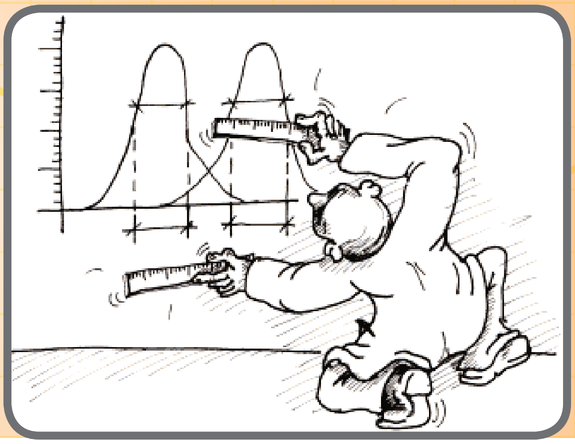
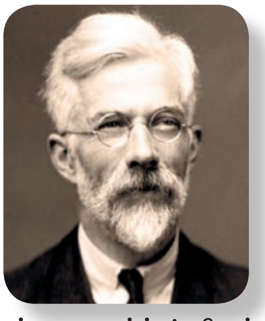
அத்தியாயம்

3 மாதிரிப்பரவல் அடிப்படையிலான சோதனைகள் II





சர். ரொனால்ட். A. பிஷர்
1890–1962

சர் ரொனால்ட் ஏ. ஃபிஷர் பிரிட்டனைச் சேர்ந்த புள்ளியியலாளரும், மரபியலாளருமாக விளங்கியவர் ஆவார். அவர் நவீன புள்ளியியல் அறிவியலுக்கு, தனிமனிதனாக அடித்தளம் அமைத்தவராகவும், 20ஆம் நூற்றாண்டின் மிகச்சிறந்த புள்ளியியல் மேதையாகவும் அறியப்படுகிறார். மரபியலில், மெண்டலின் மரபியல் கருத்துகளையும், இயல்பாகத் தெரிவு செய்யும் முறைகளையும் கணிதமுறையில், இணைத்து உருவாக்கிய இவரது ஆய்வுகள், 20ஆம் நூற்றாண்டின் தொடக்கத்தில டார்வினின் பரிமாணக் கொள்கையில் திருத்தம் மேற்கொள்ளும் பணிக்கு நல்ல பங்களிப்பை நல்கியுள்ளன.

"இயல்பாகத் தெரிவுசெய்தல் எனும் செயல்நுட்பம், பொருத்தமில்லாததையும் அதிக அளவில் தெரிவுசெய்து உருவாக்கிடும் வாய்ப்பைப் பெற்றுவிடும்".

"ஒரு சோதனையை முடித்தபின்பே, அச்சோதனை செய்வதற்கான காலநேரத்தைச் சரியாகத் திட்டமிட்டுக்கொள்வது சிறந்த செயலாகக் கருதப்படும்".

"மாறுபாட்டுப்பகுப்பாய்வியல் என்பது ஒரு கணித கோட்பாட்டின்படி அமைந்துள்ளது என்று கூறுவதைவிட, நம்வசதிக்கேற்ப தரவுகளை கணித முறைப்படி வரிசைப்படுத்தி அவற்றின் வேறுபடும் பண்புகளை அறிந்து கொள்ளும் வழிமுறை என்று கூறலாம்".

கற்றல் குறிக்கோள்கள்

- ❖ இரண்டு முழுமைத் தொகுதி மாறுபாடுகளை ஒப்பிடல்
- ❖ மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சராசரிகளைச் சோதனை செய்யும் கருதுகோள் சோதனையைப் புரிந்து கொள்ளுதல்
- ❖ நடத்துமுறைகள் மற்றும் தொகுதிகளை வேறுபடுத்துதல்
- ❖ ஒரு வழி மற்றும் இரு வழி மாறுபாட்டுப்பகுப்பாய்வினை வேறுபடுத்துதல்
- ❖ நடத்துமுறைகள் மற்றும் தொகுதிகளின் F விகிதத்தை கணக்கிடல்
- ❖ கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு மற்றும் அட்டவணை மதிப்பினை ஒப்பிட்டு முடிவெடுத்தல்

A52EU6

அறிமுகம்

முந்தைய பாடப்பகுதிகளில் முழுமைத்தொகுதி சராசரி தொடர்பான கருதுகோள் சோதனையில் பயன்படுத்தப்பட்ட கருத்துகள் மற்றும் கணக்குகளைப் பற்றி விவாதித்தோம். நடைமுறையில் முழுமைத்தொகுதி சராசரி மற்றும் விகிதம் தொடர்பான முடிவெடுத்தல் மட்டுமல்லாமல் முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டினைப் பற்றி விவாதிப்பதும் அவசியமாகிறது. இப்பாடப்பகுதியில் நாம் (i) இரு முழுமைத்தொகுதி மாறுபாட்டின் சமத்தன்மையை சோதித்தல் (ii) ஒரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு மற்றும் (iii) இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு ஆகியவற்றைப் பற்றி அறிந்துகொள்வோம்.

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 84 1/28/2020 6:41:34 PM

3.1 F–பரவல் மற்றும் அதன் பயன்பாடுகள்

F-மாதிரிபண்பளவையானது (F-Statistic), இரு மாதிரிகளின் சராசரிகளிலிருந்து வித்தியாசப்படும் உறுப்புகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்களால் அமையும் விகிதமாகும். இம்மாதிரிபண்பளவையின் பரவல், F-பரவல் எனப்படும்.

வரையறை: *F*-பரவல்

X மற்றும் Y என்பன முறையே m மற்றும் n கட்டின்மை கூறுகளைக் கொண்ட இரு சார்பற்ற χ^2 மாறிகள் எனில், என்பது (m, n) கட்டின்மை கூறுகளைக் கொண்ட F-பரவலாகும். $F = \dfrac{X/m}{Y/n}$ என்பது (m, n) கட்டின்மை கூறுகளைக் கொண்ட F-பரவலாகும். மேலும் இப்பரவல் சிறந்த புள்ளியியலாளர் R.A. பிஷரின் (1890-1962) பெயரால் F-பரவல் என அழைக்கப்படுகிறது.

வரையறை: *F*-மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ மற்றும் $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ என்பன முறையே $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ மற்றும் $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ ஆகிய முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து பெறப்பட்ட சார்பற்ற வாய்ப்பு மாதிரிகள் எனில்,

$$\frac{1}{\sigma_X^2}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sim \chi^2_{m-1} \text{ மற்றும் } \frac{1}{\sigma_Y^2}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \overline{Y}\right)^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

ஆகியவை சார்பற்றவையாகும்.

(1) F-மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையின் வரையறையானது

$$F = \frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \Bigg/ \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim F_{m-1,n-1}$$

இங்கு,

$$S_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, \quad S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \overline{Y}\right)^2$$

குறிப்பு

முழுமைத் தொகுதி இயல்நிலையாக இல்லை எனில் F-சோதனையை பயன்படுத்த முடியாது.

இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி மாறுபாடுகளுக்கிடையேயான சோதனைக்குரிய அனுமானங்கள்

i) மாதிரிகள் இயல்நிலைப் பரவலைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து மட்டுமே எடுக்கப்பட்டிருக்க வேண்டும்.

ii) மாதிரிகள் ஒன்றையொன்று சாராதவையாக இருக்கவேண்டும்..

(2) F-மாதிரிபண்பளவை, இரு சராசரி வர்க்கப் பிழைகளின் விகிதம் எனவும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

***F*-பரவலின் பயன்பாடுகள்**

H_0 இன் படி மாதிரிப்பண்பளவையின் மாதிரிப்பரவல் F-பரவலாகும். அதன் சில முக்கிய பயன்பாடுகள் சிலவற்றைக் கீழ்க்காண்போம்.

(i) இரு இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதிகளின் மாறுபாட்டின் சமத்தன்மையை சோதித்தல். [(1) ஐப் பயன்படுத்துக]

(ii) k (>2) இயல்நிலை முழுமைத்தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவையா என சோதித்தல். [(2) ஐப் பயன்படுத்துக]

(iii) மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வினை மேற்கொள்ளல். [(2) ஐப் பயன்படுத்துக]

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 85 1/28/2020 6:41:35 PM

3.2 இரண்டு முழுமைத்தொகுதிகளின் மாறுபாட்டு அளவைகளுக்கிடையேயான வித்தியாசத்திற்கான சோதனை

சோதனைக்கான வழிமுறைகள்

$N(\mu_X, \sigma_X^2)$ மற்றும் $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ என்ற இரண்டு சார்பற்ற இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபாட்டு அளவைகளை இச்சோதனை ஒப்பிடுகிறது.

படி 1 : கருதுகோள்கள் (Hypotheses)

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டு அளவைகளுக்கிடையே வித்தியாசம் இல்லை.

மாற்று கருதுகோள் கீழ்க்கண்டவற்றுள் ஏதுவான ஒன்றினை தேர்ந்தெடுக்கவேண்டும்.

(i) $H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$ (ii) $H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$ (iii) $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

படி 2 : தரவு (Data from sample)

$X_1, X_2,\ldots, X_m$ மற்றும் $Y_1, Y_2,\ldots, Y_n$ என்பன முறையே இரு சார்பற்ற n_1 மற்றும் n_2 எண்ணிக்கைகொண்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரிகள் ஆகும்.

படி 3 : மிகைகாண் நிலை (Level of significance) α

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை (Test statistic)

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$ இன்மை கருதுகோள் H_0–இன் படி மாதிரிப்பரவலானது $F_{(m-1,\, n-1)}$.

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல் (Calculation of test statistic)

மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை $F_0 = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்புகள் (Critical values)

H_1	$\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$
தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்புகள் f_e (Critical values)	$f_{(m-1,\, n-1),1-\alpha}$	$f_{(m-1,\, n-1),\, \alpha}$	$f_{(m-1,\, n-1),1-\alpha/2}$ மற்றும் $f_{(m-1,\, n-1),\, \alpha/2}$

படி 7 : முடிவு (Decision)

H_1	$\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$	$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$
மறுக்கும் விதி (Rejection Rule)	$F_0 \leq f_{(m-1,\, n-1),\, 1-\alpha}$	$F_0 \geq f_{(m-1,\, n-1),\, \alpha}$	$F_0 \leq f_{(m-1,\, n-1),\, 1-\alpha/2}$ அல்லது $F_0 \geq f_{(m-1,\, n-1),\, \alpha/2}$

குறிப்பு 1: $f_{(m-1,\; n-1),\; 1-\alpha}$ F-அட்டவணையில் கொடுக்கப்படாததால், இதனை $f_{(n-1,\; m-1),\alpha}$இன் தலைகீழியாக கணக்கிடலாம்.

அதாவது $$f_{(m-1,\, n-1),\, 1-\alpha} = \frac{1}{f_{(n-1,\, m-1),\, \alpha}}$$

குறிப்பு 2: F-சோதனை மாறுபாட்டின் விகிதத்தைப் பொறுத்து அமைவதால் இதனை மாறுபாட்டு விகித சோதனை என்கிறோம்.

குறிப்பு 3: μ_X மற்றும் μ_Y இன் மதிப்புகள் தெரிந்த நிலையில், இரு இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபாட்டு அளவைககள் சமமானவையா என சோதிப்பதற்கான மாதிரிபண்பளவையானது,

$$F = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_X)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_Y)^2}$$ மற்றும் H_0 இன் படி $F_{m,\,n}$ பரவலைத் தழுவுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

9 மற்றும் 8 எண்ணிக்கையுடைய மாதிரிகளின் சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் முறையே 160 அங்குலம்^{2} மற்றும் 91 அங்குலம்^{2} எனில் இரு மாதிரிகளும் ஒரே மாறுபாட்டு அளவையைக் கொண்ட இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை எனக் கொள்ளலாமா?

தீர்வு:

படி 1 : கருதுகோள் அமைத்தல்

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \sigma_X^{\,2} = \sigma_Y^{\,2}$

முழுமைத்தொகுதி மாறுபாட்டுஅளவைகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கது இல்லை.

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \sigma_X^{\,2} \neq \sigma_Y^{\,2}$

முழுமைத் தொகுதி மாறுபாடுகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கது.

படி 2 : தரவு

$m = 9, n = 8$

$$\sum_{i=1}^{9}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 160 \qquad \sum_{j=1}^{8}\left(y_j - \bar{y}\right)^2 = 91$$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 10\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை $F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல்

$$s_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \text{ மற்றும் } s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y}\right)^2$$

$$s_X^2 = \frac{160}{8} = 20 \qquad s_Y^2 = \frac{91}{7} = 13$$

$$F_0 = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = \frac{20}{13} = 1.54$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

H_1 ஆனது இரு முனை மாற்று கருதுகோள், எனவே ஒத்த தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்புகளானது.

$$f_{(8,\,7),0.05} = 3.73 \text{ மற்றும் } f_{(8,\,7),0.95} = \frac{1}{f_{(7,8),0.05}} = \frac{1}{3.5} = 0.286$$

படி 7 : முடிவு

$f_{(8,\,7),0.95} = 0.286 < F_0 = 1.54 < f_{(8,\,7),0.05} = 3.73,$ இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்படுவதற்கான ஆதாரம் இல்லை மற்றும் முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டு அளவைகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கது இல்லை எனலாம்.

குறிப்பு 4: $\alpha = 0.05$–ல் F–இன் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்புகள் 0.025 மற்றும் 0.975–ல் கண்டறியப்படவேண்டும் அவை அட்டவணையில் கிடைக்கப்பெறாததால் α–இன் மதிப்பு 0.1 என இந்த எடுத்துக்காட்டில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 3.2

ஒரு மருத்துவ ஆராய்ச்சியாளர் புகைபிடிப்பவர்களின் இருதயத் துடிப்பின் மாறுபாட்டை (துடிப்பு/நிமிடம்) விட புகைபிடிக்காதவர்களின் இருதயத் துடிப்பின் மாறுபாடு (துடிப்பு/நிமிடம்) அதிகமாக உள்ளதா என அறிய விரும்புகிறார். அவர் சேகரித்த இரு தரவு மாதிரிகள் கீழ்க்கண்டவாறு. $\alpha = 0.05$, என்பதைப் பயன்படுத்தி மருத்துவ ஆராய்ச்சியாளரின் கூற்றினை ஏற்றுக்கொள்ள போதுமான சான்று உள்ளதா எனக்காண்.

புகைபிடிப்பவர்கள்	புகை–பிடிக்காதவர்கள்
$m = 25$	$n = 18$
$s_1^2 = 36$	$s_2^2 = 10$

தீர்வு:

படி 1 : கருதுகோள் அமைத்தல்

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \sigma_1^{\ 2} = \sigma_2^{\ 2}$

முழுமைத்தொகுதிகளின் மாறுபாட்டுஅளவைகளுக்கிடையே எந்த வித்தியாசமும் இல்லை

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \sigma_1^{\ 2} > \sigma_2^{\ 2}$

புகைப்பிடிப்பவர்களின் இதயதுடிப்பு புகை பிடிக்காதவர்களின் இதயதுடிப்பைவிட அதிகம்

படி 2 : தரவு

புகைபிடிப்பவர்கள்	புகை–பிடிக்காதவர்கள்
$m = 25$	$n = 18$
$s_1^2 = 36$	$s_2^2 = 10$

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல்

$$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{36}{10} = 3.6$$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

$$f_{(m\text{-}1,n\text{-}1),0.05} = f_{(24,17),0.05} = 2.19$$

படி 7 : முடிவு

$F_0 = 3.6 > f_{(24,17),0.05} = 2.19$ எனவே இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. இதிலிருந்து புகைபிடிப்பவர்களின் இருதய துடிப்பின் மாறுபாடானது புகை பிடிக்காதவர்களின் இருதய துடிப்பின் மாறுபாட்டைவிட அதிகம் எனலாம்.

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 88 1/28/2020 6:41:40 PM

எடுத்துக்காட்டு 3.3

பள்ளி A மற்றும் B யிலிருந்து வாய்ப்புமுறையில் பெறப்பட்ட மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு

பள்ளி A	63	72	80	60	85	83	70	72	81
பள்ளி B	86	93	64	82	81	75	86	63	63

பள்ளி A மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் மாறுபாட்டு அளவை, பள்ளி B மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் மாறுபாட்டு அளவையை விடக் குறைவானதா? $\alpha = 5\%$ என்க.

தீர்வு:

தொகுப்பு A மற்றும் தொகுப்பு B இரண்டும் ஒன்றையொன்று சாரா இயல்நிலைப் பரவல்கள் (அனுமானம்)

படி 1 : கருதுகோள் அமைத்தல்

இன்மை கருதுகோள் $H_1 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

முழுமைத்தொகுதிகளின் மாறுபாட்டுஅளவைகளுக்கிடையே எந்த வித்தியாசமும் இல்லை

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$

பள்ளி A யிலிருந்து பெறப்பட்ட மதிப்பெண்களின் மாறுபாட்டு அளவை பள்ளி B யிலிருந்து பெறப்பட்ட மதிப்பெண்களின் மாறுபாட்டு அளவையை விடக் குறைவானது.

படி 2 : தரவு

$X_1, X_2,\ldots, X_m$ பள்ளி A யிலிருந்து பெறப்பட்ட மாதிரிகள்

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ பள்ளி B யிலிருந்து பெறப்பட்ட மாதிரிகள்

படி 3 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$F = \frac{s_X^2}{s_Y^2}$$

$$s_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y}\right)^2$$

படி 4 : கணக்கிடும் முறை

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
63	-11	121	86	9	81
72	-2	4	93	16	256
80	6	36	64	-13	169
60	-14	196	82	5	25
85	11	121	81	4	16
83	9	81	75	-2	4
70	-4	16	86	9	81
72	-2	4	63	-14	196
81	7	49	63	-14	196
666		628	693		1024

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 89 1/28/2020 6:41:40 PM

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m} = \frac{666}{9} = 74$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{693}{9} = 77$$

$$s_X^2 = \frac{1}{9-1} \times 628 \quad = \frac{1}{8} \times 628 = 78.5$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{9-1} \times 1024 = \frac{1}{8} \times 1024 = 128$$

$$F_0 = \frac{78.5}{128} = 0.613$$

படி 5 : மிகைகாண் நிலை

$\alpha = 5\%$

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

$$f_{(9\text{-}1,9\text{-}1),0.95} = \frac{1}{f_{(8,8),0.05}} = \frac{1}{3.44} = 0.291$$

படி 7 : முடிவு

$F_0 = 0.613 > f_{(8,8),0.95} = 0.291$, இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்படுவதற்கான ஏதுவான ஆதாரம் இல்லை மேலும் பள்ளி B-யிலிருந்து பெறப்பட்ட மதிப்பெண்களுக்கிடையேயான மாறுபாட்டுஅளவையானதுபள்ளிA-யிலிருந்துபெறப்பட்டமதிப்பெண்களுக்கிடையேயான மாறுபாட்டு அளவையை விட அதிகம் எனலாம்.

3.3 மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு

பாடம் 2இல் இரு சார்பற்ற இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவையா என சிறுகூறுகளுக்கு விவாதிக்கப்பட்டது. முழுமைத்தொகுதிகளின் எண்ணிக்கை 2 ஐ விட அதிகம் எனில் இம் முறைகளைப் பயன்படுத்த இயலாது

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு ஒரே நேரத்தில் இரண்டிற்கு மேற்பட்ட முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் சமமானவையா எனக்காண பயன்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வின் மூலமாக, பலவிதமான பயிர்களின் சராசரி விளைச்சல்கள் அல்லது வெவ்வேறு வகையான கார்களின் சராசரி ஓடும் தொலைவு போன்றவற்றை ஒப்பிட்டுக் காணலாம்.

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வினை எல்லா சூழ்நிலையிலும், அனைத்து விதமான மாறிகளுக்கும் பயன்படுத்த இயலாது. இதைச் சில அனுமானங்களைக் கொண்டு பயன்படுத்த இயலும்.

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் பயன்படும் அனுமானங்கள்:

1. கண்டறிந்த மாதிரி மதிப்புகள் இயல்நிலைப்பரவலைப் பின்பற்றுகின்றன.
2. கண்டறிந்த மாதிரி மதிப்புகள் யாவும் சார்பற்றவை.
3. முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபாட்டு அளவைகள் (தெரியாத நிலையில்) சமம் அல்லது ஏறத்தாழ சமமானவை என அனுமானிக்கப்படுகிறது.

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 90 1/28/2020 6:41:42 PM

R.A. ஃபிஷரின் கூற்றுப்படி "மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வானது ஒரு குழு காரணங்களைச் சார்ந்த மாறுபாடுகளை மற்ற குழு (group) காரணங்களைச் சார்ந்த மாறுபாடுகளினின்று பிரித்தெடுக்கும் முறையாகும்".

ஒரு காரணியின் வெவ்வேறு நிலை அல்லது இருகாரணிகளின் வெவ்வேறு நிலையைப் பொறுத்து தரவுகள் வகைப்படுத்தப்படுகின்றன.

முதலில் கூறுப்பட்டது ஒரு வழி வகைப்படுத்தப்பட்டதரவு எனவும், பின்னர் கூறப்பட்டது இருவழி வகைப்படுத்தப்பட்டதரவு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. இவ்வகையான தரவுகளுக்குப் பயன்படுத்தப்படும் மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு முறை கீழ்க்கண்ட பகுதிகளில் விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

3.3.1 ஒரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு என்பது மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட முழுமைத் தொகுதி சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டினைக் காணப்பயன்படும் புள்ளியியல் நுட்பமாகும்.

ஒருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு, சராசரியில் ஒரு காரணி ஏற்படுத்தும் விளைவினை ஆராய்கிறது. இந்த வகை மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு k–வெவ்வேறு நிலையிலான காரணியிலிருந்து (நடத்துமுறைகள்) பெறப்பட்ட சார்பற்ற வாய்ப்பு மாதிரிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும்.

ஒருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் கீழ்க்காணும் குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்படுகிறது. தரவுகள் கீழ்க்காணும் அட்டவணை வடிவில் குறிப்பிடப்படுகின்றது.

நடத்துமுறைகள்					மொத்தம்
நடத்துமுறை 1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n_1}	$x_{1.}$
நடத்துமுறை 2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n_2}	$x_{2.}$
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
நடத்துமுறை k	x_{k1}	x_{k2}	…	x_{kn_k}	$x_{k.}$

x_{ij} - i ஆவது நடத்துமுறையின் j ஆவது மாதிரி மதிப்பு, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$

k - ஒப்பிடப்படும் நடத்துமுறைகளின் எண்ணிக்கை.

$x_{i.}$ - i ஆவது மாதிரி நடத்துமுறையின் சராசரி.

n_i - i ஆவது நடத்துமுறையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

இங்கு $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

உறுப்புகள் x_{ij} இன் மொத்த வேறுபாடுகள் கீழ்க்கண்ட இரண்டு பிரிவுகளாக பிரிக்கப்படுகின்றன.

i) நிலைகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடு அல்லது வேறுபட்ட அடிப்படைகள் கொண்ட வகைபாடுகளால் உண்டாகும் வேறுபாடு ஆகியவை நடத்துமுறைகள் எனப்படும்.

ii) நடத்துமுறைகளுக்குள்ளேயே இருக்கும் வேறுபாடு அதாவது கண்டறிந்த மதிப்புகளுக்குள் இயற்கையாகவே உள்ளடங்கிய வேறுபாடுகள்.

முதல் வகை வேறுபாடுகளில் ஏற்படும் காரணங்கள் குறிப்பிடத்தக்க காரணங்கள் எனவும் இரண்டாம் வகை வேறுபாடுகளில் ஏற்படும் காரணங்கள் வாய்ப்பு காரணங்கள் எனவும் அழைக்கப்படும்.

குறிப்பிடத்தக்க காரணங்களால் ஏற்படும் வேறுபாடுகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு அவற்றை நம்மால் தடுக்க இயலும். ஆனால் வாய்ப்பு காரணங்களால் ஏற்படும் வேறுபாடுகளைக் களைவது மனித முயற்சிக்கு அப்பாற்பட்ட செயலாகும்.

3.3.2 சோதனை வழிமுறைகள்

i ஆவது நடத்துமுறையில் $N(\mu_i, \sigma^2)$ பரவலைத் தழுவிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட கண்டறிந்த மதிப்புகள் x_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n_i$ மற்றும் $i = 1, 2, \ldots, k$, σ^2 (தெரியாத நிலை).

படி 1 : கருதுகோள் அமைத்தல்

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

கொடுக்கப்பட்ட தொகுதிகளின் முழுமைத்தொகுதிகளின் சராசரிகளுக்கிடையே எந்தவொரு வேறுபாடும் இல்லை.

மாற்று கருதுகோள்

$H_1: \mu_i \neq \mu_j$ ஏதாவதொரு (i,j); $i, j = 1,2,\ldots,k$; $i \neq j$

ஏதாவதொரு ஜோடி முழுமைத் தொகுதிகளின் சராசரிகள் வெவ்வேறானவை.

படி 2 : தரவு

தரவுகள் சென்ற பகுதியில் விவரித்தபடி அட்டவணை வடிவில் வழங்கப்படலாம்.

படி 3 : மிகைகாண் நிலை α

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$F = \frac{MST}{MSE} \sim F_{(k-1,\, n-k)}$$

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல்

மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை செய்வதற்குக் கீழ்க்கண்டஇடைநிலை மதிப்புகளைக் காண வேண்டும்.

(i) திருத்தக் காரணி: $C.F = \frac{G^2}{n}$ G - அனைத்து உறுப்புகளின் கூடுதல் $= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$

(ii) மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $TSS = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - C.F$

(iii) நடத்து முறைகளுக்கிடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல்:

$$SST = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_{i.}^2}{n_i} - C.F,$$

அதாவது $x_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, k$

$x_{i.}$ – i ஆவது நடத்து முறையின் கூடுதல்

n_i – i ஆவது நடத்து முறையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(iv) பிழையால் ஏற்படும் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SSE = TSS - SST$

கட்டின்மை கூறுகள் (d.f)

மூலம்	கட்டின்மை கூறுகளின் எண்ணிக்கை (d.f.)
மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்	$n-1$
நடத்து முறைகளுக்கிடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல்	$k-1$
பிழையின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்	$n-k$

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 92 1/28/2020 6:41:44 PM

வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி

நடத்து முறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி: $MST = \frac{SST}{k-1}$

பிழைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி:

$$MSE = \frac{SSE}{n-k}$$

(iv) இடைநிலை மடிப்புகளைக் கண்டறிந்தவுடன் அட்டவணைப்படுத்தி F விகிதம் காணுதல்

ஒரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	கட்டின்மை கூறுகள்	வர்க்கங்களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதல் சராசரி	F-விகிதம்
நடத்து முறைகள்	k-1	SST	$MST = \frac{SST}{k-1}$	$F_0 = \frac{MST}{MSE}$
பிழை	n-k	SSE	$MSE = \frac{SSE}{n-k}$	
மொத்தம்	n-1	TSS		

படி 6 : F-பரவலின் அடிப்படையில் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

$f_e = f_{(k\text{-}1,\, n\text{-}k),\alpha}$.

படி 7 : முடிவு

$F_0 < f_{(k\text{-}1,\, n\text{-}k),\alpha}$ எனில் H_0 மறுக்கப்படலாம்.

3.3.3 ஒருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வின் நிறைகளும் குறைகளும்

நிறைகள்

- கட்டமைப்பது எளிதாகவும், எளிதில் புரிந்து கொள்ளும் வகையிலும் உள்ளது.
- ஒவ்வொரு நடத்து முறையிலும் உள்ள சோதனை அலகுகள் வேறுபடுவதால், அதிக அலகுகள் உள்ள நடத்து முறையிலிருந்து மதிப்பிட்டுச் சோதனை செய்து, மற்றவற்றைக் காட்டிலும் அதிக துல்லிய மதிப்பைப் பெறலாம்.

குறைகள்

- தொகுதி மாறுபாட்டளவைகளின் சோதனை அலகுகள் (உறுப்புகள்) ஒரே தன்மையுடையனவாக இருக்கவேண்டும்.
- மாதிரிகளின் இயல்நிலைத் தன்மை பற்றிய அனுமானத்தைச் சரிபார்ப்பது கடினமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.4

தனிநபர்களின் உயர் இரத்த அழுத்தத்தைக் குறைப்பதற்காக அவர்களுக்கு மூன்று வெவ்வேறு நுட்பங்கள் முறையே மருந்தளித்தல், உடற்பயிற்சி மற்றும் சிறப்பு உணவு ஆகியவை வாய்ப்பு முறையில் அளிக்கப்படுகின்றது. நான்கு வாரங்களுக்குப்பிறகு அவர்களின் இரத்த அழுத்தம் பரிசோதிக்கப்பட்டு பதிவு செய்யப்பட்டு கீழ்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மூன்று வெவ்வேறு நுட்பங்களினால் தனிநபர்களின் இரத்த அழுத்த சராசரிகளுக்கிடையே ஏதேனும் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் ஏற்பட்டுள்ளதா என 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதிக்க.

மருந்தளித்தல்	10	12	9	15	13
உடற்பயிற்சி	6	8	3	0	2
சிறப்பு உணவு	5	9	12	8	4

தீர்வு:

படி 1 : கருதுகோள்கள்

இன்மை கருதுகோள் H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

மூன்று வெவ்வேறு நுட்பங்களினால் ஏற்பட்ட இரத்த அழுத்த சராசரி மதிப்புகளுக்கிடையே வித்தியாசம் இல்லை.

மாற்று கருதுகோள் H_1: $\mu_i \neq \mu_j$, (i, j); $i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$.

ஒரு சோடி நடத்துமுறைகளிலாவது இரத்த அழுத்த சராசரி மதிப்புகளுக்கிடையே வித்தியாசம் உள்ளது.

படி 2 : தரவு

மருந்தளித்தல்	10	12	9	15	13
உடற்பயிற்சி	6	8	3	0	2
சிறப்பு உணவு	5	9	12	8	4

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 0.05$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$F_0 = \frac{MST}{MSE}$$

படி 5 : கணக்கிடும் முறை

						மொத்தம்	வர்க்கம்
மருந்தளித்தல்	10	12	9	15	13	59	3481
உடற்பயிற்சி	6	8	3	0	2	19	361
சிறப்பு உணவு	5	9	12	8	4	38	1444
						G = 116	5286

வர்க்கங்கள்

மருந்தளித்தல்	100	144	81	225	169
உடற்பயிற்சி	36	64	9	0	4
சிறப்பு உணவு	25	81	144	64	16

$$\sum\sum x_{ij}^2 = 1162$$

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 94 1/28/2020 6:41:45 PM

1. திருத்தகாரணி: $CF = \frac{G^2}{n} = \frac{(116)^2}{15} = \frac{13456}{15} = 897.06$

2. மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $TSS = \sum\sum x_{ij}^2 - C.F$

$= 1162 - 897.06 = 264.94$

3. நடத்துமுறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SST = \frac{\sum x_i^2}{n_i} - C.F$

$= \frac{5286}{5} - 897.06$

$= 1057.2 - 897.06$

$= 160.14$

4. பிழைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SSE = TSS - SST$

$= 264.94 - 160.14 = 104.8$

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	கட்டின்மை கூறுகள்	வர்க்கங்களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதல் சராசரி	F-விகிதம்
நடத்து முறைகளுக்கிடையே	3 – 1 = 2	160.14	80.07	$F_o = \frac{80.07}{8.73} = 9.17$
பிழைகளுக்கிடையே	12	104.8	8.73	
மொத்தம்	$n - 1 = 15 - 1 = 14$	264.94		

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

$f_{(2,\ 12),0.05} = 3.8853.$

படி 7 : முடிவு

$F_0 = 9.17 > f_{(2,\ 12),0.05} = 3.8853$, எனவே இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஏதேனும் ஒரு சோடி நடத்துமுறைகளிலாவது இரத்த அழுத்த சராசரிகளின் மதிப்பில் வித்தியாசம் உள்ளது என முடிவு செய்யப்படலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.5

ஓர் ஆய்வுக் கட்டுரையில் மாணவர்கள் ஏற்படுத்திய எழுத்துப்பிழையினை மூன்று அமைப்பு பயிற்றுநர்கள் பதிவு செய்த விவரம் பின்வருமாறு. மூன்று வகுப்புகளிலும் ஏற்பட்ட எழுத்துப்பிழைகளின் சராசரிகளுக்கிடையே வித்தியாசம் உள்ளதா என $\alpha = 5\%$ மிகைகாண் நிலையில் ஆராய்க.

பயிற்றுநர் 1	2	3	5	0	8		
பயிற்றுநர் 2	4	6	8	4	9	0	2
பயிற்றுநர் 3	5	2	3	2	3	3	

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 95 1/28/2020 6:41:46 PM

தீர்வு:

படி 1 : கருதுகோள்கள்

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

மூன்று வகுப்பு மாணவர்கள் ஏற்படுத்திய எழுத்துபிழைகளின் சராசரிகளுக்கிடையே குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் இல்லை.

மாற்று கருதுகோள்

$H_1 : \mu_i \neq \mu_j, (i, j); i,j = 1,2,3; i \neq j.$

ஏதேனும் ஒரு சோடி வகுப்பு மாணவர்கள் இடையே ஏற்பட்ட எழுத்துபிழைகளின் சராசரிகள் வெவ்வேறானவை

படி 2 : தரவு

பயிற்றுநர் 1	2	3	5	0	8		
பயிற்றுநர் 2	4	6	8	4	9	0	2
பயிற்றுநர் 3	5	2	3	2	3	3	

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 0.05$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$F_0 = \frac{MST}{MSE}$$

படி 5 : கணக்கிடும் முறை

								மொத்தம்	வர்க்கம்
பயிற்றுநர் 1	2	3	5	0	8			18	324
பயிற்றுநர் 2	4	6	8	4	9	0	2	33	1089
பயிற்றுநர் 3	5	2	3	2	3	3		18	324
								69	

வர்க்கங்கள்

பயிற்றுநர் 1	4	9	25	0	64		
பயிற்றுநர் 2	16	36	64	16	81	0	4
பயிற்றுநர் 3	25	4	9	4	9	9	

$$\sum\sum x_{ij}^2 = 379$$

திருத்தக்காரணி: $CF = \frac{G^2}{n} = \frac{(69)^2}{18} = \frac{4761}{18} = 264.5$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $TSS = \sum\sum x_{ij}^2 - C.F$

$= 379 - 264.5 = 114.5$

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 96 1/28/2020 6:41:47 PM

நடத்து முறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SST = \frac{\sum x_i^2}{n_i} - C.F$

$$= \left(\frac{324}{5} + \frac{1089}{7} + \frac{324}{6}\right) - 264.5$$

$$= (64.8 + 155.6 + 54) - 264.5$$

$$= (274.4) - 264.5$$

$$= 9.9$$

பிழைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SSE = TSS - SST$

$$= 114.5 - 9.9$$

$$= 104.6$$

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	கட்டின்மை கூறுகள்	வர்க்கங்களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதல் சராசரி	F-விகிதம்
நடத்து முறைகளுக்கிடையே	3 – 1 = 2	9.9	$\frac{9.9}{2} = 4.95$	$F_0 = \frac{4.95}{6.97} = 0.710$
பிழைகளுக்கிடையே	15	104.6	$\frac{104.6}{15} = 6.97$	
மொத்தம்	n – 1 = 18 – 1 = 17			

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $= f_{(15,\ 2),0.05} = 3.6823.$

படி 7 : முடிவு

$F_0 = 0.710 < f_{(15,\ 2),0.05} = 3.6823$ என்பதில், இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்படுவதற்கு ஏதுவான ஆதாரம் இல்லை. அதாவது, மூன்று வகுப்பு மாணவர்கள் மேற்கொண்ட பிழைகளின் சராசரிகள் சமமானவை என முடிவு செய்யலாம்.

3.4 இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு

இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் ஒரு மாறி கட்டுப்படுத்தப்பட்டு மற்றொரு மாறியின் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட குழுக்கள் ஒப்பிடப்படுகிறது. இரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் குழுக்கள் ஒரு காரணியாகவும் மற்றும் கட்டுபாடுகள் மற்றொரு காரணியாகவும் எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. குழுக்கள் நடத்துமுறைகள் எனவும், கட்டுப்பாடுகள் தொகுதிகள் எனவும் வழங்கப்படுகிறது.

இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் ஒரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வைவிட துல்லியமான முடிவினைப் பெற முடியும். ஏனெனில் பிழையின் மாறுபாட்டினைக் குறைக்க தொகுதிகள் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் தரவுகள் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணையில் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 97 1/28/2020 6:41:47 PM

தொகுதிகள்

குழுக்கள் (அ) நடத்து முறைகள்		1	2	3	…	m	$x_{i.}$
	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1m}	$x_{1.}$
	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2m}	$x_{2.}$
	3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3m}	$x_{3.}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	k	x_{k1}	x_{k2}	x_{k3}	…	x_{km}	$x_{k.}$
	$x_{.j}$	$x_{.1}$	$x_{.2}$	$x_{.3}$	…	$x_{.m}$	G

நாம் கீழ்காணும் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

x_{ij} - j ஆவது தொகுதியில் i ஆவது நடத்துமுறை மதிப்பு, $i = 1,2, ..., k; j = 1,2, ..., m$.

i ஆவது நடத்து முறைகளின் மொத்தம் - $x_{i.} = \sum_{j=1}^{m} x_{ij},\ i = 1, 2, ..., k$

j ஆவது தொகுதியின் மொத்தம் - $x_{.j} = \sum_{i=1}^{k} x_{ij},\ j = 1, 2, ..., m$

இங்கு $k \times m = n$, m = தொகுதிகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் k–நடத்துமுறைகளின் (குழுக்கள்) எண்ணிக்கை n = ஆய்வில் மொத்த கண்டறிந்த மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை

கண்டறிந்த மதிப்புகள் விவரங்கள் x_{ij} இல் உள்ள வேறுபாடு மொத்தம், கீழ்க்கண்ட மூன்று பிரிவுகளாக பிரிக்கப்படுகின்றன.

i) நடத்து முறைகளுக்கு இடையே காணப்படும் வேறுபாடுகள் (குழுக்கள்).

ii) தொகுதிகளுக்கு இடையே காணப்படும் வேறுபாடுகள்.

iii) நடத்து முறைகளுக்கும், தொகுதிகளுக்கும் இடையே, அல்லது குறிப்பிட்ட அமைப்பில் உள்ளடங்கிய வேறுபாடுகள்.

3.4.1 சோதனை வழிமுறைகள்

இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்விற்கான படிகள் பின்வருமாறு

படி 1 : இருவழி பகுப்பாய்வில் நடத்து முறைகள் மற்றும் தொகுதிகள் ஆகியவற்றிற்காக இரு வகையான கருதுகோள்கள் உள்ளன.

கருதுகோள் அமைத்தல்

இன்மை கருதுகோள்கள்

H_{01}: நடத்து முறைகளின் முழுமைத் தொகுதி சராசரிகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதல்ல

H_{02}: தொகுதிகளின் முழுமைத் தொகுதி சராசரிகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதல்ல

மாற்று கருதுகோள்கள்

H_{11}: ஏதாவது ஒரு சோடி நடத்து முறைகளின் சராசரிகள் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டைப் பெற்றுள்ளன.

H_{12}: ஏதாவது ஒரு சோடி தொகுதிகளின் சராசரிகள் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டைப் பெற்றுள்ளன.

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 98 1/28/2020 6:41:48 PM

படி 2 : மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு காண, சென்ற பிரிவில் கூறியவாறு தரவுகளை அட்டவணை வடிவில் அமைக்கப்படலாம்.

படி 3 : மிகைகாண் நிலை α

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$F_{0t}(\text{நடத்துமுறைகள்}) = \frac{MST}{MSE}$$

$$F_{0b}(\text{தொகுதி}) = \frac{MSB}{MSE}$$

படி 5 : மாதிரிப்பண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்ப கணக்கிடுதல்

மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை செய்வதற்குக் கீழ்க்கண்ட இடைநிலை மதிப்புகளை கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

i) திருத்தக்காரணி: $C.F = \frac{G^2}{n}, \; G = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} x_{ij}$

ii) மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $TSS = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^2 - C.F$

iii) நடத்துமுறைகளுக்கிடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SST = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_{i.}^2}{m} - C.F$

iv) தொகுதிகளுக்கிடையேயான வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SSB = \sum_{j=1}^{m} \frac{x_{.j}^2}{k} - C.F$

v) பிழைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SSE = TSS\text{-}SST\text{-}SSB$

vi) கட்டின்மை கூறுகள்

மூலம்	கட்டின்மை கூறுகளின் எண்ணிக்கை (d.f.)
மொத்த வர்க்கங்களின் (TSS) கூடுதல்	$n-1$
நடத்து முறைகளுக்கிடையேயான வர்க்கங்களின் (SST) கூடுதல்	$k-1$
பிழையின் வர்க்கங்களின் (SSB) கூடுதல்	$m-1$
பிழையின் வரையற்ற பாகை	$(m - 1)(k - 1)$

vii) வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி

நடத்துமுறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி: $MST = \frac{SST}{k-1}$

தொகுதிகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி : $MSB = \frac{SSB}{m-1}$

பிழையின் வர்க்கங்களின் கூடுதலின் சராசரி: $MSE = \frac{SSE}{(k-1)(m-1)}$

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 99 1/28/2020 6:41:49 PM

(viii) இடைநிலை மதிப்புகளைக் கண்டறிந்தவுடன், அவற்றை அட்டவணைப்படுத்தி, F விகிதங்களைக் காணவேண்டும்

இரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	கட்டின்மை கூறுகள்	வர்க்கங்களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதல் சராசரி	F-விகிதம்
நடத்துமுறைகள்	k-1	SST	MST	$F_{0t} = \frac{MST}{MSE}$
தொகுதிகள்	m-1	SSB	MSB	$F_{0b} = \frac{MSB}{MSE}$
பிழைகள்	(k-1)(m-1)	SSE	MSE	
மொத்தம்	n-1	TSS		

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு

நடத்து முறைகளின் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $= f_{(k\text{-}1,(m\text{-}1)(k\text{-}1)),\alpha}$

தொகுதிகளின் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு $= f_{(m\text{-}1,\,(m\text{-}1)(k\text{-}1)),\alpha}$

படி 7 : முடிவு

கணக்கிடப்பட்ட F_{0t} இன் மதிப்பு, அட்டவணை மதிப்பு f_e ஐ விட அதிகமாக இருப்பின் இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்படுகிறது எனலாம். மேலும் ஒரு சோடி நடத்து முறைகளின் சராசரிகளாவது வெவ்வேறானவை எனலாம்.

கணக்கிடப்பட்ட F_{0b} இன் மதிப்பு, அட்டவணை மதிப்பு f_e ஐ விட அதிகமாக இருப்பின் இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்படலாம். மேலும் ஒரு சோடி தொகுதிகளின் சராசரிகளாவது வெவ்வேறானவை எனலாம்.

குறிப்பு 1: F சோதனையில் முழுமைத் தொகுதி மாறுபாட்டின் இரண்டு வேறுபட்ட மதிப்பீடுகள் காணப்படுகின்றன. முதல் மதிப்பீடு, தொகுப்புகளின் சராசரிகளுக்கிடையே ஏற்படும் தொகுப்பு மாறுபாடாகும். இரண்டாம் மதிப்பீடு, தொகுப்புகளின் சராசரிகளுக்குள்ளேயே காணப்படும் மாறுபாடாகும். இவ்வகை மாறுபாடுகாண அனைத்து தரவுகளும் பயன்படுத்திப்படுகிறது மற்றும் சராசரிகளுக்கிடையேயான வேறுபாட்டால் இவை பாதிக்கப்படுவதில்லை.

குறிப்பு 2: சராசரிகளுக்கிடையே வித்தியாசம் இல்லை எனில், தொகுதிகளுக்கிடையேயான மாறுபாடு மற்றும் தொகுதிகளுக்குள்ளான மாறுபாடு ஆகியவை ஏறத்தாழ சமமாக இருக்கும் மேலும் F சோதனை மதிப்பு தோராயமாக 1க்கு சமமாக இருக்கும்.

3.4.2 இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வின் நிறைகள் மற்றும் குறைகள்

நிறைகள்

- இருவழி பாகுபாட்டில் எந்த எண்ணிக்கையில் வேண்டுமானாலும் நடத்து முறைகள் மற்றும் தொகுதிகள் பயன்படுத்தப்படலாம்.
- ஒவ்வொரு நடத்துமுறையும் அனைத்து தொகுதிகளிலும் பிரதிபலிக்கவேண்டும்.
- இவ்வடிவமைப்பு ஆராய்ச்சியின் பல்வேறு பகுதிகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 100 1/28/2020 6:41:49 PM

குறைகள்

- நடத்து முறைகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருப்பின் தொகுதிகளுக்கிடையே ஒத்ததன்மையைப் பராமரிப்பது கடினமானதாகும்.
- விடுபட்ட மதிப்பினை ஒதுக்க இயலாது. விடுபட்ட மதிப்பு ஏற்கனவே உள்ளமதிப்புகளின் பகுப்பாய்வில் சில மாற்றங்களைச் செய்து பயன்படுத்தப்படுகிறது. எனவே, பகுப்பாய்வு செய்வது சற்று கடினமானதாகும்.

ஒருவழி மற்றும் இருவழி பாகுபாய்வின் ஒப்பீடு

ஒப்பீட்டின் அடிப்படை	மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு	
	ஒரு வழி	இரு வழி
சார்பற்ற மாறிகள்	ஒன்று	இரண்டு
ஒப்பிடுதல்	ஒரு காரணியின் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிலைகள்	இரு காரணிகளின் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிலைகள்
உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	அனைத்து நடத்துமுறைகளின் எண்ணிக்கை சமமாக இருக்க வேண்டியதில்லை	அனைத்து நடத்து முறைகளின் எண்ணிக்கை சமமாக இருக்க வேண்டும்

எடுத்துக்காட்டு 3.6

இந்தியாவில் உள்ள ஒரு பிரபலமான மார்க்கெட்டிங் நிறுவனம் மூன்று வெவ்வேறான பயிற்சி வகுப்புகளை விற்பனை பிரதிநிதிகளுக்கு நடத்துகிறது. பயிற்சி வகுப்புகள் முறையே A, B, C எனக் குறியிடப்படுகிறது. பயிற்சியின் வெற்றியினைக் கண்டறிய ஒவ்வொரு பயிற்சி வகுப்புகளுக்கும் 4 விற்பனை பிரதிநிதிகள் அனுப்பப் படுகின்றனர். அவர்களின் விற்பனை முன்னேற்றம் கீழ்க்கண்டவாறு.

விற்பனை பிரதிநிதி	பயிற்சி முறைகள்		
	A	B	C
1	4	6	2
2	6	10	6
3	5	7	4
4	7	5	4

பயிற்சி முறைகள் மற்றும் விற்பனை பிரதிநிதிகளின் திறன் சராசரிகள் சமமாக உள்ளதா எனச் சோதிக்க

தீர்வு:

படி 1 : கருதுகோள்கள்

இன்மைகருதுகோள்கள் $H_{01}: \mu_{M_1} = \mu_{M_2} = \mu_{M_3}$ (நடத்து முறைகள்)

மூன்றுவிதமான விற்பனை பயிற்சி வகுப்புகளிற்கிடையேயான சராசரிகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டினைப் பெற்றிருக்கவில்லை.

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 101 1/28/2020 6:41:49 PM

$$H_{02}: \mu_{S_1} = \mu_{S_2} = \mu_{S_3} = \mu_{S_4} \text{ (தொகுதிகள்)}$$

விற்பனையாளர்களின் திறன் சராசரிகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாட்டினைப் பெற்றிருக்கவில்லை.

மாற்று கருதுகோள்கள்

H_{11} : ஒருசோடி விற்பனை பயிற்சி வகுப்பு சராசரிகளாவது வெவ்வேறானவை.

H_{12} : ஒரு சோடி விற்பனையாளர்களின் திறன் சராசரிகளாவது வெவ்வேறானவை.

படி 2 : தரவு

விற்பனை பிரதிநிதிகள்	பயிற்சி முறைகள்		
	A	B	C
1	4	6	2
2	6	10	6
3	5	7	4
4	7	5	4

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

$$F_{0t}\text{(நடத்துமுறைகள்)} = \frac{MST}{MSE}$$

$$F_{0b}\text{(தொகுதி)} = \frac{MSB}{MSE}$$

படி 5 : கணக்கிடும் முறை

விற்பனை பிரதிநிதிகள்	பயிற்சி முறைகள்			மொத்தம் $x_{i.}$	$x_{i.}^2$
	A	B	C		
1	4	6	2	12	144
2	6	10	6	22	484
3	5	7	4	16	256
4	7	5	4	16	256
x_i	22	28	16	66	1140
$x_{i.}^2$	484	784	256	1524	

வர்க்கங்கள்

16	36	4
36	100	36
25	49	16
49	25	16
		$\sum\sum x_{ij}^2 = 408$

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 102 1/28/2020 6:41:49 PM

திருத்த காரணி: $CF = \frac{G^2}{n} = \frac{(66)^2}{12} = \frac{4356}{12} = 363$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $TSS = \sum\sum x_{ij}^2 - C.F$

$= 408 - 363 = 45$

நடத்துமுறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SST = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{.j}^2}{k} - C.F$

$= \frac{1140}{3} - 363$

$= 380 - 363 = 17$

தொகுதிகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SSB = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{.j}^2}{k} - C.F$

$= \frac{1524}{4} - 363$

$= 381 - 363$

$= 18$

பிழைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SSE = TSS - SST - SSB$

$= 45 - 17 - 18 = 10$

வர்க்கங்களின் கூடுதல் சராசரி: $MST = \frac{SST}{k-1} = \frac{17}{2} = 8.5$

$MSB = \frac{SSB}{m-1} = \frac{18}{3} = 6$

$MSE = \frac{SSE}{(k-1)(m-1)} = \frac{10}{6} = 1.67$

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	கட்டின்மை கூறுகள்	வர்க்கங்களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதல் சராசரி	F-விகிதம்
நடத்துமுறைகள் (பயிற்சி முறைகள்)	2	17	8.5	$F_{ot} = \frac{8.5}{1.67} = 5.09$
தொகுதிகள் (விற்பனை பிரதிநிதிகள்)	3	18	6	$F_{ob} = \frac{6}{1.67} = 3.59$
பிழைகள்	6	10	1.67	
மொத்தம்	11			

படி 6 : தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்புகள்

(i) $f_{(2, 6),0.05} = 5.1456$ (நடத்து முறைகள்)

(ii) $f_{(3, 6),0.05} = 4.7571$ (தொகுதிகள்)

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 103 1/28/2020 6:41:53 PM

படி 7 : முடிவு

i) கணக்கிடப்பட்ட $F_{0t} = 5.09 < f_{(2,\ 6),0.05} = 5.1456$, இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்படுவதற்கான ஏதுவான ஆதாரம் இல்லை. ஆகவே விற்பனையை மேம்படுத்த விற்பனையாளர்களுக்கு கொடுக்கப்பட்ட பயிற்சி வகுப்பிற்கான முறைகளின் சராசரிகள் வெவ்வேறு அல்ல என முடிவு செய்யப்படலாம்.

ii) கணக்கிடப்பட்ட $F_{0b} = 3.59 > f_{(3,6),0.05} = 4.7571$, இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே விற்பனையாளர்களின் விற்பனை சராசரிகளுக்கிடையே வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தது எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.7

ஒரு நகரில் நுண்ணியிரிகளால் எற்படும் உடல்நலக்குறைவால் உணவகங்களின் தூயமை மதிப்பீடு நிலையானது அல்ல என பரிசோதிக்க விரும்பி இயக்குநர் 5 உணவக ஆய்வாளர்களைக் கொண்டு 3 உணவகங்களின் தரம் குறித்து விசாரணை செய்ய விரும்புகிறார். அதன் முடிவுகள் பின்வருமாறு:

ஆய்வாளர்	உணவகம்		
	I	II	III
1	71	55	84
2	65	57	86
3	70	65	77
4	72	69	70
5	76	64	85

மிகைகாண் நிலை 5% இல் இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு சோதனை செய்க.

தீர்வு:

படி 1 : கருதுகோள் அமைத்தல்

இன்மை கருதுகோள்கள்

$H_{0I} : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ (ஆய்வாளர்கள் – நடத்து முறைகள்)

உணவகத்தை ஆய்வு செய்பவர்களின் ஆய்வு முறை சராசரிகளுக்கிடையே எந்த வேறுபாடும் இல்லை

$H_{0R} : \mu_{I} = \mu_{II} = \mu_{III}$ (உணவகங்கள் – தொகுதிகள்)

உணவகங்களின் தூய்மை அளவின் சராசரிகளுக்கிடையே எந்த வேறுபாடும் இல்லை.

மாற்று கருதுகோள்கள்

H_{1I}: ஆய்வு செய்பவர்களின் ஆய்வு முறை சராசரிகளில் ஒரு சராசரியாவது வேறுபாடானது

H_{1R}: உணவகங்களின் தூய்மை அளவின் சராசரிகளில் ஒரு சராசரியாவது வேறுபாடானது.

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 104 1/28/2020 6:41:53 PM

படி 2 : தரவு

ஆய்வாளர்	உணவகம்		
	I	II	III
1	71	55	84
2	65	57	86
3	70	65	77
4	72	69	70
5	76	64	85

படி 3 : மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\%$

படி 4 : மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை

ஆய்வாளர்கள்: F_{0t} (நடத்து முறைகள்) = $= \frac{MST}{MSE}$

உணவகங்கள்: F_{0b} (தொகுதிகள்) $= \frac{MSB}{MSE}$

படி 5 : கணக்கிடும் முறை

ஆய்வாளர்	உணவகம்			மொத்தம் $x_{i.}$	$x_{i.}^2$
	I	II	III		
1	71	55	84	210	44100
2	65	57	86	208	43264
3	70	65	77	212	44944
4	72	69	70	211	44521
5	76	64	85	225	50625
$x_{.j}$	354	310	402	1066	
$x_{.j}^2$	125316	96100	161604		

வர்க்கங்கள்

5041	3025	7056
4225	3249	7396
4900	4225	5929
5184	4761	4900
5776	4096	7225
		$\sum\sum x_{ij}^2 = 76988$

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 105 1/28/2020 6:41:53 PM

திருத்த காரணி: $CF = \frac{G^2}{n} = \frac{(1066)^2}{15} = \frac{1136356}{15} = 75757.07$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $TSS = \sum\sum x_{ij}^2 - C.F$

$= 76988 - 75757.07 = 1230.93$

நடத்துமுறைகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SST = \frac{\sum_{j=1}^{l} x_{i.}^2}{l} - C.F$

$= \frac{227454}{3} - 75757.07$

$= 75818 - 75757.07$

$= 60.93$

தொகுதிகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SSB = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_{.j}^2}{k} - C.F$

$= \frac{383020}{5} - 75757.07$

$= 76604 - 75757.07$

$= 846.93$

பிழையின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்: $SSE = TSS - SST - SSB$

$= 1230.93 - 60.93 - 846.93$

$= 323.07$

வர்க்கங்களின் கூடுதல் சராசரி

$MST = \frac{SST}{k-1} = \frac{60.93}{4} = 15.23$

$MSB = \frac{SSB}{m-1} = \frac{846.93}{2} = 423.47$

$MSE = \frac{SSE}{(k-1)(m-1)} = \frac{323.07}{8} = 40.38$

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு

மாறுபாட்டின் மூலம்	கட்டின்மை கூறுகள்	வர்க்கங்களின் கூடுதல்	வர்க்கங்களின் கூடுதல் சராசரி	F-விகிதம்
நடத்து முறைகளுக்கிடையே	4	60.93	15.23	$F_{01} = \frac{15.23}{40.38} = 0.377$
தொகுதிகளுக்கிடையே	2	846.93	423.47	$F_{0R} = \frac{423.47}{40.38} = 10.49$
பிழை	8	323.07	40.38	
மொத்தம்	14	1230.93		

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 106 1/28/2020 6:41:53 PM

படி 6 : **தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்புகள்**

(i) $f_{(4,\,8),0.05} = 3.838$ (ஆய்வாளர்கள்)

(ii) $f_{(2,\,8),0.05} = 4.459$ (உணவகங்கள்)

படி 7 : **முடிவு**

i) $F_{0I} = 0.377 < f_{(4,\,8),0.05} = 3.838$, இன்மை கருதுகோள் மறுப்பதற்கான ஆதாரம் இல்லை எனவே, உணவகத்தை ஆய்வு செய்பவர்களின் ஆய்வு முறை சராசரிகளுக்கிடையே எந்த வேறுபாடும் இல்லை எனலாம்.

ii) $F_{0R} = 10.49 > f_{(2,\,8),0.05} = 4.459$, இன்மை கருதுகோள் மறுக்கப்படுகிறது. ஆகவே உணவகங்களின் தூய்மை அளவின் சராசரிகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்தது எனலாம்.

நினைவில் கொள்க

- F-மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை இரு சார்பற்ற வாய்ப்பு மாறிகளின் மாறுபாட்டு அளவைகளின் விகிதம் ஆகும்
- X மற்றும் Y என்பன முறையே m மற்றும் n கட்டின்மை கூறுகளைக் கொண்ட இரு சார்பற்ற χ^2 மாறிகள் எனில், $F = \dfrac{X/m}{Y/n}$ என்பது (m, n) கட்டின்மை கூறுகளைக் கொண்ட F-பரவலாகும்.
- m மற்றும் n எண்ணிக்கை கொண்ட இரு சார்பற்ற வாய்ப்பு மாதிரிகள் இயல்நிலை பரவலிலிருந்து எடுக்கப்படுகின்றன எனில், மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனை $F = \dfrac{s_X^2}{s_Y^2}$ ஓர் F-பரவலை தழுவும் $m-1, n-1$ கட்டின்மை கூறுகளைக் கொண்ட வாய்ப்பு மாறியாகும்.
- R.A. ஃபிஷரின் கூற்றுப்படி "மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வானது ஒரு குழு காரணங்களைச் சார்ந்த மாறுபாடுகளை மற்ற குழு (group) காரணங்களைச் சார்ந்த மாறுபாடுகளினின்று பிரித்தெடுக்கும் முறையாகும்".
- ஒரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட குழுக்களுக்கிடையே சராசரிகளை ஒப்பிடப்பயன்படுகிறது.
- இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் ஒரு மாறி கட்டுப்படுத்தப்பட்டு மற்றொரு மாறியின் மூன்று அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட குழுக்கள் ஒப்பிடப்படுகிறது.
- மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் பயன்படும் அனுமானங்கள்
  - கண்டறிந்த மாதிரி மதிப்புகள் இயல்நிலைப்பரவலைப் பின்பற்றுகின்றன.
  - நடத்துமுறைகளுக்கு வாய்ப்பு முறையில் சோதனை அலகுகள் ஒதுக்கப்படுகின்றன.
  - கண்டறிந்த மாதிரி மதிப்புகள் யாவும் சார்பற்றவை.
  - முழுமைத் தொகுதிகளின் மாறுபட்டு அளவைகள் (தெரியாத நிலையில்) சமம் அல்லது ஏறத்தாழ சமமானவை என அனுமானிக்கப்படுகிறது.

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 107 1/28/2020 6:41:53 PM

பயிற்சிகள் 3

I. மிகச்சரியான விடையைத் தெரிவு செய்க:

3R85FW

1. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு முறைகளை விரிவுபடுத்தியவர்

   (அ) S.D. பாய்சான் (ஆ) கார்ல்–பியர்சான்
   (இ) R.A. ஃபிஷர் (ஈ) W.S. காசெட்

2. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு முறை தொடங்கப்பட்ட களமானது

   (அ) தொழில் (ஆ) விவசாயம் (இ) மருத்துவம் (ஈ) மரபியல்

3. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்விற்குரிய அனுமானங்களில் ஒன்றான எடுக்கப்பட்ட கூறுகள் பெறப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியானது

   (அ) ஈருறுப்பு (ஆ) பாய்சான் (இ) கைவர்க்கம் (ஈ) இயல்நிலை

4. ஒரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் மொத்த மாறுபாட்டின் பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையானது ––––

   (அ) இரண்டு (ஆ) மூன்று (இ) நான்கு (ஈ) ஒன்று

5. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வின் இன்மை எடுகோளில் அனைத்து முழுமைத்தொகுதிகளின் சராசரிகளும்

   (அ) சமம் (ஆ) மாறிகள் (இ) சமமல்ல (ஈ) மேற்கூறிய ஏதுமில்லை

6. 30 கண்டறிந்த மதிப்புகள் மற்றும் 5 நடத்து முறைகளும் கொண்ட ஒரு வழி பாகுபாட்டில் SSE க்குரிய கட்டின்மை கூறுகள்

   (அ) 29 (ஆ) 4 (இ) 25 (ஈ) 150

7. இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் TSS =

   (அ) $SST+SSB+SSE$ (ஆ) $SST\text{-}SSB+SSE$
   (இ) $SST+SSB\text{-}SSE$ (ஈ) $SST+SSB$

8. இரு வழி மாறுபாட்டு பாகுப்பாய்வில் $TSS = 210$, $SST = 32$, $SSB = 42$, எனில் SSE என்பது

   (அ) 126 (ஆ) 74 இ) 136 (ஈ) 178

9. 5 நடத்து முறைகளும் மற்றும் *4* தொகுதிகளும் கொண்ட இருவழி பாகுபாட்டில் SSE க்குரிய கட்டின்மை கூறுகளின் எண்ணிக்கை

   (அ) 12 (ஆ) 19 (இ) 16 (ஈ) 15

10. ஒரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சராசரிகளை ஒப்பிடும் சூத்திரம்

   (அ) $F = \frac{MST}{MSE}$ (ஆ) $F = \frac{TSS}{SST}$

   (இ) $F = \frac{MSB}{MST}$ (ஈ) $F = \frac{MST}{MSB}$

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 108 1/28/2020 6:41:53 PM

11. ___________ சோதனை மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சராசரிகளை ஒப்பிட உதவுகிறது

(அ) t (ஆ) χ^2 (இ) F (ஈ) Z

12. மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சராசரிகளுக்கிடையே வித்தியாசம் ஏதுமில்லை எனில் F மதிப்பு ___________ க்கு அருகில் இருக்கும்

(அ) 0 (ஆ) –1 (இ) 1 (ஈ) ∞

13. F-சோதனை ___________ சோதனை எனப்படும்

(அ) சராசரி சோதனை (ஆ) மாறுபாட்டு விகித சோதனை

(இ) மாறுபாட்டு சோதனை (ஈ) மேற் கூறிய ஏதுமில்லை

14. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு என்பது மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட முழுமைத் தொகுதி ___________ சோதனை செய்ய சிறந்த வழியாகும்

(அ) மாறுபாட்டு அளவைகளை (ஆ) விகிதங்களை

(இ) சராசரிகளை (ஈ) விவரங்களை

15. m நடத்து முறைகளும் மற்றும் n தொகுதிகளும் கொண்ட இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் பிழைக்கான வரையற்ற பாகைகளானது ___________

(அ) mn-1 (ஆ) m-1 (இ) n-1 (ஈ) $(m\text{-}1)(n\text{-}1)$

16. கணக்கிடப்பட்ட F ன் மதிப்பு நிர்ணயிக்கப்பட்ட மிகைகாண் நிலையில் தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பைவிட அதிகமாக இருப்பின் H_0 ___________

(அ) மறுக்கப்படுகிறது (ஆ) மறுக்கப்படுவதில்லை

(இ) மாறிலி (ஈ) மேற்கூறிய ஏதுமில்லை

17. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் ___________ மற்றும் ___________ காரணிகள் சாணப்படுகின்றன

(அ) வாய்ப்பு, பிழை (ஆ) பிழை, தொகுதி

(இ) குறிப்பிடத்தக்க, வாய்ப்பு (ஈ) குறிப்பிடத்தக்க, பிழை

18. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் மாதிரி விவரங்கள்

(அ) ஒன்றை ஒன்று சார்ந்தவை (ஆ) சார்பற்றவை

(இ) சமம் (ஈ) சமமற்றவை

19. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் திருத்தக்காரணி

(அ) $\frac{\sum T_{ij}^2}{n}$ (ஆ) $\frac{\sum T_{i.}^2}{n}$

(இ) $\frac{G^2}{n}$ (ஈ) $\frac{\sum T_{i.}}{n}$

20. வர்க்கங்களின் கூடுதல் சராசரி என்பது வர்க்கங்களின் கூடுதல் மற்றும் அதன் ___________ன் விகிதமாகும்

(அ) தொகுதிகளின் எண்ணிக்கை (ஆ) நடத்துமுறைகளின் எண்ணிக்கை

(இ) கட்டின்மை கூறுகள் (ஈ) மொத்த வர்க்கங்களின் கூடுதல்

II. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு (சில சொற்களில்) குறுகிய விடைதருக:

21. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு என்றால் என்ன?
22. F-மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையின் பயன்பாடுகளை எழுதுக?
23. மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வின் அனுமானங்கள் யாவை?
24. வரையறு: குழுக்களுக்கிடையேயான மாறுபாடு, குழுக்களுக்குள்ளேயான மாறுபாடு.
25. ஒரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் பயன்படுத்தப்படும் எடு கோளை கூறு?
26. இரு வழி மாறுபாட்டு பாகுப்பாய்வின் பிரிவுகள் யாவை?
27. மாறுபாட்டின் காரணிகளை பெயரிடுக?

III. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு (சில சொற்றொடர்களில்) சுருக்கமான விடைதருக:

28. ஒருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வின் நன்மை, குறைகளை எழுதுக?
29. ஒருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வின் கட்டமைப்பை விளக்குக?
30. ஒருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையை கணக்கிட பயன்படும் அளவைகள் யாவை?
31. இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வின் நன்மை, குறைகளை எழுதுக?
32. இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வின் கட்டமைப்பை விளக்குக?
33. இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வின் பிரிவுகள் யாவை?
34. இருவழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வில் மாதிரிப்பண்பளவைச் சோதனையை கணக்கிடப் பயன்படும் அளவைகள் யாவை?
35. ஒருவழி மற்றும் இரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வினை ஒப்பிடுக?

IV. கீழ்க்கண்ட வினாக்களுக்கு விரிவான விடை தருக:

36. 8 உறுப்புகளுள்ள ஒரு மாதிரி சராசரியிலிருந்து உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 84.4 ஆகும். 10 உறுப்புகளுள்ள மற்றொரு மாதிரியில் இம்மதிப்பு 102.6 ஆகும். முழுமைத் தொகுதி மாதிரிகளின் மாறுபாடுகளுக்கு இடையே உள்ள வித்தியாசம் சிறப்பு வாய்ந்ததா என்பதை 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்க .
37. இரண்டு வாய்ப்பு மாதிரிகளில் பெறப்பட்ட மதிப்புகள் பின்வருமாறு

மாதிரி	அளவு	மாதிரிசராசரி	சராசரியிலிருந்து பெறப்பட்ட விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்
I	10	15	90
II	12	14	108

இரண்டு மாதிரிகளும் சம மாறுபாடு கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டவையா என 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்க. $F_{5\%}(9, 11) = 2.90$, $F_{5\%}(11, 9) = 3.10$)

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 110 1/28/2020 6:41:54 PM

38. இரண்டு சம பரப்பு கொண்ட விவசாய பிரிவு நிலங்கள் A மற்றும் Bல் பெறப்பட்ட கோதுமை விளைச்சல் (குவிண்டாலில்) கீழே தரப்பட்டுள்ளது

	விவசாயபிரிவு நிலங்களின் எண்ணிக்கை	சராசரி விளைச்சல்	மாதிரியின் மாறுபாடு
தொகுதி A	8	60	50
தொகுதி B	6	51	40

தொகுதி A விளைச்சலின் மாறுபாடு, தொகுதி B-இன் விளைச்சலின் மாறுபாட்டைவிட அதிகமாக இருக்கமா? 5% மிகைகாண் மட்டத்தில் சோதனையிடுக.

39. தேசிய அளவிலான இரண்டு நிறுவனங்களில் தயாரிக்கப்படும். ஐஸ்கிரீம்களில் 1/2 கோப்பையில் உள்ள கலோரியின் அளவு பின்வருமாறு.

A வகை	330	310	300	310	300	350	380	300	300
B வகை	300	300	270	290	310	370	300	310	250

5% மிகைகாண் நிலையில், A வகை ஐஸ்கிரீமின் கலோரியின் மாறுபாடானது B வகை ஐஸ்கிரீமின் கலோரியின் மாறுபாட்டைவிட குறை வானது என முடிவெடுக்க போதுமான ஆதாரம் உள்ளதா?

40. வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சாக்லேட் சுவை மற்றும் சாக்லேட் சுவை அல்லாத மிட்டாய்களில் உள்ள கார்போ ஹைட்ரேட் அளவு (கிராமில்) கீழே அட்டவணையில் கொடுக்கப்பபட்டுள்ளது இரண்டு விதமான சுவைகளிலும் கார்போஹைட்ரேட் அளவின் மாறுபாடுகள் வெவ்வேறானவை எனக் கூறுவதற்கு ஏதுவான ஆதாரம் உள்ளதா என சோதிக்க. $\alpha = 2\%$.

சாக்லெட் சுவை உள்ளது	29	25	18	40	41	25	32	30	38	34	25	28
சாக்லெட் சுவையற்றது	39	39	37	29	30	38	39	10	29	55	29	

41. ஒரு தோட்டக்காரர் நான்கு விதமான உரங்களைப் பயன்படுத்தி தக்காளி விளைச்சலைக் காணவிழைகிறார். 5% மிகைகாண் நிலையில் A, B, C, D உரங்களை பயன்படுத்துகூதுழலு சமமான விளைச்சல் உள்ளதா எனச் சோதனை செய்க

A	14	10	12	16	17
B	9	11	12	8	10
C	16	15	14	10	18
D	10	11	11	13	8

42. X, Y மற்றும் Z என்ற மூன்று விதமான செய் முறைகளின் வெளீயீடுகள் சமமானவையா என சோதிக்க, கீழ்காணும் வெளியீடு விவரங்கள் கண்டறியப்பட்டன.

X	10	13	12	11	10	14	15	13
Y	9	11	10	12	13			
Z	11	10	15	14	12	13		

மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு சோதனை நடத்தி முடிவெடுக்கவும்.

43. ஒரு நகரில் உள்ள மூன்று பள்ளிகளில் பயிலும் 12 ஆம் வகுப்பு மாணவர்கள் வாய்ப்பு முறையில் ஒவ்வொரு பள்ளியிலும் 5 பேர் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு தேர்வு நடத்தப்பெற்றது. அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண் பின்வருமாறு

பள்ளி I	9	7	6	5	8
பள்ளி II	7	4	5	4	5
பள்ளி III	6	5	6	7	6

ஒரு வழி மாறுபாட்டுப் பகுப்பாய்வு செய்க.

44. ஒரு விவசாயி மூன்று விதமான உரங்களை நான்கு விதமான விவசாய பிரிவு நிலங்களில் (Plot) பயன்படுத்துகிறார். ஒவ்வொரு ஏக்கரிலும் பெறப்பட்ட விளைச்சல் பின்வருமாறு

பிரிவு நிலங்கள் / உரங்கள்	விளைச்சல்			
	A	B	C	D
நைட்ரஜன்	6	4	8	6
பொட்டாஷ்யம்	7	6	6	9
பாஸ்பேட்	8	5	10	9

விவசாயநிலங்களின் வகைகளில் சராசரி விளைச்சலில் குறிப்பிடத்தக்க மாற்றம் உள்ளதா எனவும் உரங்களின் வகைகளில் சராசரி விளைச்சலில் ஏதேனும் வித்தியாசம் உள்ளதா என சோதனை செய்க.

45. 4 இயக்குபவர்களின் திறன், அவர்கள் இயக்கும் 5 வெவ்வேறான இயந்திரங்களிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட அலகுகளின் எண்ணிக்கையைக் கொண்டு சோதிக்கப்படுகிறது. 5% மிகைகாண் நிலையில் இயக்குபவர்களின் திறன்களில் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் உள்ளதா என சோதனை செய்க.

(F (3, 12) = 3.49, F (4, 12) = 3.26)

இயக்குபவர்கள்	இயந்திரங்களின் வகை				
	A	B	C	D	E
I	8	10	7	12	6
II	12	13	8	9	12
III	7	8	6	8	8
IV	5	5	3	5	14

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 112 1/28/2020 6:41:54 PM

விடைகள்

I.

1. (இ)	2. (ஆ)	3. (ஈ)	4. (அ)	5. (அ)
6. (இ)	7. (அ)	8. (இ)	9. (அ)	10. (அ)
11. (இ)	12. (இ)	13. (ஆ)	14. (இ)	15. (ஈ)
16. (அ)	17. (இ)	18. (ஆ)	19. (இ)	20. (இ)

III. 36. $F_0 = 1.06$, H_0 மறுக்கப்படுவதில்லை

37. $F_0 = 1.02$, H_0 மறுக்கப்படுவதில்லை

38. $F_0 = 1.25$, H_0 மறுக்கப்படுவதில்லை

39. $F_0 = 1.34$, H_0 மறுக்கப்படுவதில்லை

40. $F_0 = 2.52$, H_0 மறுக்கப்படுவதில்லை

41. $F_0 = 4.59$, H_0 மறுக்கப்படுகிறது

42. $F_0 = 1.097$, H_0 மறுக்கப்படுவதில்லை

43. $F_0 = 3.33$, H_0 மறுக்கப்படுவதில்லை

44. $F_0 =2.39$, H_0 மறுக்கப்படுவதில்லை $F_0 = 3.59$, H_0 மறுக்கப்படுவதில்லை

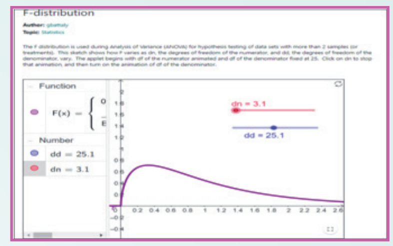
45. $F_0 = 2.53$, H_0 மறுக்கப்படுவதில்லை $F_0 = 1.24$, H_0 மறுக்கப்படுவதில்லை

03_12th_Statistics_TM_Unit_3.indd 113 1/28/2020 6:41:54 PM

ICT CORNER

TESTS BASED ON SAMPLING DISTRIBUTIONS – II

This activity helps to understand about *F*-DISTRIBUTION

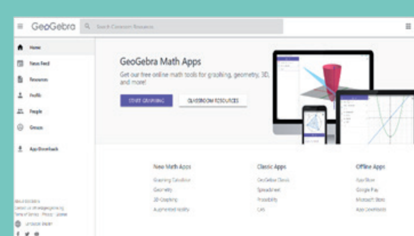


Steps:

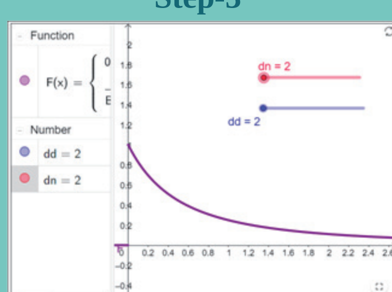
- Open the browser and type the URL given (or) scan the QR code. GeoGebra work book called "***F*-Distribution**" will appear.
- In this several work sheets for statisticsare given, open the worksheet named "*F*-Distribution"
- Drag and move the Red colour and Blue colour button or type the values in the left side box for result

Step-1

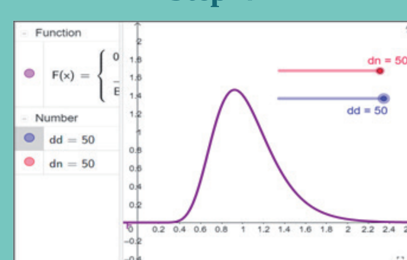
Step-2



Step-3



Step-4



Pictures are indicatives only*

URL:

https://www.geogebra.org/m/A45YdMfJ

B236_12_STATISTICS_TM