હોય, તો વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે, $r + x$ અસંમેય સંખ્યા છે.
3. વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, જો કોઈ પૂર્ણાંક a માટે, a^2 યુગ્મ હોય, તો a પણ યુગ્મ છે.

   [**સૂચન :** a યુગ્મ નથી એમ ધારો. તેથી, તે કોઈ પૂર્ણાંક n માટે a^2 એ $2n + 1$ સ્વરૂપમાં છે અને આગળ વધો]
4. વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, જો કોઈ પૂર્ણાંક a માટે, a^2, 3 વડે વિભાજ્ય હોય, તો a એ, 3 વડે વિભાજ્ય હોય.
5. વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને બતાવો કે, n ની કોઈ પણ કિંમત માટે 6^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય ન હોય.
6. વિરોધાભાસથી સાબિત કરો કે, સમતલની કોઈપણ બે ભિન્ન રેખાઓ એક કરતાં વધારે બિંદુમાં છેદે નહીં.

A1.8 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. સાબિતીના અલગ અલગ ઘટકો અને ધોરણ IX માં શીખેલી સંબંધિત સંકલ્પનાઓ.
2. વિધાનનું નિષેધ
3. વિધાનનું પ્રતીપ
4. વિરોધાભાસથી સાબિતી

ગાણિતિક મોડેલિંગ A2

A2.1 પ્રાસ્તાવિક

- એક પુખ્ત માનવશરીરમાં લોહીનું વહન કરતી ધમનીઓ અને શિરાઓની લંબાઈ લગભગ 1,50,000 કિમી હોય છે.
- માનવહૃદય શરીરમાં પ્રત્યેક 60 સેકન્ડે 5 થી 6 લિટર લોહીને વહેતું કરે છે.
- સૂર્યની સપાટીનું તાપમાન અંદાજે 6000° સે છે.

તમને ક્યારેય આશ્ચર્ય થયું છે કે, આપણા વૈજ્ઞાનિકો અને ગણિતશાસ્ત્રીઓએ ઉપર્યુક્ત પરિણામોનું અનુમાન કેવી રીતે કર્યું હશે ? તેમણે મૃત પુખ્ત માનવશરીરની બધી જ ધમનીઓ અને શિરાઓ બહાર કાઢીને તેમની લંબાઈ માપી હશે ? તે માનવશરીરનું બધું જ લોહી બહાર કાઢી અને આ પરિણામ પર પહોંચ્યા હશે ? સૂર્યની સપાટીનું તાપમાન જાણવા માટે તેમણે થરમોમિટર સાથે સૂર્યની સફર ખેડી હશે ? ચોક્કસપણે ના. તો આ પરિણામોના આંકડા તેમને કેવી રીતે મળ્યા ?

સંભવતઃ આનો જવાબ ગાણિતિક મોડેલિંગમાં રહેલો છે. તમે તેનો પરિચય ધોરણ IX માં કર્યો છે. તમને યાદ હશે કે ગાણિતિક મોડેલિંગ એ જીવનની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક વર્ણન છે. અને તમે એ પણ જાણો છો કે, ગાણિતિક મોડેલિંગ ગાણિતિક મોડેલ બનાવવાની પદ્ધતિ છે અને આ આપણે મોડેલનો ઉપયોગ સમસ્યાનું વિશ્લેષણ કરવામાં અને તેને ઉકેલવામાં કરીએ છીએ.

આમ, ગાણિતિક મોડેલિંગમાં આપણે વાસ્તવિક દુનિયાને લગતી સમસ્યાઓ લઈશું અને તેનું રૂપાંતરણ તે સમસ્યાને સમકક્ષ ગાણિતિક સમસ્યામાં પરિવર્તિત કરીશું. ત્યાર બાદ આપણે ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવી અને આ ઉકેલનું વાસ્તવિક દુનિયાને લગતી સમસ્યા માટે અર્થઘટન કરીશું. અહીં એ પણ જોવું અગત્યનું છે કે, આપણે મેળવેલ ઉકેલ મોડેલની યથાર્થતાની ચકાસણીના તબક્કે અર્થપૂર્ણ હોય. આગળ જેમાં ગાણિતિક મોડેલિંગની ખૂબ જ અગત્યતા હોય એવાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપેલ છે :

(i) દુર્ગમ સ્થાન પર આવેલ નદીની પહોળાઈ તથા ઊંડાઈ શોધવી.

(ii) પૃથ્વી તથા અન્ય ગ્રહોના દ્રવ્યમાનનું અનુમાન કરવું.

(iii) પૃથ્વી તથા અન્ય ગ્રહો વચ્ચેના અંતરનું અનુમાન કરવું.

(iv) કોઈ એક દેશમાં ચોમાસાના આગમનની આગાહી કરવી.

(v) શૅરબજારના વલણની આગાહી કરવી.

(vi) વ્યક્તિના શરીરમાં રહેલા લોહીના જથ્થાનો અંદાજ લગાવવો.

(vii) કોઈ એક શહેરની 10 વર્ષ પછીની જનસંખ્યાનું અનુમાન કરવું.

(viii) ઝાડ પર રહેલાં પાંદડાંની સંખ્યાનો અંદાજ કાઢવો.

(ix) કોઈ એક શહેરના વાતાવરણમાં રહેલા અલગ-અલગ પ્રદૂષકોનો ppm એકમમાં અંદાજ લગાવવો.

(x) પ્રદૂષકોની પર્યાવરણ પર થતી અસરોના અંદાજ કાઢવા.

(xi) સૂર્યની સપાટીના તાપમાનનો અંદાજ મૂકવો.

આ પ્રકરણમાં આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગની પ્રક્રિયાનું પુનરાવલોકન કરીશું અને આસપાસનાં કેટલાંક દુન્યવી ઉદાહરણો દ્વારા તેની સંકલ્પના સ્પષ્ટ કરીશું. વિભાગ A 2.2 માં મોડલ બનાવવાના વિવિધ તબક્કા દર્શાવીશું. વિભાગ A 2.3 માં આપણે વિવિધ ઉદાહરણોની ચર્ચા કરીશું. વિભાગ A 2.4 માં આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગની ઉપયોગિતા સંબંધિત કારણો પર વિચાર કરીશું.

યાદ રાખો કે, અમારું ધ્યેય તમને ગણિત દુન્યવી સમસ્યાઓ ઉકેલવામાં કેવી રીતે સહાય કરે છે તે વિશે જાગૃત કરવાનું છે. તેમ છતાં પણ ગાણિતિક મોડેલિંગના મહત્ત્વને સચોટ રીતે સમજવા માટે તમને ગણિતનું થોડું વધારે જ્ઞાન હોય તે આવશ્યક છે. ઉચ્ચ વર્ગમાં તમને આને સંબંધિત કેટલાંક ઉદાહરણો જોવા મળશે.

A2.2 ગાણિતિક મોડેલિંગનાં સોપાનો

ધોરણ IX માં આપણે મોડેલિંગ વિશેનાં ઉદાહરણો વિશે વિચાર કર્યો હતો. આ ઉદાહરણોમાં તમને પ્રક્રિયા અને તેમાં સમાવિષ્ટ સોપાનો વિશે જાણકારી મળી હતી. ચાલો, હવે આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગ સંબંધિત મુખ્ય સોપાનો પર ફરીથી વિચાર કરીએ.

સોપાન 1 (સમસ્યાની સમજણ) : વાસ્તવિક સમસ્યાને વ્યાખ્યાયિત કરો અને જો તમે સમૂહમાં કામ કરતા હો તો જેને તમે સમજવા માંગતા હો એવી સમસ્યા પર વિચાર કરો. કેટલીક ધારણાઓ કરીને તથા કેટલાંક પરિબળોને અવગણીને સફળતા મેળવી શકાય તે માટે સમસ્યાનું સરળીકરણ કરો.

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, આપણી સમસ્યા એક તળાવમાં રહેલી માછલીઓની સંખ્યાઓનો અંદાજ મેળવવાની છે. અહીં પ્રત્યેક માછલીને પકડી અને ત્યાર બાદ તેની ગણતરી કરવી શક્ય નથી. આવી સ્થિતિમાં, સંભવતઃ આપણે તળાવમાંથી માછલીઓનો નિયત નમૂનો લઈશું, તેની ગણતરી કરી અને તેના આધારે તેમની કુલ સંખ્યાનું અનુમાન કરીશું.

સોપાન 2 (ગાણિતિક વર્ણન અને સૂત્રીકરણ) : સમસ્યાના વિભિન્ન પાસાંઓનું વર્ણન ગાણિતિક શબ્દોમાં કરો. સમસ્યાનાં વિભિન્ન લક્ષણોને ગાણિતિક સ્વરૂપે દર્શાવવાની કેટલીક પદ્ધતિઓ નીચે પ્રમાણે છે :

- ચલને વ્યાખ્યાયિત કરો.
- સમીકરણ અથવા અસમતા લખો.
- માહિતી એકત્રિત કરો અને તેને કોષ્ટક સ્વરૂપે દર્શાવો.
- આલેખ દોરો.
- સંભાવનાઓની ગણતરી કરો.

ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લીધેલા થોડાક નમૂનાના આધારે માછલીઓની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ કેવી રીતે કરી શકાય ? આ માટે નિશ્ચિત નમૂના તરીકે લીધેલ દરેક માછલીને નિશાની કરી અને તળાવમાં રહેલી બીજી માછલીઓ સાથે તેમને છોડી દઈશું. થોડાક સમય બાદ આપણે ફરીથી માછલીઓનો એક નિશ્ચિત નમૂનો લઈશું અને આ નવા નમૂનામાં અગાઉ નિશાની કરેલી માછલીઓની સંખ્યા કેટલી છે તે જોઈશું. ત્યારબાદ ગુણોત્તર અને પ્રમાણનો ઉપયોગ કરીને આપણે તેમની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ મેળવી શકીશું. ધારો કે, તળાવમાંથી આપણે 20 માછલીઓનો એક નમૂનો લઈએ છીએ અને દરેકને નિશાની કરી અને તળાવમાં બાકી રહેલ માછલીઓ સાથે ભળી જાય તે રીતે તે જ તળાવમાં છોડી દઈએ છીએ. ત્યારબાદ તળાવમાં રહેલા માછલીઓના મિશ્ર સમૂહમાંથી આપણે માછલીઓનો બીજો એક નમૂનો (ધારો કે, 50 માછલીઓ) લઈએ અને જોઈશું કે, આ નવા નમૂનામાં અગાઉથી નિશાની કરેલ કેટલી માછલીઓ આવેલ છે. આ પ્રમાણે આપણે માહિતી એકત્રિત કરીશું અને ત્યારબાદ તેનું વિશ્લેષણ કરીશું.

અહીં આપણે એવું માની લઈશું કે, નિશાની કરેલ દરેક માછલી એક સમાન રૂપે તળાવમાં બાકી રહેલ માછલીઓ સાથે ભળે છે અને આપણે જે નિશ્ચિત નમૂનો લઈએ છીએ તે માછલીઓના કુલ સમૂહનું સારું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે.

સોપાન 3 (ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવો) : અહીં સોપાન 2 માં સરળ બનાવેલ ગાણિતિક સમસ્યાનો વિભિન્ન ગાણિતિક પ્રવિધિનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, સોપાન 2 માં લીધેલા બીજા જથ્થામાં 5 માછલીઓ નિશાનીવાળી મળે છે. આમ, માછલીઓની કુલ સંખ્યામાંથી $\frac{5}{50}$ એટલે કે, $\frac{1}{10}$ માછલીઓ નિશાનીવાળી હશે. હવે જો આ મળેલ સંખ્યાને કુલ સંખ્યા સ્વરૂપે દર્શાવીએ, તો કુલ સંખ્યાનો $\frac{1}{10}$ ભાગ $= 20$

આમ, કુલ સંખ્યા $= 20 \times 10 = 200$ થાય.

સોપાન 4 (ઉકેલનું અર્થઘટન) : અગાઉના સોપાનમાં પ્રાપ્ત થયેલ ઉકેલને આપણે સોપાન 1 માં લીધેલ વાસ્તવિક જીવનસંબંધી સ્થિતિના સંદર્ભમાં લઈશું.

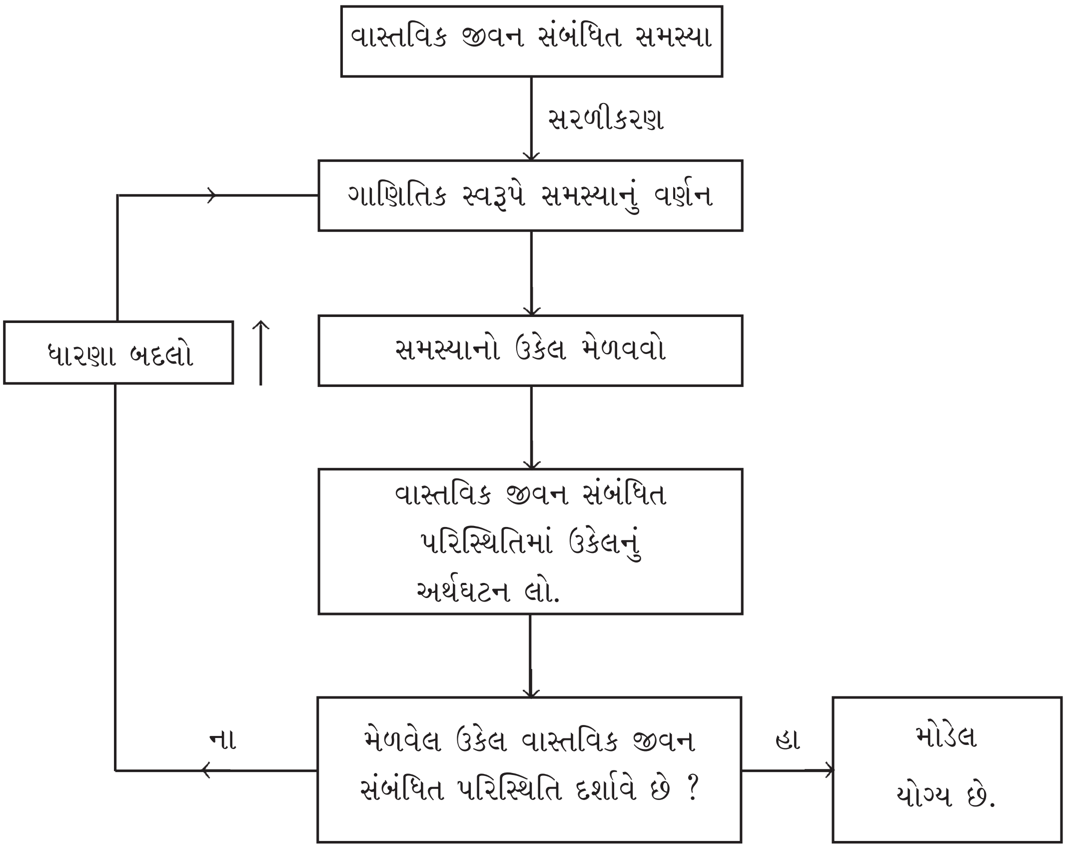
ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 3 ની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવતાં આપણને માછલીઓની કુલ સંખ્યા 200 મળી હતી.

સોપાન 5 (મોડેલની યથાર્થતા) : હવે આપણે મૂળ પરિસ્થિતિ પર પાછા ફરીએ અને જોઈએ કે, ગાણિતિક પ્રવિધિ દ્વારા મેળવેલ પરિણામ સાર્થક છે કે નહીં. જો સાર્થક હોય, તો આપણે જ્યાં સુધી કોઈ નવી માહિતી પ્રાપ્ત ન થાય અથવા તો યથાર્થતામાં કોઈ બદલાવ ન આવે ત્યાં સુધી આ મોડેલનો ઉપયોગ કરતા રહીશું.

કેટલીક વાર સમસ્યાનું ગાણિતિક વર્ણન કરતી વખતે સરળીકરણ માટે કરવામાં આવતી ધારણાઓના લીધે વાસ્તવિક સમસ્યાના આવશ્યક પાસાંઓથી આપણે વંચિત રહીએ છીએ. આ પરિસ્થિતિમાં મેળવેલ ઉકેલ વાસ્તવિકતાથી બહુ જ દૂર હોય છે અને વાસ્તવિક પરિસ્થિતિના સંદર્ભમાં તે અર્થપૂર્ણ હોતા નથી. જો આવું થાય, તો આપણે સોપાન 1 માં કરેલી ધારણાઓ પર ફરી વિચાર કરીશું. અને કદાચ જે પરિબળોને અગાઉ અવગણ્યા હતા તેમનો સમાવેશ કરીને વધુ વાસ્તવિક બનાવીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 3 માં આપણને મળેલ માછલીઓની કુલ સંખ્યાનું અનુમાન એ તળાવમાં રહેલી માછલીઓની વાસ્તવિક સંખ્યા જેટલું ના પણ હોય. હવે આપણે સોપાન 2 અને 3 ની પ્રક્રિયાને એકથી વધારે વાર કરી અને મેળવેલ પરિણામોનો મધ્યક મેળવીશું અને જોઈશું કે તે દ્વારા ઉચિત પરિણામ મળે છે કે નહિ. આ રીતે તમને કુલ સંખ્યાની વધુ નજીકનો અંદાજ મળશે.

ગાણિતિક મોડેલિંગની પ્રક્રિયાને દર્શાવતી બીજી એક પદ્ધતિ આકૃતિ A 2.1માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ A 2.1

ઉકેલની સરળતા માટે મોડેલ બનાવનાર સરળીકરણ (ઉકેલ પ્રાપ્તિની સરળતા માટે) અને ચોકસાઈ બંનેની વચ્ચે સંતુલન જાળવી રાખે છે કે, જેથી કંઈ પ્રગતિ થઈ શકે તેટલા વાસ્તવિકતાથી પર્યાપ્ત રીતે નજીક હોય તેવી તે આશા રાખે છે. સર્વોત્તમ પરિણામ એ હશે, કે જેનાથી આગળ શું થવાનું છે તેની આગાહી કરી શકાય અથવા તો થોડીક

ચોકસાઈ સાથે પરિણામની આગાહી કરી શકાય. ધ્યાન રાખો કે, સમસ્યાના સરળીકરણ માટે ઉપયોગમાં લેવાયેલ વિભિન્ન ધારણાઓથી આપણને અલગ-અલગ મોડેલ મળી શકે છે. આમ કોઈ પણ મોડેલ પરિપૂર્ણ હોતું નથી. આમાંથી કેટલાક સારાં પણ હોય અને કેટલાંક ઉત્તમ પણ હોઈ શકે.

સ્વાધ્યાય A 2.1

1. નીચે દર્શાવેલ પરિસ્થિતિ પર વિચાર કરો.

તેરમી સદીના પ્રારંભમાં લિઓનાર્ડો ફિબોનાકીએ એક કૂટપ્રશ્ન રજુ કર્યો કે, જો તમારી પાસે સસલાની એક જોડ (એક નર અને એક માદા) હોય અને તે પ્રજનન કરે તો અમુક સમય પછી તમારી પાસે કેટલાં સસલાં હશે. ધારો કે, એક જોડ દર મહિને એક એક જોડ (એક નર અને એક માદા) ને જન્મ આપે છે અને તાજી જન્મેલી સસલાની જોડ જન્મના 2 મહિના બાદ પ્રથમ જોડને જન્મ આપી શકે છે. શરૂઆત અને પ્રથમ માસ ને બાદ કરતાં માસવાર સસલાંઓની જોડની સંખ્યા તે માસના અગાઉના બે માસમાં રહેલી જોડની સંખ્યાના સરવાળા બરાબર થાય છે.

માસ	સસલાંની જોડ
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

16 મહિના પછી તમારી પાસે લગભગ 1600 જોડ સસલાં હશે !

આ પરિસ્થિતિનું સ્પષ્ટ વિધાન કરો તથા ગાણિતિક મોડેલિંગનાં અલગ-અલગ સોપાનો વિશે સ્પષ્ટતા કરો.

A2.3 કેટલાંક ઉદાહરણો

હવે ગાણિતિક મોડેલિંગના કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : (પાસાની એક જોડને ફેંકવી) : ધારો કે, તમારી શિક્ષિકા તમને અનુમાન કરવાની એક રમત માટે આહ્વાન આપે છે. આ રમતમાં તે પાસાની એક જોડ ફેંકશે. પાસાઓને ફેંકતાં પહેલાં તમારે તે બંને પાસા પર આવનાર સંખ્યાઓનો સરવાળો કેટલો હશે તેનું અનુમાન લગાવવાનું છે. દરેક સત્ય જવાબ માટે તમને બે ગુણ મળશે અને દરેક અસત્ય જવાબ માટે તમે બે ગુણ ગુમાવશો. તો આ રમત માટે કઈ સંખ્યાઓ ઉત્તમ અનુમાન હશે ?

ઉકેલ :

સોપાન 1 (સમસ્યાની સમજ) : અહીં તમારે કેટલીક એવી સંખ્યાઓ જાણવી પડશે કે જેની પાસાઓ પર આવવાની સંભાવના સૌથી વધારે હોય.

સોપાન 2 (ગાણિતિક વર્ણન) : ગાણિતિક સ્વરૂપમાં આ સમસ્યા પાસાઓ પર આવનાર સંખ્યાના અલગ-અલગ શક્ય સરવાળાઓની સંભાવના જાણવામાં પરિવર્તિત થાય છે.

નીચે દર્શાવેલ 36 સંખ્યા યુગ્મમાંથી કોઈ એક યાદચ્છિક વિકલ્પના રૂપમાં પસંદ કરી આપણે બહુ જ સરળ રીતે આ સ્થિતિને પ્રદર્શિત કરી શકીએ છીએ :

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ઉપર્યુક્ત સંખ્યા-યુગ્મમાં દર્શાવેલ પ્રથમ સંખ્યા પ્રથમ પાસા પર આવેલ સંખ્યા છે અને બીજી સંખ્યા બીજા પાસા પર આવેલ સંખ્યા દર્શાવે છે.

સોપાન 3 (ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવો) : ઉપર્યુક્ત સંખ્યા-યુગ્મમાં આવેલા સંખ્યાઓના સરવાળા કરતાં આપણને સંભવિત સરવાળા તરીકે 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 અને 12 જેવી સંખ્યાઓ મળે છે. ઉપર્યુક્ત દરેક ઘટનાને સમસંભાવી માનીને આપણે દરેકની સંભાવના શોધવી પડશે.

તે આપણે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવીશું :

સરવાળો	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
સંભાવના	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

તમે જોઈ શકો છો કે, સંખ્યાઓનો સરવાળો 7 આવવાની સંભાવના $\frac{1}{6}$ છે. તે સરવાળા તરીકે આવતી અન્ય સંખ્યાઓ કરતા સૌથી વધારે છે.

સોપાન 4 (ઉકેલનું અર્થઘટન) : સરવાળો 7 આવવાની સંભાવના સૌથી વધારે હોવાથી તમે સંખ્યા 7 નું અનુમાન વારંવાર કરી શકો છો.

સોપાન 5 (મોડેલની યથાર્થતા) : પાસાની એક જોડને ઘણી બધી વાર ઉછાળો અને તેનાં પરિણામો માટે એક સાપેક્ષ

આવૃત્તિ કોષ્ટક બનાવો. હવે સાપેક્ષ આવૃત્તિની સરખામણી તેને અનુરૂપ સંભાવનાઓ જોડે કરો. હવે જો આ પરિણામો એકબીજાની નજીક ના હોય તો શક્ય છે કે, પાસાઓની જોડ અસમતોલ છે. જે સંખ્યા પૂર્વગ્રહયુક્ત હોય તેવી માહિતી લઈએ.

હવે પછીના ઉદાહરણ માટે તમને થોડીક પૂર્વ ભૂમિકાની જરૂર પડશે.

જ્યારે રૂપિયાની જરૂર હોય, ત્યારે રૂપિયા ના હોવા એ ઘણા બધા લોકોનો સામાન્ય અનુભવ છે. આપણને હંમેશાં રૂપિયાની જરૂર પડે છે; પછી એ જીવન જરૂરિયાતની વસ્તુઓ ખરીદવા માટે હોય કે, સુખાકારી માટે. સ્કૂટર, રેફ્રિજરેટર, ટેલિવિઝન, કાર જેવી વસ્તુઓ ઓછી મૂડી સાથે પણ ગ્રાહક ખરીદી શકે તે માટે વેપારીઓ દ્વારા હપતા પદ્ધતિ જેવી યોજનાઓ અમલમાં મૂકવામાં આવે છે.

ઘણી વાર વસ્તુઓનું વેચાણ વધારવાના ભાગરૂપે ગ્રાહકોને આકર્ષવા માટે પણ વેપારી હપતાપદ્ધતિ જેવી યોજના મૂકે છે. હપતાપદ્ધતિમાં ગ્રાહકે વસ્તુ ખરીદતી વખતે વસ્તુની પૂરેપૂરી ખરીદકિંમત આપવી પડતી નથી. વસ્તુની ખરીદી વખતે ગ્રાહક વસ્તુની કુલ ખરીદ કિંમતનો અમુક ભાગ ચૂકવે છે અને બાકી રહેલ રકમ તે માસિક, ત્રિમાસિક, છ માસિક કે વાર્ષિક હપતારૂપે ચૂકવી શકે. હકીકતમાં હપતાપદ્ધતિમાં વેપારી પાછળથી ચૂકવવામાં આવનારી રકમ પર થોડુંક વ્યાજ પણ ગ્રાહક પાસેથી વસૂલ કરે છે. (તેને ***સ્થગિત ચૂકવણી (Defered payment)*** કહે છે.)

હપતા પદ્ધતિને વધુ સારી રીતે સમજવા માટે તેને સંબંધિત ઉદાહરણ લેતાં પહેલાં આપણે તેની સંકલ્પના સંબંધિત વારંવાર ઉપયોગમાં લેવાતા શબ્દો સમજીએ.

વસ્તુની ખરીદી વખતે ગ્રાહક દ્વારા ચૂકવાતી વસ્તુની પૂરેપૂરી કિંમતને ***રોકડ કિંમત (Cash price)*** કહે છે. હપતાપદ્ધતિમાં ગ્રાહક દ્વારા મૂળ કિંમતના કોઈ એક અંશ જેટલી ચૂકવવામાં આવતી રકમને ***તત્કાળ ચૂકવણી (Down payment)*** કહે છે.

નોંધ : હપતાપદ્ધતિમાં ખરીદેલ વસ્તુની ખરીદીની બાકી રહેલ રકમની ચૂકવણી એક વર્ષની અંદર જ કરવાની હોય તો સ્થગિત ચૂકવણી પર સાદુ વ્યાજ વસૂલવામાં આવે છે.

> જૂના જમાનામાં ઉધાર લીધેલ ધન રાશિ પર વ્યાજ લેવું એક કુપ્રથા હતી અને આવું કરવું તે પ્રતિબંધિત પણ હતું. વ્યાજ વસૂલી સંબંધિત કાયદાથી બચવા માટે લોકો ઉધાર લેવા માટે કોઈ એક ચલણનો ઉપયોગ કરતાં અને તેની ચૂકવણી કોઈ બીજા ચલણમાં કરતાં અને વ્યાજ વિનિમયનો દર છુપાવતા હતા.

હવે, આ સંબંધિત ગાણિતિક મોડેલિંગની સમસ્યા પર વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 2 : જૂહી એક સાઈકલ ખરીદવા ઈચ્છે છે. તે બજારમાં જાય છે, અને જુએ છે કે, જે સાઈકલ તેને પસંદ છે તેની કિંમત ₹ 1800 છે. જૂહી પાસે ફક્ત ₹ 600 જ છે. તેથી તે દુકાનદારને કહે છે કે, તે અત્યારે સાઈકલ ખરીદી શકે તેવી સ્થિતિમાં નથી. થોડીક ગણતરી બાદ દુકાનદાર નીચે પ્રમાણેની તૈયારી બતાવે છે : તે જૂહીને કહે છે કે, જો તે અત્યારે ₹ 600 રોકડા તત્કાળ ચૂકવણી પેટે અને બાકીની રકમ ₹ 610નો એક એવા બે માસિક હપતામાં ચૂકવે તો તે અત્યારે સાઈકલ ખરીદી શકે છે. જૂહી પાસે હવે બે વિકલ્પ છે, કાં તો એ હપતા પદ્ધતિ દ્વારા સાઈકલ ખરીદે અથવા તો તે રોકડેથી ખરીદવા માટે બેંકમાંથી વાર્ષિક 10 ટકાના સાદા વ્યાજે ઉપલબ્ધ ઋણ લે. કયો વિકલ્પ આર્થિક રીતે વધુ યોગ્ય હશે ?

ઉકેલ :

સોપાન 1 (સમસ્યાની સમજ) : અહીં જૂહી એ નક્કી કરવા માંગે છે કે, તેને દુકાનદાર દ્વારા આપવામાં આવેલ વિકલ્પ સ્વીકારવો કે નહિ. આ માટે બંને વિકલ્પ માટેના વ્યાજના દર જાણવા જરૂરી છે; એક કે જે હપતાપદ્ધતિમાં લાગુ પડશે અને બીજો કે જે બૅન્ક દ્વારા લગાવવામાં આવશે (તે 10 % છે.)

સોપાન 2 (ગાણિતિક વર્ણન) : હપતાપદ્ધતિની યોજનાના સ્વીકાર કે અસ્વીકાર માટે, તેને દુકાનદાર દ્વારા લેવામાં આવનાર વ્યાજની સરખામણી બૅન્કના વ્યાજ સાથે કરવી પડશે. ધ્યાન આપો. અહીં વ્યાજની ચૂકવણી એક વર્ષની અંદર કરવાની હોવાથી સાદું વ્યાજ લાગુ પડશે.

આપણે જાણીએ છીએ કે સાઇકલની રોકડ કિંમત = ₹ 1800

અને હપતાપદ્ધતિમાં તત્કાળ ચૂકવણીની રકમ = ₹ 600

માટે, હપતાપદ્ધતિ દ્વારા જેની ચૂકવણી કરવાની છે તે શેષ-રકમ = ₹ (1800 – 600) = ₹ 1200

ધારો કે દુકાનદાર દ્વારા લેવાનાર વ્યાજનો વાર્ષિક દર r % છે.

પ્રત્યેક હપતાની રકમ = ₹ 610

હપતા દ્વારા ચૂકવાતી કુલ રકમ = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

હપતાપદ્ધતિમાં ચૂકવવામાં આવનાર કુલ વ્યાજ = ₹ 1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

હવે, જૂહી ₹ 1200 પોતાની પાસે એક મહિના સુધી રાખે છે. માટે

પ્રથમ માસનું મુદ્દલ = ₹ 1200

દ્વિતીય માસનું મુદ્દલ = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

દ્વિતીય માસનું શેષમુદ્દલ ₹ 590 + વ્યાજ (₹ 20) = માસિક હપતો (₹ 610) = બીજો હપતો

આમ, એક માસ માટેનું કુલ મુદ્દલ = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790

તેથી, વ્યાજ $= \dfrac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12}$ (2)

સોપાન 3 (સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવો) : પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

માટે $r = \dfrac{20 \times 1200}{1790} = 13.14$ (આશરે)

સોપાન 4 (ઉકેલનું અર્થઘટન) : હપતાપદ્ધતિમાં વ્યાજનો દર 13.14 % છે. બૅન્ક દ્વારા લાગવવામાં આવેલ વ્યાજનો દર 10 % છે.

આમ, સાઇકલ ખરીદવા માટે બૅન્કમાંથી ધન રાશિ લેવી જૂહી માટે આર્થિક રીતે વધુ યોગ્ય છે.

સોપાન 5 (મોડેલની યથાર્થતા) : આ સ્થિતિમાં હવે આ સોપાનનું હવે કોઈ મહત્ત્વ નથી કારણ કે, અહીં સંખ્યાઓ નિશ્ચિત છે. તેમ છતાં પણ બૅન્કમાંથી લોન લેવા માટે કરવી પડતી ઔપચારિકતાઓ તથા તે માટે કરવા પડતા ખર્ચ જેવા કે, સ્ટેમ્પપેપર (દસ્તાવેજ માટેના કાગળ)ની કિંમત વગેરેના કારણે અસરકારક વ્યાજનો દર હપતાપદ્ધતિમાં લાગુ પડનાર વ્યાજના દર કરતાં વધી જાય છે. તેથી, તે પોતાનો વિચાર બદલી પણ શકે છે.

નોંધ : વ્યાજના દર અંગેનું મોડેલિંગ હજુ પણ તેની પ્રારંભિક અવસ્થામાં જ છે અને તેની માન્યતા નાણાકીય બજાર માટે હજુ પણ એક સમસ્યા જ છે અને જો હપતાની રકમ નક્કી કરવા માટે અલગ અલગ વ્યાજના દર લગાવવામાં આવેલ હોય તો તેની માન્યતા એક મહત્ત્વની સમસ્યા બની રહે છે.

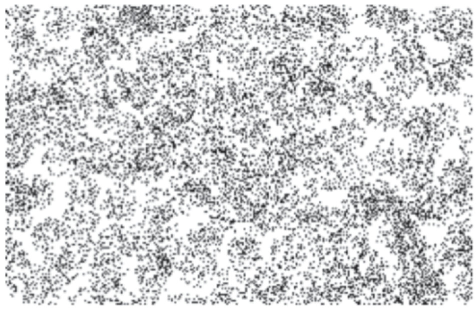
સ્વાધ્યાય A 2.2

નીચે આપેલ સમસ્યાઓ માટે સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવા માટેના ગાણિતિક મોડેલિંગનાં વિભિન્ન સોપાનો દર્શાવો :

1. એક પક્ષીવિદ્ એક વિશાળ ક્ષેત્રમાં રહેલા પોપટની સંખ્યાનો અંદાજ મેળવવા માંગે છે. આ માટે તે કેટલાક પોપટ પકડવા માટે જાળ પાથરે છે અને 32 પોપટ પકડે છે. તેને તે કડી પહેરાવી છોડી મૂકે છે. તે પછીના અઠવાડિયે તે જાળ પાથરીને 40 પોપટ પકડે છે. તેમાંથી 8 પોપટ કડી પહેરેલા છે.

(i) બીજી વાર પકડેલા પોપટમાંથી કેટલા ભાગના પોપટ કડી પહેરેલા હશે ?

(ii) આ ક્ષેત્રમાં રહેલા પોપટની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ મેળવો.



2. ધારો કે બાજુમાં આપેલ આકૃતિ એક જંગલની લીધેલી હવાઈ તસ્વીર દર્શાવે છે અને તેમાં રહેલું પ્રત્યેક ટપકું એક વૃક્ષનો નિર્દેશ કરે છે. અહીં તમારો ઉદ્દેશ, પર્યાવરણ સર્વેક્ષણના ભાગ રૂપે અહીં દર્શાવેલ ક્ષેત્રની જમીન પરનાં વૃક્ષની સંખ્યા શોધવાનો છે.

3. એક ટીવી ₹ 24,000 રોકડા આપીને ખરીદી શકાય છે અથવા તો ₹ 8000ની તત્કાળ ચૂકવણી કરી અને બાકીની રકમ ₹ 2800 નો એક એવા કુલ છ માસિક હપતા દ્વારા ચૂકવીને ખરીદી શકાય છે. અલી બજારમાં ટીવી ખરીદવા જાય છે. તેની પાસે ₹ 8000 છે. હવે તેની પાસે બે વિકલ્પ છે કાં તો એ હપતાપદ્ધતિ દ્વારા ટીવી ખરીદે અથવા તો નાણાકીય મંડળી પાસેથી લોન લઈ અને રોકડેથી ટીવી ખરીદે. મંડળી વાર્ષિક 18 ટકાના સાદા વ્યાજે લોન આપે છે, તો અલી માટે કયો વિકલ્પ યોગ્ય છે ?

A2.4 ગાણિતિક મોડેલિંગ કેમ મહત્ત્વનું છે ?

અહીં લીધેલાં ઉદાહરણોમાં આપણે જોયું કે, ગાણિતિક મોડેલિંગ એ વિવિધ વિદ્યાશાખાઓને લગતો વિષય છે. ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને અન્ય ક્ષેત્રના તજ્જ્ઞો, પ્રવર્તમાન પેદાશની સુધારણા માટે, ઉત્તમ પ્રદેશ બનાવવા તથા પેદાશોના પ્રવાહનો અંદાજ મેળવવા માટે પોતાના જ્ઞાન અને અનુભવનો ઉપયોગ કરે છે.

આમ તો મોડેલિંગના મહત્ત્વ માટેના ઘણાં બધાં વિશેષ કારણો છે પરંતુ તેમાંના મોટા ભાગનાં કારણો નિમ્નલિખિત સાથે કોઈ ને કોઈ રીતે સંકળાયેલા છે.

- ***સમજદારી વધારવા માટે : જો કોઈ એવું ગાણિતિક મોડેલ હોય કે જે વાસ્તવિક દુનિયાને સંબંધિત તંત્રના આવશ્યક વ્યવહારોને પ્રદર્શિત કરે તો આપણે મોડેલના વિશ્લેષણ દ્વારા વધુ સારી રીતે તે તંત્રને સમજી શકીએ છીએ. અને એ મોડેલના નિર્માણ વખતે આપણે જોઈશું કે, કયાં-કયાં પરિબળો તંત્ર માટે અતિમહત્ત્વના છે અને તંત્રનાં વિભિન્ન પાસાઓ કેવી રીતે એકબીજા સાથે સંકળાયેલા છે.***
- ***આગાહી અથવા અનુમાન અથવા નકલ કરવી :*** **ઘણી વાર આપણે એ જાણવા માંગીએ છીએ કે, વાસ્તવિક દુનિયા સંબંધિત તંત્રનું ભવિષ્યમાં શું મહત્ત્વ હશે. પરંતુ, તંત્ર સાથે તેનો સીધો પ્રયોગ કરવો મોંઘો, અવ્યવહારુ અથવા અશક્ય હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે હવામાનની આગાહીમાં,**

માનવશરીરમાં ઔષધીય કાર્યક્ષમતાના અભ્યાસમાં, અણુમથક (ન્યુક્લિયર રીએક્ટર)ની સારામાં સારી રૂપરેખા તૈયાર કરવામાં, વગેરેમાં.

અનેક પ્રકારનાં સંગઠનોમાં પૂર્વાનુમાન ઘણું જ મહત્ત્વનું હોય છે કેમ કે નિર્ણાયક પ્રક્રિયાઓમાં ભવિષ્યમાં થનાર ઘટનાઓની આગાહીઓને સમાવિષ્ટ કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, વેચાણવિભાગમાં માંગ સંબંધિત વિશ્વસનીય પૂર્વાનુમાન વેચાણ અંગેની વ્યૂહરચનાના આયોજનમાં ઉપયોગી થાય છે.

સ્કૂલ બોર્ડને અલગ-અલગ જિલ્લાઓમાં શાળાએ જતાં બાળકોની સંખ્યાનું પૂર્વાનુમાન લગાવવું આવશ્યક છે, કારણ કે, તેનાથી એ નિર્ણય લઈ શકાય કે, ક્યાં અને ક્યારે નવી શાળા શરૂ કરવી પડશે ?

હંમેશાં, પૂર્વાનુમાન કરનારાઓ પૂર્વાનુમાન માટે ભૂતકાળની માહિતીઓનો ઉપયોગ કરે છે. સૌપ્રથમ તેઓ પૂર્વાનુમાનને વર્ણવતી ભાતની ઓળખ માટે માહિતીનું વિશ્લેષણ કરે છે. ત્યાર બાદ આ માહિતી અને પદ્ધતિનો ઉપયોગ ભવિષ્યમાં થનારા પૂર્વાનુમાનમાં કરી શકાય છે. આ આધારભૂત વ્યૂહરચનાનો ઉપયોગ મોટાભાગના પૂર્વાનુમાનોમાં કરવામાં આવે છે. જે લાક્ષણિકતા અહીં ઓળખવામાં આવેલ છે તે ભવિષ્યમાં પણ ચાલુ રહેશે તે એ ધારણા પર આધારિત છે.

- **અંદાજ :** ઘણી વાર, આપણને મોટા મૂલ્યનો અંદાજ લગાવવો પડે છે. તમે જંગલમાં રહેલાં વૃક્ષો, તળાવમાં રહેલી માછલીઓ વગેરેનાં ઉદાહરણ જોઈ ચૂક્યા છો. એક અન્ય ઉદાહરણ તરીકે, ચૂંટણી પહેલાં, ચૂંટણીમાં ભાગ લેનારા પક્ષો પોતાના પક્ષની ચૂંટણીમાં જીતવાની સંભાવનાનું પૂર્વાનુમાન કરવા માંગતા હોય છે. વિશેષરૂપે તે એ બાબતનું અનુમાન લગાવવા ઈચ્છે છે કે તેમના મત વિસ્તારમાંથી કેટલા લોકો તેમના પક્ષને મત આપશે. તેમના આ અનુમાનના આધારે તેઓ તેમના પ્રચારની વ્યૂહરચના નક્કી કરવા માંગતા હોય છે. ચૂંટણીમાં કયા પક્ષને કેટલી બેઠક મળશે તેના અનુમાન માટે ચૂંટણી સર્વેક્ષણ (Exit polls)નો વ્યાપક ઉપયોગ થતો હોય છે.

સ્વાધ્યાય A 2.3

1. છેલ્લાં પાંચ વર્ષની માહિતીના આધારે, આ વર્ષના અંતે ધોરણ 10 ની બોર્ડની પરીક્ષામાં તમારી શાળાના ગણિત વિષયના સરાસરી ગુણની ટકાવારીનું પૂર્વાનુમાન કરો.

A2.5 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં તમે નિમ્નલિખિત મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. ગાણિતિક મોડેલ એ વાસ્તવિક જીવનની પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક વર્ણન છે. ગાણિતિક મોડેલિંગ એ ગાણિતિક મોડેલ રચવાની, તેને ઉકેલવાની અને વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાઓ સમજવામાં તેનો ઉપયોગ કરવાની પ્રક્રિયા છે.
2. મોડેલિંગમાં ઉપયોગી અલગ-અલગ સોપાનો આ પ્રમાણે છે : સમસ્યાની સમજ, ગાણિતિક મોડેલનું સૂત્રીકરણ, તેનો ઉકેલ, વાસ્તવિક જીવન સંદર્ભે તેનું અર્થઘટન અને છેલ્લે અત્યંત આવશ્યક મોડેલની યથાર્થતા.
3. કેટલાંક ગાણિતિક મોડેલનું નિર્માણ કર્યું.
4. ગાણિતિક મોડેલિંગની મહત્તા

જવાબો/સૂચનો

સ્વાધ્યાય 1.1

1. (i) 45 (ii) 196 (iii) 51

2. કોઈ પણ પૂર્ણાંકનું સ્વરૂપ $6q$, $6q + 1$, $6q + 2$, $6q + 3$, $6q + 4$ અથવા $6q + 5$ હોય.

3. 8 સ્તંભ

4. કોઈ પણ પૂર્ણાંકનું સ્વરૂપ $3q$, $3q + 1$ અથવા $3q + 2$ હોય. આ બધા પૂર્ણાંકોનો વર્ગ કરો.

5. કોઈ પણ પૂર્ણાંકનું સ્વરૂપ $9q$, $9q + 1$, $9q + 2$, $9q + 3$, ... અથવા $9q + 8$ હોય.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
(iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) લ.સા.અ. = 182; ગુ.સા.અ. = 13 (ii) લ.સા.અ. = 23460; ગુ.સા.અ. = 2
(iii) લ.સા.અ. = 3024; ગુ.સા.અ. = 6

3. (i) લ.સા.અ. = 420; ગુ.સા.અ. = 3 (ii) લ.સા.અ. = 11339; ગુ.સા.અ. = 1
(iii) લ.સા.અ. = 1800; ગુ.સા.અ. = 1

4. 22338

7. 36 મિનિટ

સ્વાધ્યાય 1.4

1. (i) સાન્ત (ii) સાન્ત (iii) અનંત આવૃત્ત (iv) સાન્ત
(v) અનંત આવૃત્ત (vi) સાન્ત (vii) અનંત આવૃત્ત (viii) સાન્ત
(ix) સાન્ત (x) અનંત આવૃત્ત

2. (i) 0.00416 (ii) 2.125 (iv) 0.009375
(vi) 0.115 (viii) 0.4 (ix) 0.7

3. (i) સંમેય, q ના અવિભાજ્ય અવયવો 2 અથવા 5 અથવા ફક્ત બંને હશે.

(ii) સંમેય નથી

(iii) સંમેય, q ના અવિભાજ્ય અવયવોમાં 2 અથવા 5 ઉપરાંત અન્ય કોઈ અવિભાજ્ય પણ સમાવિષ્ટ છે.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. (i) શૂન્યો નથી (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

સ્વાધ્યાય 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

(iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

સ્વાધ્યાય 2.3

1. (i) ભાગફળ $= x - 3$ અને શેષ $= 7x - 9$

(ii) ભાગફળ $= x^2 + x - 3$ અને શેષ $= 8$

(iii) ભાગફળ $= -x^2 - 2$ અને શેષ $= -5x + 10$

2. (i) હા (ii) હા (iii) ના **3.** $-1, -1$ **4.** $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14$, $g(x) = 2$, $q(x) = x^2 - x + 7$, $r(x) = 0$

(ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $q(x) = x + 2$, $r(x) = 4$

(i), (ii) અને (iii) એ દરેક માટે બીજાં ઘણાં ઉદાહરણો પણ હોઈ શકે. આ નમૂના માત્ર છે.

સ્વાધ્યાય 2.4 (વૈકલ્પિક)*

2. $x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ **3.** $a = 1$, $b = \pm\sqrt{2}$

4. $-5, 7$ **5.** $k = 5$ અને $a = -5$

સ્વાધ્યાય 3.1

1. બૈજિક રીતે બંને પરિસ્થિતિ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

જો x અને y અનુક્રમે આફતાબ અને તેની પુત્રીની હાલની ઉંમર હોય, તો $x - 7y + 42 = 0$; $x - 3y - 6 = 0$, આલેખ દ્વારા પરિસ્થિતિ દર્શાવવા, આ બે સુરેખ સમીકરણોનો આલેખ દોરી શકાય.

2. બૈજિક રીતે બે પરિસ્થિતિ આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

જો x અને y અનુક્રમે બેટ અને બોલની કિંમત (₹ માં) હોય, તો $x + 2y = 1300$; $x + 3y = 1300$. આલેખ દ્વારા પરિસ્થિતિ દર્શાવવા, આ બે સુરેખ સમીકરણોના આલેખ દોરી શકાય.

3. બૈજિક રીતે પરિસ્થિતિ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

જો x અને y અનુક્રમે સફરજન અને દ્રાક્ષના ભાવ (₹ પ્રતિ કિગ્રામાં) હોય, તો $2x + y = 160$; $4x + 2y = 300$, આલેખ દ્વારા પરિસ્થિતિ દર્શાવવા, આ બે સુરેખ સમીકરણોના આલેખ દોરી શકાય.

સ્વાધ્યાય 3.2

1. (i) આવશ્યક સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $x + y = 10$; $x - y = 4$ છે. x છોકરીઓની સંખ્યા અને y છોકરાઓની સંખ્યા છે. આલેખની રીતે ઉકેલ મેળવવા આ સમીકરણોના આલેખ, આલેખપત્ર પર સમાન અક્ષો લઈને દોરો. છોકરીઓની સંખ્યા = 7, છોકરાઓની સંખ્યા = 3

(ii) આવશ્યક સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $5x + 7y = 50$; $7x + 5y = 46$ છે. x અને y અનુક્રમે પેન્સિલ અને પેનની કિંમત (₹ માં) દર્શાવે છે.
આલેખની રીતે ઉકેલ મેળવવા આ સમીકરણોના આલેખ આલેખપત્ર પર સમાન અક્ષો લઈને દોરો.
એક પેન્સિલની કિંમત = ₹ 3; એક પેનની કિંમત = ₹ 5

2. (i) એક બિંદુમાં છેદે (ii) સંપાતિ (iii) સમાંતર

3. (i) સુસંગત (ii) સુસંગત નથી (iii) સુસંગત
(iv) સુસંગત (v) સુસંગત

4. (i) સુસંગત (ii) સુસંગત નથી (iii) સુસંગત
(iv) સુસંગત નથી
ઉપર (i) નો ઉકેલ x ની કોઈ પણ કિંમત માટે $y = 5 - x$ થી મળે, એટલે કે, તેના અસંખ્ય ઉકેલ મળે છે.
ઉપર (iii) નો ઉકેલ $x = 2$, $y = 2$ છે. એટલે કે, અનન્ય ઉકેલ છે.

5. લંબાઈ = 20 મી અને પહોળાઈ = 16 મી

6. ત્રણેય વિભાગો માટે નમૂનારૂપ જવાબ
(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ $(-1, 0)$, $(4, 0)$ અને $(2, 3)$ છે.

સ્વાધ્યાય 3.3

1. (i) $x = 9, y = 5$ (ii) $s = 9, t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$
અત્રે x ની કિંમત કોઈ પણ હોઈ શકે એટલે કે અસંખ્ય ઉકેલો છે.
(iv) $x = 2, y = 3$ (v) $x = 0, y = 0$ (vi) $x = 2, y = 3$

2. $x = -2, y = 5, m = -1$

3. (i) $x > y$ હોય તેવી બે સંખ્યાઓ હોય, તો $x - y = 26$, $x = 3y$; $x = 39$, $y = 13$

(ii) જો x અને y ખૂણાઓના અંશ માપ હોય, તો $x - y = 18$, $x + y = 180$; $x = 99$, $y = 81$

(iii) x અને y અનુક્રમે એક બૅટ અને એક બૉલની કિંમત (₹ માં) હોય, તો $7x + 6y = 3800$, $3x + 5y = 1750$; $x = 500$, $y = 50$

(iv) x નિશ્ચિત કિંમત (₹ માં) અને y પ્રતિ કિમીમાં દર હોય, તો $x + 10y = 105$, $x + 15y = 155$; $x = 5$, $y = 10$; ₹ 255

(v) x અને y અનુક્રમે અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ હોય, તો $11x - 9y + 4 = 0$, $6x - 5y + 3 = 0$; $\frac{7}{9}$ $(x = 7, y = 9)$

(vi) x અને y અનુક્રમે જેકોબ અને તેના પુત્રની ઉંમર (વર્ષમાં) હોય, તો $x - 3y - 10 = 0$, $x - 7y + 30 = 0$; $x = 40$, $y = 10$

સ્વાધ્યાય 3.4

1. (i) $x = \frac{19}{5}, y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2, y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}, y = -\frac{5}{13}$

(iv) $x = 2, y = -3$

2. (i) x અને y અનુક્રમે અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ હોય, તો $x - y + 2 = 0$, $2x - y - 1 = 0$; $\frac{3}{5}$

(ii) x અને y અનુક્રમે નૂરી અને સોનુની ઉંમર (વર્ષમાં) હોય, તો $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$, નૂરીની ઉંમર $x = 50$, સોનુની ઉંમર $y = 20$

(iii) x અને y અનુક્રમે સંખ્યાના દશક અને એકમના અંકો હોય, તો $x + y = 9$, $8x - y = 0$; 18

(iv) x અને y અનુક્રમે ₹ 50 અને ₹ 100 ની ચલણી નોટની સંખ્યા હોય, તો $x + 2y = 40$, $x + y = 25$, $x = 10$, $y = 15$

(v) x એ નિયત દર (₹ માં) અને y એ પ્રતિદિન વધારાનો દર (₹ માં) હોય, તો $x + 4y = 27$, $x + 2y = 21$; $x = 15$, $y = 3$

સ્વાધ્યાય 3.5

1. (i) ઉકેલ નથી (ii) અનન્ય ઉકેલ, $x = 2$, $y = 1$ (iii) અસંખ્ય ઉકેલો

(iv) અનન્ય ઉકેલ, $x = 4$, $y = -1$

2. (i) $a = 5$, $b = 1$ (ii) $k = 2$

3. (i) $x = -2$, $y = 5$

4. (i) x એ નિયત ભાવ (₹ માં) અને y ભોજનનો પ્રતિદિન ભાવ (₹ માં) હોય, તો $x + 20y = 1000$, $x + 26y = 1180$, ; $x = 400$, $y = 30$

(ii) જો x અને y અનુક્રમે અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ હોય, તો $3x - y - 3 = 0$, $4x - y - 8 = 0$; $\frac{5}{12}$

(iii) જો x અને y અનુક્રમે સાચા જવાબો અને ખોટા જવાબોની સંખ્યા હોય, તો $3x - y = 40$, $2x - y = 25$, ; 20

(iv) જો u અને v અનુક્રમે બે ગાડીની ઝડપ કિમી/કલાકમાં હોય, તો $u - v = 20$, $u + v = 100$; $u = 60$, $v = 40$

(v) જો x અને y અનુક્રમે લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ (એકમમાં) હોય, તો $3x - 5y - 6 = 0$, $2x + 3y - 61 = 0$. લંબાઈ $(x) = 17$, પહોળાઈ $(y) = 9$

સ્વાધ્યાય 3.6

1. (i) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ (ii) $x = 4$, $y = 9$ (iii) $x = \frac{1}{5}$, $y = -2$

(iv) $x = 4$, $y = 5$ (v) $x = 1$, $y = 1$ (vi) $x = 1$, $y = 2$

(vii) $x = 3$, $y = 2$ (viii) $x = 1$, $y = 1$

2. (i) u અને v અનુક્રમે હોડીની અને પ્રવાહની ઝડપ કિમી/કલાકમાં હોય, તો $u + v = 10$, $u - v = 2$; $u = 6$, $v = 4$

(ii) n અને m અનુક્રમે 1 સ્ત્રી અને 1 પુરુષ દ્વારા ભરતકામ પૂરુ કરવામાં લાગતા દિવસોની સંખ્યા હોય, તો $\frac{2}{n} + \frac{5}{m} = \frac{1}{4}$, $\frac{3}{n} + \frac{6}{m} = \frac{1}{3}$, $n = 18$, $m = 36$

(iii) u અને v અનુક્રમે ટ્રેન અને બસની ઝડપ કિમી/કલાકમાં હોય, તો $\frac{60}{u} + \frac{240}{v} = 4$, $\frac{100}{u} + \frac{200}{v} = \frac{25}{6}$, $u = 60$, $v = 80$

સ્વાધ્યાય 3.7 (વૈકલ્પિક)*

1. અનિની ઉંમર 19 વર્ષ અને બિજુની ઉંમર 16 વર્ષ છે. અથવા અનિની ઉંમર 21 વર્ષ અને બિજુની ઉંમર 24 વર્ષ છે.

2. ₹ 40, ₹ 170; ધારો કે, પહેલી વ્યક્તિ પાસે રૂપિયા x અને બીજી વ્યક્તિ પાસે રૂપિયા y છે.
$x + 100 = 2(y - 100)$, $y + 10 = 6(x - 10)$

3. 600 કિમી

4. 36

5. $\angle A = 20°$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 120°$

6. ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુના યામ $(1, 0)$, $(0, -3)$, $(0, -5)$

7. (i) $x = 1, y = -1$ (ii) $x = \frac{c(a-b)-b}{a^2-b^2}$, $y = \frac{c(a-b)+a}{a^2-b^2}$

(iii) $x = a, y = b$ (iv) $x = a + b$, $y = -\frac{2ab}{a+b}$ (v) $x = 2, y = 1$

8. $\angle A = 120°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$, $\angle D = 110°$

સ્વાધ્યાય 4.1

1. (i) હા (ii) હા (iii) ના (iv) હા
(v) હા (vi) ના (vii) ના (viii) હા

2. (i) x મી એ પ્લોટની પહોળાઈ હોય, તો $2x^2 + x - 528 = 0$.
(ii) x સૌથી નાનો પૂર્ણાંક હોય, તો $x^2 + x - 306 = 0$.
(iii) x એ રોહનની હાલની ઉંમર (વર્ષમાં) હોય, તો $x^2 + 32x - 273 = 0$.
(iv) u એ ટ્રેનની કિમી/કલાકમાં ઝડપ હોય, તો $u^2 - 8u - 1280 = 0$.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \frac{3}{2}$ (iii) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$

(iv) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

2. (i) 9, 36 (ii) 25, 30

3. સંખ્યાઓ 13 અને 14 છે.

4. ધન પૂર્ણાંકો 13 અને 14 છે.

5. 5 સેમી અને 12 સેમી

6. નમૂનાની સંખ્યા = 6, દરેક નમૂનાનો ખર્ચ = ₹ 15

સ્વાધ્યાય 4.3

1. (i) $\frac{1}{2}, 3$ (ii) $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

   (iv) અસ્તિત્વ ધરાવતા નથી.

2. 1 ની જેમ જ

3. (i) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) 1, 2

4. 7 વર્ષ

5. ગણિતમાં ગુણ = 12, અંગ્રેજીમાં ગુણ = 18

   અથવા ગણિતમાં ગુણ = 13, અંગ્રેજીમાં ગુણ = 17

6. 120 મી, 90 મી

7. 18, 12 અથવા 18, –12

8. 40 કિમી/કલાક

9. 15 કલાક, 25 કલાક

10. પેસેન્જર ટ્રેનની ઝડપ = 33 કિમી/કલાક

    એક્સપ્રેસ ટ્રેનની ઝડપ = 44 કિમી/કલાક

11. 18 મી, 12 મી

સ્વાધ્યાય 4.4

1. (i) વાસ્તવિક ઉકેલ અસ્તિત્વ ધરાવતા નથી. (ii) સમાન ઉકેલ ; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

   (iii) ભિન્ન ઉકેલ ; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3. હા. 40 મી, 20 મી **4.** ના **5.** હા, 20 મી, 20 મી

સ્વાધ્યાય 5.1

1. (i) હા. 15, 23, 31, ... સમાંતર શ્રેણી રચે છે. દરેક અનુગામી પદ પૂરોગામી પદમાં 8 ઉમેરતાં મળે છે.

   (ii) ના. કદ V, $\frac{3V}{4}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$V, ...

   (iii) હા. 150, 200, 250,... સમાંતર શ્રેણી રચે છે.

(iv) ના. મુદ્દલ $10000\left(1+\frac{8}{100}\right)$, $10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$, $10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$, ...

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) –2, –2, –2, –2, (iii) 4, 1, –2, –5 (iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) –1.25, –1.50, –1.75, –2.0

3. (i) $a = 3, d = -2$ (ii) $a = -5, d = 4$ (iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6, d = 1.1$

4. (i) ના (ii) હા, $d = \frac{1}{2}$; $4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) હા, $d = -2$; –9.2, –11.2, –13.2 (iv) હા, $d = 4$; 6, 10, 14

(v) હા, $d = \sqrt{2}$; $3 + 4\sqrt{2}$, $3 + 5\sqrt{2}$, $3 + 6\sqrt{2}$ (vi) ના

(vii) હા, $d = -4$; – 16, – 20, – 24 (viii) હા, $d = 0$; $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) ના (x) હા, $d = a$; $5a, 6a, 7a$

(xi) ના (xii) હા, $d = \sqrt{2}$; $\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) ના (xiv) ના (xv) હા, $d = 24$; 97, 121, 145

સ્વાધ્યાય 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}, \boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}, \boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}, \boxed{0}, \boxed{2}, \boxed{4}$ (v) $\boxed{53}, \boxed{23}, \boxed{8}, \boxed{-7}$

4. 16 મું પદ **5.** (i) 34 (ii) 27

6. ના **7.** 178 **8.** 64

9. 5 મું પદ **10.** 1 **11.** 65 મું પદ

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22, ... **17.** છેલ્લેથી 20 મું પદ 158 છે.

18. –13, –8, –3 **19.** 11 મું વર્ષ **20.** 10

સ્વાધ્યાય 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) –8930

3. (i) $n = 16$, $S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}$, $S_{13} = 273$ (iii) $a = 4$, $S_{12} = 246$

(iv) $d = -1$, $a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}$, $a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5$, $a_n = 34$

(vii) $n = 6$, $d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7$, $a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. 12; $a = 9$, $d = 8$, $S = 636$ ને સૂત્ર $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ માં મૂકતાં, દ્વિઘાત સમીકરણ $4n^2 + 5n - 636 = 0$ મળે. તેને ઉકેલતાં, $n = -\frac{53}{4}$, 12 મળે. આ બે ઉકેલ પૈકી ફક્ત ઉકેલ 12 સ્વીકાર્ય છે.

5. $n = 16$, $d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38$, $S = 6973$ **7.** સરવાળો = 1661

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3$, $S_2 = 4$; $a_2 = S_2 - S_1 = 1$; $S_3 = 3$, $a_3 = S_3 - S_2 = -1$, $a_{10} = S_{10} - S_9 = -15$; $a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** ₹ 27750

16. ઈનામનું મૂલ્ય (₹ માં) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40 છે.

17. 234 **18.** 143 સેમી

19. 16 હાર, લાકડાના 5 પાટડા ઉપરની હારમાં મૂકવા પડે. $S = 200$, $a = 20$, $d = -1$ ને સૂત્ર $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ માં મૂકતાં, $41n - n^2 = 400$ મળે. તેને ઉકેલતાં, $n = 16, 25$ મળે. તેથી હારની સંખ્યા કાં તો 16 હોય કે, 25 હોય. $a_{25} = a + 24d = -4$ એટલે કે, 25મી હારમાં લાકડાના પાટડાની સંખ્યા -4 છે. તે સ્વીકાર્ય નથી. તેથી, $n = 25$ શક્ય નથી. $n = 16$ માટે, $a_{16} = 5$. તેથી, 16 હાર થશે અને 5 લાકડાના પાટડા ઉપરની હારમાં મૂકવા પડે.

20. 370 મી

સ્વાધ્યાય 5.4 (વૈકલ્પિક)*

1. 32 મું પદ **2.** $S_{16} = 20, 76$ **3.** 385 સેમી

4. 35 **5.** 750 મી^{3}

સ્વાધ્યાય 6.1

1. (i) સમરૂપ (ii) સમરૂપ (iii) સમબાજુ

(iv) સમાન, સમપ્રમાણમાં **3.** ના

સ્વાધ્યાય 6.2

1. (i) 2 સેમી (ii) 2.4 સેમી

2. (i) ના (ii) હા (iii) હા

9. O માંથી AD અને BCને અનુક્રમે E અને F માં છેદતી DC ને સમાંતર રેખા દોરો.

સ્વાધ્યાય 6.3

1. (i) હા, ખૂખૂખૂ, Δ ABC ~ Δ PQR (ii) હા, બાબાબા, Δ ABC ~ Δ QRP

(iii) ના (iv) હા, બાખૂબા, Δ MNL ~ Δ QPR

(v) ના (vi) હા, ખૂખૂ, Δ DEF ~ Δ PQR

2. 55°, 55°, 55°

14. AD = DE થાય તે રીતે AD ને બિંદુ E સુધી લંબાવો અને PM = MN થાય તે રીતે PM ને N સુધી લંબાવો. EC અને NR જોડો.

15. 42 મી

સ્વાધ્યાય 6.4

1. 11.2 સેમી **2.** 4 : 1 **5.** 1 : 4 **8.** C **9.** D

સ્વાધ્યાય 6.5

1. (i) હા, 25 સેમી (ii) ના (iii) ના (iv) હા, 13 સેમી

6. $a\sqrt{3}$ **9.** 6 મી **10.** $6\sqrt{7}$ મી **11.** $300\sqrt{61}$ કિમી

12. 13 મી **17.** C

સ્વાધ્યાય 6.6 (વૈકલ્પિક)*

1. R માંથી SP ને સમાંતર રેખા લંબાવેલ QP ને T માં છેદે છે. PT = PR સાબિત કરો.

6. આ સ્વાધ્યાયના પ્રશ્ન 5ના પરિણામ (iii) નો ઉપયોગ કરો.

7. 3 મી, 2.79 મી

સ્વાધ્યાય 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$

2. 39; 39 કિમી **3.** ના **4.** હા

5. ચંપા સાચી છે.

6. (i) ચોરસ (ii) ચતુષ્કોણ નથી (iii) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ

7. (–7, 0) **8.** –9, 3 **9.** ± 4, QR = $\sqrt{41}$, PR = $\sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$

10. $3x + y - 5 = 0$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. (1, 3) **2.** $\left(2, -\frac{5}{3}\right)$; $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$

3. $\sqrt{61}$ મી, 5 માં ક્રમાંકની રેખા 22.5 મી અંતરે **4.** 2 : 7

5. 1: 1; $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ **6.** $x = 6, y = 3$ **7.** (3, –10)

8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ **9.** $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$, (0, 5), $\left(1, \frac{13}{2}\right)$ **9.** 24 ચો એકમ

સ્વાધ્યાય 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ ચો એકમ (ii) 32 ચો એકમ

2. (i) $k = 4$ (ii) $k = 3$

3. 1 ચો એકમ, 1 : 4 **4.** 28 ચો એકમ

સ્વાધ્યાય 7.4 (વૈકલ્પિક)*

1. 2 : 9 **2.** $x + 3y - 7 = 0$ **3.** (3, – 2) **4.** (1, 0), (1, 4)

5. (i) AD અને AB ને યામાક્ષો લેતાં, (4, 6), (3, 2), (6, 5)

(ii) CB અને CD ને યામાક્ષો લેતાં, (12, 2), (13, 6), (10, 3); $\frac{9}{2}$ ચો. એકમ, $\frac{9}{2}$ ચો. એકમ; બંને વિકલ્પમાં ક્ષેત્રફળ સમાન છે.

6. $\frac{15}{32}$ ચો એકમ; 1 : 16

7. (i) D $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (ii) P $\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(iii) Q $\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$, R $\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$ (iv) P, Q, R સંપાતી બિંદુઓ છે.

(v) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ **8.** સમબાજુ ચતુષ્કોણ

સ્વાધ્યાય 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}$, $\cos C = \frac{7}{25}$

2. 0 **3.** $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$

4. $\sin A = \frac{15}{17}$, $\sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin \theta = \frac{5}{13}$, $\cos \theta = \frac{12}{13}$, $\tan \theta = \frac{5}{12}$, $\cot \theta = \frac{12}{5}$, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$ **8.** હા

9. (i) 1 (ii) 0 **10.** $\sin P = \frac{12}{13}$, $\cos P = \frac{5}{13}$, $\tan P = \frac{12}{5}$

11. (i) અસત્ય (ii) સત્ય (iii) અસત્ય (iv) અસત્ય (v) અસત્ય

સ્વાધ્યાય 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ (iv) $\dfrac{43-24\sqrt{3}}{11}$ (v) $\dfrac{67}{12}$

2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C **3.** $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$

4. (i) અસત્ય (ii) સત્ય (iii) અસત્ય (iv) અસત્ય (v) સત્ય

સ્વાધ્યાય 8.3

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 0

3. $\angle A = 36°$ **5.** $\angle A = 22°$ **7.** $\cos 23° + \sin 15°$

સ્વાધ્યાય 8.4

1. $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\sec A = \dfrac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \dfrac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$, $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$, $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

   $\cot A = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$, $\operatorname{cosec} A = \dfrac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

3. (i) 1 (ii) 1 **4.** (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

સ્વાધ્યાય 9.1

1. 10 મી **2.** $8\sqrt{3}$ મી **3.** 3 મી, $2\sqrt{3}$ મી **4.** $10\sqrt{3}$ મી

5. $40\sqrt{3}$ મી **6.** $19\sqrt{3}$ મી **7.** $20(\sqrt{3}-1)$ મી **8.** $0.8(\sqrt{3}+1)$ મી

9. $16\frac{2}{3}$ મી **10.** $20\sqrt{3}$ મી, 20 મી, 60 મી **11.** $10\sqrt{3}$ મી, 10 મી

12. $7(\sqrt{3}+1)$ મી **13.** $75(\sqrt{3}-1)$ મી **14.** $58\sqrt{3}$ મી

15. 3 સેકન્ડ

સ્વાધ્યાય 10.1

1. અસંખ્ય

2. (i) એક (ii) છેદિકા (iii) બે (iv) સ્પર્શબિંદુ **3.** D

સ્વાધ્યાય 10.2

1. A **2.** B **3.** A **6.** 3 સેમી

7. 8 સેમી **12.** AB = 15 સેમી, AC = 13 સેમી

સ્વાધ્યાય 12.1

1. 28 સેમી **2.** 10 સેમી

3. સોનેરી : 346.5 સેમી^{2}; લાલ : 1039.5 સેમી^{2}; વાદળી : 1732.5 સેમી^{2}; કાળો : 2425.5 સેમી^{2};
સફેદ : 3118.5 સેમી^{2}

4. 4375 **5.** A

સ્વાધ્યાય 12.2

1. $\frac{132}{7}$ સેમી^{2} **2.** $\frac{77}{8}$ સેમી^{2} **3.** $\frac{154}{3}$ સેમી^{2}

4. (i) 28.5 સેમી^{2} (ii) 235.5 સેમી^{2}

5. (i) 22 સેમી (ii) 231 સેમી^{2} (iii) $\left(231-\frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ સેમી^{2}

6. 20.4375 સેમી^{2} ; 686.0625 સેમી^{2} **7.** 88.44 સેમી^{2}

8. (i) 19.625 મી^{2} (ii) 58.875 સેમી^{2} **9.** (i) 285 મિમી (ii) $\frac{385}{4}$ મિમી^{2}

10. $\frac{22275}{28}$ સેમી^{2} **11.** $\frac{158125}{126}$ સેમી^{2}

12. 189.97 કિમી^{2} **13.** ₹ 162.68 **14.** D

સ્વાધ્યાય 12.3

1. $\frac{4523}{28}$ સેમી^{2} **2.** $\frac{154}{3}$ સેમી^{2} **3.** 42 સેમી^{2}

4. $\left(\frac{660}{7}+36\sqrt{3}\right)$ સેમી^{2} **5.** $\frac{68}{7}$ સેમી^{2} **6.** $\left(\frac{22528}{7}-768\sqrt{3}\right)$ સેમી^{2}

7. 42 સેમી^{2} **8.** (i) $\frac{2804}{7}$ મી (ii) 4320 મી^{2}

9. 66.5 સેમી^{2} **10.** 1620.5 સેમી^{2} **11.** 378 સેમી^{2}

12. (i) $\frac{77}{8}$ સેમી^{2} (ii) $\frac{49}{8}$ સેમી^{2} **13.** 228 સેમી^{2}

14. $\frac{308}{3}$ સેમી^{2} **15.** 98 સેમી^{2} **16.** $\frac{256}{7}$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.1

1. 160 સેમી^{2} **2.** 572 સેમી^{2} **3.** 214.5 સેમી^{2}

4. મોટામાં મોટો વ્યાસ = 7 સેમી, પૃષ્ઠફળ = 332.5 સેમી^{2}

5. $\frac{1}{4}\, l^2\, (\pi + 24)$ **6.** 220 મી^{2} **7.** 44 મી^{2}, ₹ 22000

8. 18 સેમી^{2} **9.** 374 સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.2

1. π સેમી^{3}
2. 66 સેમી^{3} નમૂનાની અંદરની હવાનું કદ = (શંકુ + નળાકાર + શંકુ)ની અંદરની હવાનું કદ

$= \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right)$ અહીં, r શંકુ અને નળાકારની ત્રિજ્યા છે. h_1 શંકુની ઊંચાઈ (લંબાઈ) અને h_2 નળાકારની ઊંચાઈ (લંબાઈ) છે.

માંગેલ કદ $= \frac{1}{3}\pi r^2\ (h_1 + 3h_2 + h_1)$

3. 338 સેમી^{3} **4.** 523.53 સેમી^{3} **5.** 100 **6.** 892.26 કિગ્રા
7. 1.131 મી^{3} (આશરે) **8.** સત્ય નથી. સાચો જવાબ 346.51 સેમી^{3} છે.

સ્વાધ્યાય 13.3

1. 2.74 સેમી **2.** 12 સેમી **3.** 2.5 મી
4. 1.125 મી **5.** 10 **6.** 400
7. 36 સેમી ; $12\sqrt{13}$ સેમી **8.** 562500 મી^{2} ; અથવા 56.25 હેક્ટર **9.** 100 મિનિટ

સ્વાધ્યાય 13.4

1. $102\frac{2}{3}$ સેમી^{3} **2.** 48 સેમી^{2} **3.** $710\frac{2}{7}$ સેમી^{2}
4. દૂધનો ખર્ચ ₹ 209 અને ધાતુની શીટનો ખર્ચ ₹ 156.75 **5.** 7964.4 મી

સ્વાધ્યાય 13.5 (વૈકલ્પિક)*

1. 1257.14 સેમી; 789 ગ્રા (લગભગ) **2.** 30.14 સેમી^{3}; 52.75 સેમી^{2}
3. 1792 **4.** $782\frac{4}{7}$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 14.1

1. 8.1 છોડ. આપણે પ્રત્યક્ષ રીતનો ઉપયોગ કર્યો છે. કારણ કે x_i અને f_i નું સંખ્યાત્મક મૂલ્ય નાનું છે.
2. ₹ 545.20 **3.** $f = 20$ **4.** 75.9
5. 57.19 **6.** ₹ 211 **7.** 0.099 ppm
8. 12.38 દિવસો **9.** 69.43 %

સ્વાધ્યાય 14.2

1. બહુલક = 36.8 વર્ષ, મધ્યક = 35.37 વર્ષ, હૉસ્પિટલમાં દાખલ થયેલા મહત્તમ દર્દીઓની ઉંમર 36.8 વર્ષ હતી. જ્યારે, હૉસ્પિટલમાં દાખલ થયેલા દર્દીઓની સરેરાશ ઉંમર 35.37 વર્ષ હતી
2. 65.625 કલાક
3. બહુલકીય માસિક ખર્ચ = ₹ 1847.83
   માસિક સરેરાશ ખર્ચ = ₹ 2662.5
4. બહુલક = 30.6, મધ્યક = 29.2, મોટા ભાગનાં રાજ્યો / કેન્દ્ર શાસિત પ્રદેશમાં વિદ્યાર્થી શિક્ષક ગુણોત્તર 30.6 છે અને આ ગુણોત્તરની સરેરાશ 29.2 છે.

5. બહુલક = 4608.7 રન

6. બહુલક = 44.7 ગાડી

સ્વાધ્યાય 14.3

1. મધ્યસ્થ = 137 એકમ, મધ્યક = 137.05 એકમ; બહુલક = 135.76 એકમ

આમ, ત્રણેય વિકલ્પમાં લગભગ સમાન છે.

2. $x = 8$, $y = 7$

3. મધ્યસ્થ ઉંમર = 35.76 વર્ષ

4. મધ્યસ્થ લંબાઈ = 146.75 મીમી

5. મધ્યસ્થ આયુષ્ય = 3406.98 કલાક

6. મધ્યસ્થ = 8.05, મધ્યક = 8.32, બહુલકીય કદ = 7.88

7. મધ્યસ્થ વજન = 56.67 કિગ્રા.

સ્વાધ્યાય 14.4

1.

દૈનિક આવક (₹ માં)	સંચયી આવૃત્તિ
120 થી ઓછી	12
140 થી ઓછી	26
160 થી ઓછી	34
180 થી ઓછી	40
200 થી ઓછી	50

બિંદુઓ (120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) અને (200, 50) નું આલેખન કરી ઓજીવ દોરો.

2. બિંદુઓ (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32) અને (52, 35) નું આલેખન કરી ઓજીવ દોરો. અહીં, $\frac{n}{2} = 17.5$. જેનો y યામ 17.5 હોય તે બિંદુ ઓજીવ પર દર્શાવો. આ બિંદુનો x યામ મધ્યસ્થ થશે. જે 46.5 છે.

3.

ઉત્પાદન (કિગ્રા/હે)	સંચયી આવૃત્તિ
50 કે તેથી વધારે	100
55 કે તેથી વધારે	98
60 કે તેથી વધારે	90
65 કે તેથી વધારે	78
70 કે તેથી વધારે	54
75 કે તેથી વધારે	16

હવે, બિંદુઓ (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54) અને (75, 16) નું આલેખન કરી ઓજીવ દોરો.

સ્વાધ્યાય 15.1

1. (i) 1 (ii) 0, અશક્ય ઘટના (iii) 1, ચોક્કસ ઘટના

(iv) 1 (v) 0, 1

2. પ્રયોગ (iii) અને (iv) નાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

3. આપણે જ્યારે સિક્કો ઉછાળીએ છીએ, ત્યારે છાપ અને કાંટો એ એકસમાન રીતે મળે છે. તેથી સિક્કો ઉછાળવાનાં વ્યક્તિગત પરિણામો વિશે આગાહી થઈ ન શકે.

4. B **5.** 0.95 **6.** (i) 0 (ii) 1

7. 0.008 **8.** (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ **10.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

11. (i) $\frac{5}{13}$ **12.** (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

13. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{1}{4}$ (b) 0 **16.** $\frac{11}{12}$

17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ **18.** (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.** (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

22. (i)

બે પાસા પરનો સરવાળો	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
સંભાવના	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) ના, અગિયાર સરવાળા સમસંભાવી નથી.

23. $\frac{3}{4}$: સંભવિત પરિણામો : HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH

અહીં, THH નો અર્થ પહેલી વખત ઉછાળતાં કાંટો, બીજી વખત ઉછાળતાં છાપ અને ત્રીજી વખત ઉછાળતાં છાપ આ પ્રમાણે.

24. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25. (i) ખોટું, આપણે પરિણામોને આ પ્રમાણે વર્ગીકૃત કરી શકીએ, પરંતુ, તે સમસંભાવી નથી. તેનું કારણ એ છે કે, દરેક પૈકી એક પરિણામ બે રીતે મળે છે. જેમ કે, પહેલા સિક્કા પર છાપ અને બીજા સિક્કા પર કાંટો અથવા પહેલા સિક્કા પર કાંટો અને બીજા સિક્કા પર છાપ મળે છે. તેથી, બે છાપ (અથવા બે કાંટા) મળે તેના કરતાં આની સંભાવના બમણી થાય.

(ii) સત્ય, પ્રશ્નમાં વિચારેલ પરિણામો સમસંભાવી છે.

સ્વાધ્યાય 15.2 (વૈકલ્પિક)

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{4}{5}$

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. 10 **4.** $\frac{x}{12}$, $x = 3$ **5.** 8

સ્વાધ્યાય A 1.1

1. (i) સંદિગ્ધ (ii) સત્ય (iii) સત્ય (iv) સંદિગ્ધ (v) સંદિગ્ધ

2. (i) સત્ય (ii) સત્ય (iii) અસત્ય (iv) સત્ય (v) સત્ય

3. ફક્ત (ii) સત્ય છે.

4. (i) જો $a > 0$ અને $a^2 > b^2$, તો $a > b$

(ii) જો $xy \geq 0$ અને $x^2 = y^2$, તો $x = y$

(iii) જો $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ અને $y \neq 0$, તો $x = 0$

(iv) સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે.

સ્વાધ્યાય A 1.2

1. A મૃત્યુને અધીન છે. **2.** *ab* સંમેય છે.

3. $\sqrt{17}$ નું દશાંશ નિરુપણ અનંત અનાવૃત્ત છે.

4. $y = 7$ **5.** $\angle A = 100°$, $\angle C = 100°$, $\angle D = 80°$

6. PQRS એક લંબચોરસ છે.

7. હા, પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞાને કારણે. ના, કારણ કે $\sqrt{3721} = 61$ અસંમેય નથી.
પ્રમેયની પ્રતિજ્ઞા અસત્ય હોવાને કારણે તારણ અસત્ય છે.

સ્વાધ્યાય A 1.3

1. કોઈક પૂર્ણાંક n માટે બે ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાઓ $2n + 1$ અને $2n + 3$ લો.

સ્વાધ્યાય A 1.4

1. (i) મનુષ્ય મૃત્યુને અધીન નથી.

(ii) રેખા l રેખા m ને સમાંતર નથી.

(iii) આ પ્રકરણમાં બહુ સ્વાધ્યાય નથી.

(iv) બધા જ પૂર્ણાંકો સંમેય છે એવું નથી.

(v) બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ છે તેમ નથી.

(vi) કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ આળસુ છે.

(vii) બધી બિલાડીઓ કાળી છે.

(viii) $\sqrt{x} = -1$ થાય તેવી, ઓછામાં ઓછી એક એવી વાસ્તવિક સંખ્યા x મળે.

(ix) પૂર્ણાંક સંખ્યા a એ 2 વડે વિભાજ્ય નથી.

(x) પૂર્ણાંકો a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય નથી.

2. (i) હા (ii) ના (iii) ના (iv) ના (v) હા

સ્વાધ્યાય A 1.5

1. (i) જો શરણને ખૂબ પરસેવો વળે, તો ટોકિયોમાં ગરમી હોય.

(ii) જો શાલિનીના પેટમાં બિલાડાં બોલતા હોય, તો તે ભૂખી હોય.

(iii) જો જશવંત ડિગ્રી મેળવી શકે, તો તેને શિષ્યવૃત્તિ મળે.

(iv) જો છોડ જીવંત હોય, તો તેને ફૂલો આવે.

(v) જો કોઈ પ્રાણીને પૂંછડી હોય, તો તે બિલાડી છે.

2. (i) જો ત્રિકોણ ABC ના આધાર ખૂણાઓ સમાન હોય, તો તે સમદ્વિબાજુ છે. સત્ય

(ii) જો કોઈ પૂર્ણાંકનો વર્ગ અયુગ્મ હોય, તો તે પૂર્ણાંક અયુગ્મ છે. સત્ય

(iii) જો $x = 1$, તો $x^2 = 1$. સત્ય

(iv) જો AC અને BD એકબીજાને દુભાગે, તો ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. સત્ય

(v) જો $a + (b + c) = (a + b) + c$, તો a, b અને c પૂર્ણ સંખ્યા છે. અસત્ય.

(vi) જો $x + y$ યુગ્મ હોય, તો x અને y અયુગ્મ છે. અસત્ય.

(vii) જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લંબચોરસ હોય, તો તેનાં શિરોબિંદુઓ વર્તુળ પર છે. સત્ય

સ્વાધ્યાય A 1.6

1. ધારણા $b \le d$ ધારી વિરોધાભાસ મેળવો.

3. જુઓ, પ્રકરણ 1નું ઉદાહરણ 10

6. જુઓ, ધોરણ IX ગણિત પાઠ્યપુસ્તકનું પ્રમેય 5.1

સ્વાધ્યાય A 2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160

2. 1 સેમી^{2} વિસ્તાર લો. તેમાં રહેલા ટપકાંની સંખ્યા ગણો. વૃક્ષોની કુલ સંખ્યા એ ટપકાંની સંખ્યા અને ક્ષેત્રફળ (સેમી^{2}) નો ગુણાકાર થશે.

3. હપતા પદ્ધતિમાં વ્યાજનો દર 17.74 % છે અને તે 18 ટકાથી ઓછો છે.

સ્વાધ્યાય A 2.3

1. વિદ્યાર્થીઓ પોતાના જવાબ શોધશે.

■ ■ ■