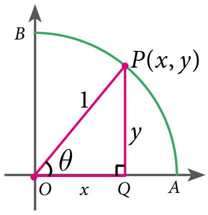
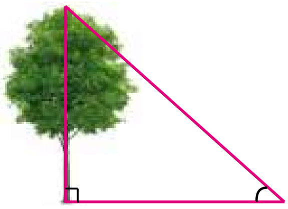
6





முக்கோணவியல்

உண்மையில் முக்கோணவியலைப் போல் கணிதத்தில் முக்கியமான இடத்தைப் பெற்றிருப்பது எதுவுமில்லை.

- ஜே.எஃப்.ஹெர்பர்ட்

லெனார்டு ஆய்லர்
(கி.பி. (பொ.ஆ.) 1707-1783)

ஆய்லரும்(Euler), நியூட்டனைப் போலவே அவருடைய தலைமுறையில் சிறந்த கணிதமேதையாவார். அவர் கணிதத்தின் அனைத்து துறைகளையும் கற்றதோடு, தனது பார்வையை இழந்த பின்பும் கடின உழைப்பைத் தொடர்ந்தார். கணிதத்தின் பல துறைகளில், குறிப்பாக நுண்கணிதம் மற்றும் முக்கோணவியலில் ஆய்லர் தனது சிறந்த பங்களிப்பைச் செய்துள்ளார்.

வடிவியலில் பல தேற்றங்களுக்கு நிரூபணம் அளித்தவர்களில் முதலாமவர் இவரே.

கற்றல் விளைவுகள்

- பல்வேறு முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகளைப் புரிந்துகொள்ளச் செய்தல்.
- முக்கோணவியல் விகிதங்கள் மற்றும் அவற்றின் தலைகீழிகளின் மதிப்புகளை அடையாளம் காணுதல்.
- நிரப்புக் கோணங்களின் கருத்தைப் பயன்படுத்துதல்.
- முக்கோணவியல் அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்துவதைப் புரிந்துகொள்ளுதல்

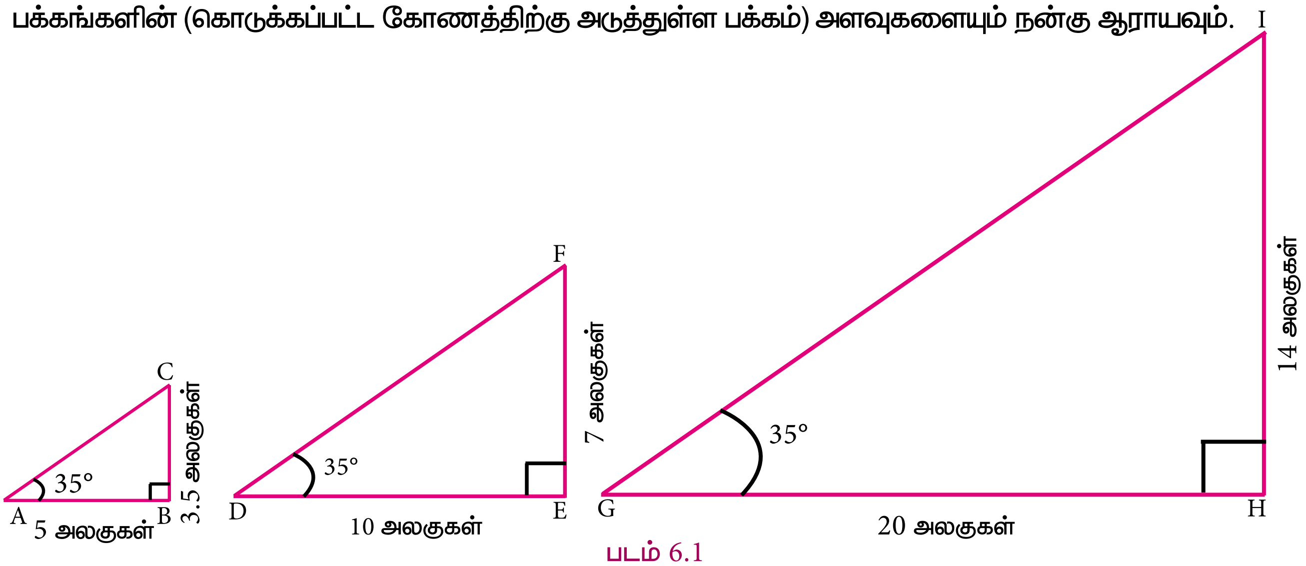
F7HHEZ

6.1 அறிமுகம்

முக்கோணவியல் என்பதின் ஆங்கிலச் சொல்லான **Trigonometry** என்பது கிரேக்கச் சொற்களான Trigonon-metron என்பவற்றிலிருந்து பெறப்பட்டுள்ளது. Trigonon-என்பதின் பொருள் முக்கோணம் என்பதாகும், மற்றும் metron – என்பதின் பொருள் அளவுகள் என்பதாகும். இது முக்கோணத்தின் கோண அளவுகள் மற்றும் அதன் பக்கங்களின் நீளங்களுக்கு இடையில் உள்ள தொடர்புகளைப் பற்றி விவரிக்கும் கணிதத்தின் ஒரு பிரிவு ஆகும்.பொறியியல் வல்லுநர்கள், அறிவியல் அறிஞர்கள் மற்றும் நில அளவையாளர்களுக்கு முக்கியமானதொரு கருவியாக முக்கோணவியல் பயன்படுகிறது. இது கடற்பயணம் மற்றும் நிலநடுக்கம் சார்ந்த துறைகளிலும் பயன்படுகிறது.

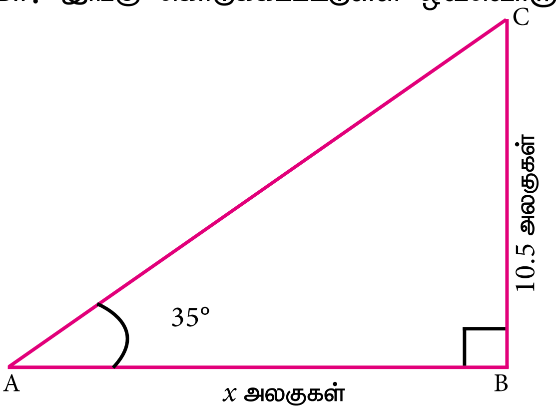
கீழ்க்காணும் மூன்று செங்கோண முக்கோணங்களை உற்று நோக்குங்கள். குறிப்பாக அவற்றின் அளவுகளை ஆராயுங்கள். மூன்று முக்கோணங்களிலும் கோண அளவுகள் ஒன்றாகவே உள்ளன. எதிர்ப்பக்கத்தின் (கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம்) அளவுகளையும், அடுத்துள்ள

பக்கங்களின் (கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு அடுத்துள்ள பக்கம்) அளவுகளையும் நன்கு ஆராயவும்.



படம் 6.1

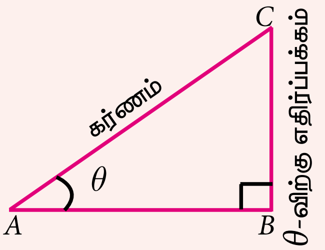
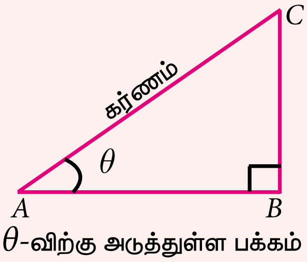
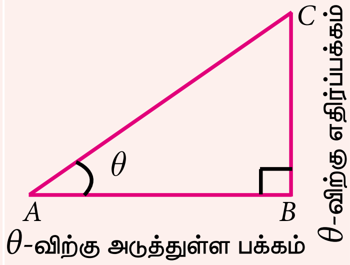
ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் எதிர்ப்பக்கம் மற்றும் அடுத்துள்ளப் பக்கங்களுக்கிடையேயான விகிதம் $\left(\frac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}\right)$ என்ன என்று கூற இயலுமா? இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணத்திலும் இந்த விகிதம் 0.7; இந்த முடிவைப் பொறுத்துப் படம் 6.2 இல் x இன் மதிப்பு என்னவாக இருக்கும் ? அது 15 ஆக இருக்குமா?



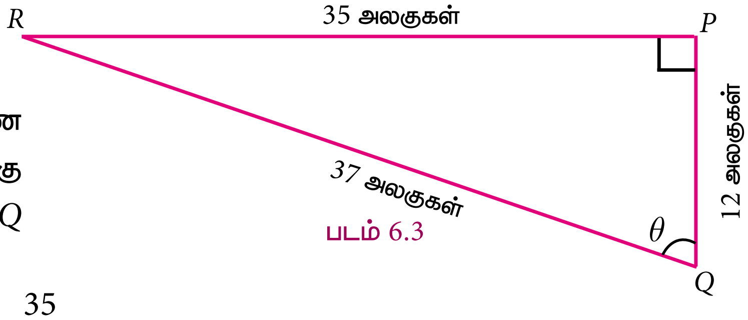
படம் 6.2

இதைப் போன்ற குறிப்பிடத்தக்க விகிதங்கள் அக்காலக் கணித அறிஞர்களை வியப்பில் ஆழ்த்தியதோடு மட்டுமல்லாமல், முக்கோணவியல் என்ற புதிய பாடம் உருவாவதற்கான வழிவகையையும் செய்தன.

முக்கோணவியலில் மூன்று அடிப்படை விகிதங்கள் உள்ளன. அம்மூன்று விகிதங்களும் செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தை மற்றொரு பக்கத்தால் வகுக்கக் கிடைக்கும் விகிதங்களாகும். அவையாவன:

கோணத்தின் பெயர்	**sine**	**cosine**	**tangent**
சுருங்கிய வடிவம்	sin	cos	tan
ஒப்புமை அளவீடுகள்			
விகிதம்	$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

எடுத்துக்காட்டு 6.1 கீழ்க்காணும் படத்தில் உள்ள அளவுகளுக்கு θ வைப் பொறுத்து sine, cosine மற்றும் tangent விகிதங்களைக் கணக்கிடுக.



படம் 6.3

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள செங்கோண முக்கோணம் PQR இல் கோணம் θ விற்கு எதிர்ப்பக்கம் PR, அடுத்துள்ள பக்கம் PQ ஆகும்.

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PR}{QR} = \frac{35}{37}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PQ}{QR} = \frac{12}{37}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{PR}{PQ} = \frac{35}{12}$$

F7RIGH

முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பின்னங்களாகவே குறிப்பிடலாம். தேவைப்பட்டால் அவற்றைச் சுருக்கியும் எழுதலாம்.

குறிப்பு

முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் குறிப்பிடும்போது பக்க அளவுகளின் விகிதங்களாகக் குறிப்பிடுவதால் அவை அலகுகளற்ற எண்களாகும்.

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ போன்ற விகிதங்களை $(\sin)\times(\theta)$, $(\cos)\times(\theta)$, $(\tan)\times(\theta)$ எனத் தவறாக எடுத்துக் கொள்ளக்கூடாது.

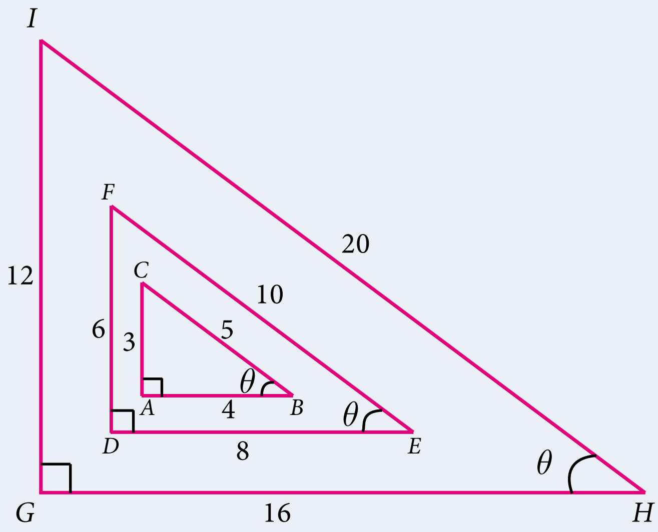
சிந்தனைக் களம்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள முக்கோணங்கள் ABC, DEF மற்றும் GHI இன் பக்க அளவுகள் 3-4-5, 6-8-10 மற்றும் 12-16-20.

இவை அனைத்தும் செங்கோண முக்கோணங்களா? விவாதிக்கவும்.

முனைகள் B, E மற்றும் H இல் அமையும் கோணங்களின் அளவுகள் சமமாக இருக்கும். (அவை ஒவ்வொன்றும் θ விற்குச் சமம்)

மேற்குறிப்பிடப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு பின்வரும் அட்டவணையில் நிரப்பி, கிடைக்கும் விகிதங்களைப் பற்றிய கருத்துகளைக் கூறுக.



படம் 6.4

ΔABC இல்	ΔDEF இல்	ΔGHI இல்
$\sin\theta = \frac{3}{5}$	$\sin\theta = \frac{6}{10} = ?$	$\sin\theta = \frac{12}{20} = ?$
$\cos\theta = ?$	$\cos\theta = ?$	$\cos\theta = ?$
$\tan\theta = \frac{3}{4}$	$\tan\theta = ?$	$\tan\theta = ?$

தலைகீழ் விகிதங்கள் (Reciprocal ratios)

மூன்று முக்கோணவியல் விகிதங்களை நாம் sine, cosine மற்றும் tangent எனக் குறிப்பிட்டோம். இம்முக்கோணவியல் விகிதங்களின் தலைகீழ் விகிதங்கள் கணக்கீடுகளில் பெரிதும் பயனுள்ளவையாக இருக்கின்றன. அவற்றை நாம் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

முக்கோணவியல் அடிப்படை விகிதங்கள்	அவற்றின் தலைகீழிகள்	சுருங்கிய வடிவம்
$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\text{cosecant}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$	$\text{cosec}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$
$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\text{secant}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$	$\sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$
$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$	$\text{cotangent}\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$	$\cot\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$

மேற்கண்ட விகிதங்களிலிருந்து கீழ்க்காணும் விகிதத் தொடர்புகளை நாம் அறியலாம்.

$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

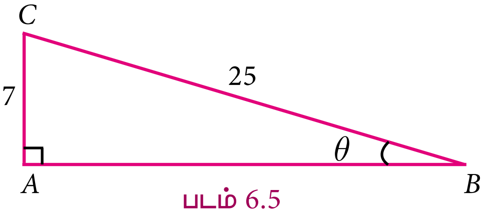
$(\sin\theta)\times(\text{cosec}\,\theta) = 1$. இதை நாம் $\sin\theta\cdot\text{cosec}\,\theta = 1$ என்று எழுதுவோம்.

$(\cos\theta)\times(\sec\theta) = 1$. இதை நாம் $\cos\theta.\sec\theta = 1$ என்று எழுதுவோம்.

$(\tan\theta)\times(\cot\theta) = 1$. இதை நாம் $\tan\theta\,.\cot\theta = 1$ என்று எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.2

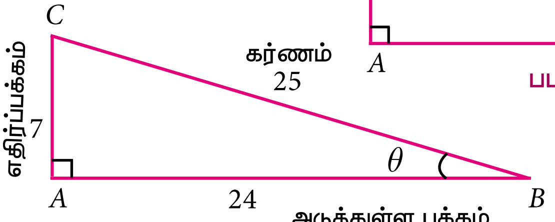
கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் θ -வைப் பொறுத்து 6 முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.



படம் 6.5

தீர்வு

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,



படம் 6.6

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$$
$$= \sqrt{(25)^2 - 7^2}$$
$$= \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$$

ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பின்வருமாறு நாம் எழுதலாம்.

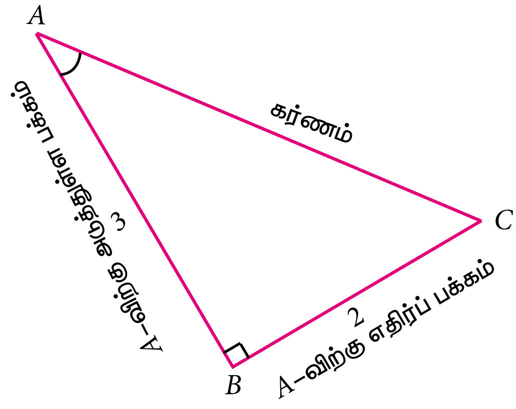
$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{7}{25}$ $\quad\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{24}{25}$

$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{7}{24}$ $\quad\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \frac{25}{7}$

$\sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{25}{24}$ $\quad\cot\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \frac{24}{7}$

எடுத்துக்காட்டு 6.3 $\tan A = \frac{2}{3}$ எனில், மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 6.7

$$\tan A = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{2}{3}$$

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$
$$AC = \sqrt{13}$$

$\sin A = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad\cos A = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ $\quad\sec A = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

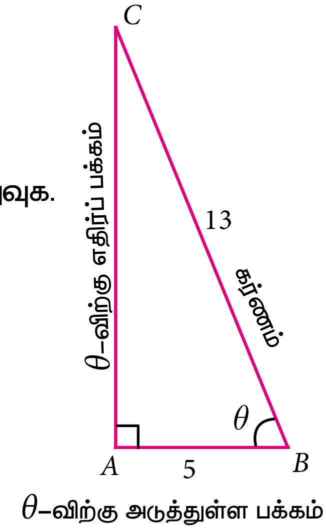
$\cot A = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \frac{3}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 6.4 $\sec\theta = \frac{13}{5}$, எனில் $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = 3$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$BC = 13$ மற்றும் $AB = 5$ என்க.

$$\sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{BC}{AB} = \frac{13}{5}$$



படம் 6.8

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$

$$= \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$= \sqrt{169 - 25} \quad = \quad \sqrt{144} = 12$$

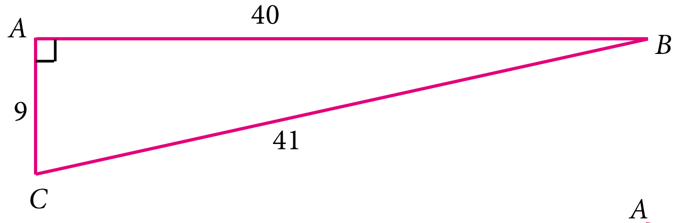
எனவே, $\sin\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{12}{13}$; $\cos\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5}{13}$

இடப்பக்கம் $= \dfrac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = \dfrac{2\times\frac{12}{13} - 3\times\frac{5}{13}}{4\times\frac{12}{13} - 9\times\frac{5}{13}} = \dfrac{\frac{24-15}{13}}{\frac{48-45}{13}} = \dfrac{9}{3} = 3$ = வலப்பக்கம்

குறிப்பு : முனைப்புள்ளி C இல் கோணம் θ அமையுமாறு எடுத்துக்கொண்டும் மேற்கண்ட கணக்கை இதே வழியில் செய்யலாம்.

பயிற்சி 6.1

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், கோணம் B ஐப் பொறுத்து அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களையும் காண்க.

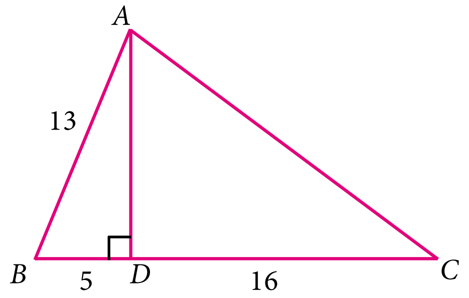


2. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில்,

   (i) $\sin B$ (ii) $\sec B$ (iii) $\cot B$

   (iv) $\cos C$ (v) $\tan C$ (vi) $\operatorname{cosec} C$

   ஆகியவற்றைக் காண்க.



3. $2\cos\theta = \sqrt{3}$ எனில், θ–வின் அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களையும் காண்க.

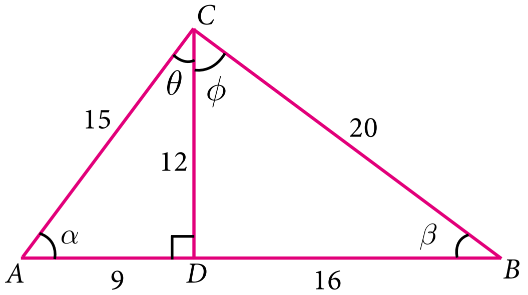
4. $\cos A = \dfrac{3}{5}$ எனில் , $\dfrac{\sin A - \cos A}{2\tan A}$ இன் மதிப்பைக் காண்க

5. $\cos A = \dfrac{2x}{1+x^2}$ எனில், $\sin A$ மற்றும் $\tan A$ இன் மதிப்புகளை x இல் காண்க

6. $\sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனில், $b\sin\theta = a\cos\theta$ என நிறுவுக

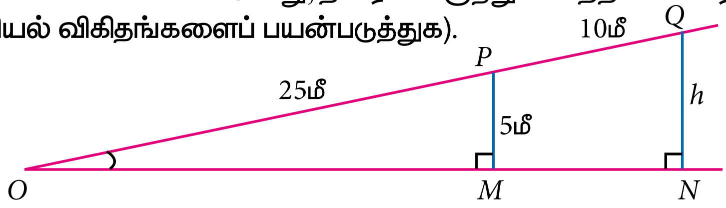
7. $3\cot A = 2$ எனில், $\dfrac{4\sin A - 3\cos A}{2\sin A + 3\cos A}$ இன் மதிப்பைக் காண்க

8. $\cos\theta : \sin\theta = 1 : 2$ எனில், $\dfrac{8\cos\theta - 2\sin\theta}{4\cos\theta + 2\sin\theta}$ இன் மதிப்பைக் காண்க



9. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $\theta + \phi = 90°$ என மெய்ப்பிக்க. இப்படத்தில் மேலும் இரு செங்கோண முக்கோணங்கள் உள்ளன என்பதை மெய்ப்பித்து, $\sin\alpha$, $\cos\beta$ மற்றும் $\tan\phi$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும் காண்க.

10. ஒரு மாணவன் 'O' என்ற புள்ளியில் தரையில் நின்றுகொண்டு 'P' என்ற புள்ளியில் உள்ள பட்டத்தை $OP = 25$ மீ என்றவாறு காண்கிறான். Pஇலிருந்து மேலும் 10 மீ தொலைவு நகர்ந்து Q என்ற புள்ளியில் பட்டம் உள்ள போது, தரையிலிருந்து பட்டத்தின் உயரம் 'QN' ஐக் காண்க. (முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பயன்படுத்துக).

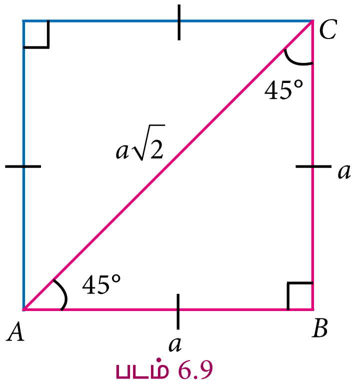


6.2 சில சிறப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (Trigonometric Ratios of Some Special Angles)

சில குறிப்பிட்ட முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளை வடிவியல் முறையிலும் பெறலாம். இரு சிறப்பு வகை முக்கோணங்கள் இங்கே நமக்குப் பயன்படுகின்றன.

6.2.1 முக்கோணவியல் விகிதங்கள் – கோண அளவு 45° (Trigonometric ratios of 45°)

45°, 45° மற்றும் 90° கோண அளவுள்ள ஒரு முக்கோணம் ABC ஐப் படம் 6.9 இல் உள்ளவாறு எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 6.9

இது ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தைப் பொறுத்து வெட்டப்பட்ட ஒரு சதுரத்தின் பாதி அளவு ஆகும். மேலும் இது ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணம் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும். (சதுரத்தின் பக்கங்கள் என்பதால் இம்முக்கோணத்தில் இரு பக்கங்கள் சம அளவானவையாக அதாவது a அலகுகள் இருக்கும்).

பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி மூலைவிட்டத்தின் நீளம் $a\sqrt{2}$ என்பதைச் சரிபார்க்கலாம்.

ABC என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து,

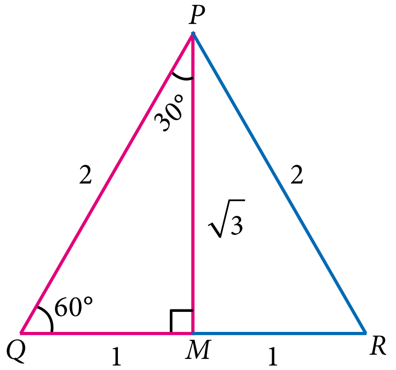
$$\sin 45° = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

இதன் தலைகீழ் விகிதங்களை இதிலிருந்து நாம் எளிதாக,
$\operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$;
$\sec 45° = \sqrt{2}$ மற்றும்
$\cot 45° = 1$ எனக் காணலாம்.

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

6.2.2 முக்கோணவியல் விகிதங்கள்–கோணங்கள் 30° மற்றும் 60° (Trigonometric Ratios of 30° and 60°)



படம் 6.10

பக்க அளவு 2 அலகுகள் கொண்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணம் PQR ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். $\angle P$ இன் கோண இரு சமவெட்டி வரைக. அது QR ஐ வெட்டும் புள்ளி M என்க.

$PQ = QR = RP = 2$ அலகுகள்.

$QM = MR = 1$ அலகு (ஏன்?)

PQ மற்றும் QM இன் மதிப்புகள் தெரியும் என்பதால், PM இன் மதிப்பைப் பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

இங்கு, $PM = \sqrt{3}$ அலகுகள் எனக் கிடைக்கும்.

தற்போது செங்கோண முக்கோணம் PQM இலிருந்து,

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{QM}{PM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

> இதன் தலைகீழ் விகிதங்களை இதிலிருந்து நாம் எளிதாக $\operatorname{cosec} 30^\circ = 2, \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$ மற்றும் $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ எனக் காணலாம்.

அதே முக்கோணத்தின் மற்றொரு கோணமான 60° ஐப் பொறுத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்போம்.

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{PM}{QM} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

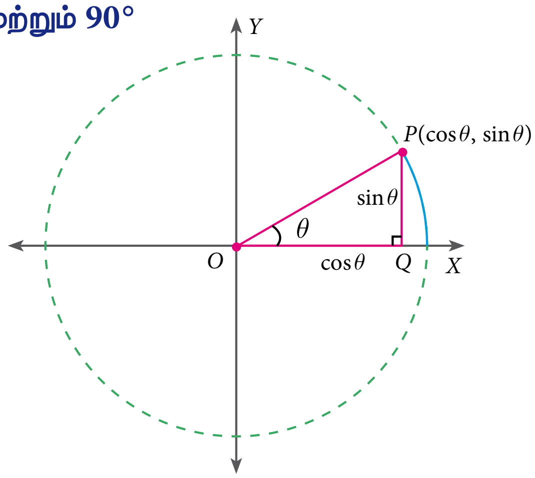
> இதன் தலைகீழ் விகிதங்களை இதிலிருந்து நாம் எளிதாக $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^\circ = 2$ மற்றும் $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ எனக் காணலாம்.

6.2.3 முக்கோணவியல் விகிதங்கள் – கோணங்கள் 0° மற்றும் 90° (Trigonometric Ratios of 0° and 90°)

முக்கோணவியல் விகிதங்கள் 0° மற்றும் 90° இன் மதிப்புகளைக் காண நாம் ஓரலகு வட்டத்தைப் பயன்படுத்திக்கொள்வோம்.

ஓரலகு வட்டம் என்பது ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும், ஆரம் 1 அலகும் கொண்ட ஒரு வட்டம் ஆகும்.

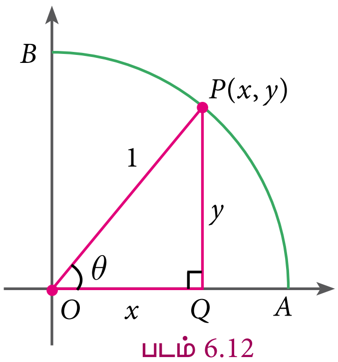
இதற்காக இங்கு 1 அலகு ஆரம் கொண்ட வட்டத்தை வரைகிறோம். ஏன்?



படம் 6.11

இவ்வட்டத்திற்குள் நாம் எடுத்துக்கொள்ளப்போகும் அனைத்து முக்கோணங்களுக்கும் கர்ணத்தின் அளவு 1 அலகாகவே இருப்பதால், கோணங்களையும், விகிதங்களையும் ஒப்பிடுவதற்கு மிக எளிதாக இருக்கும்.

நாம் மிகை மதிப்புகளை மட்டும் கணக்கிடுவதால், (தூரங்களின் அளவுகள் என்பதால்) அதற்குரிய முதற் காற்பகுதியை மட்டும் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 6.12

$P(x,y)$ என்பது ஓரலகு வட்டத்தின் மீது முதற் காற்பகுதியில் உள்ள ஒரு புள்ளி எனில், $\angle POQ = \theta$

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y \; ; \quad \cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x \; ; \quad \tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

$\theta = 0°$ எனும்போது, OP ஆனது OA இன் மீது அமையும். இங்கு $A(1,0)$ என்பதால் $x = 1, \; y = 0$.

இதைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது,

$\sin 0° = 0$; $\operatorname{cosec} 0°$ = வரையறுக்கப்படவில்லை. (ஏன்?)

$\cos 0° = 1$; $\sec 0° = 1$

$\tan 0° = \frac{0}{1} = 0$; $\cot 0°$ = வரையறுக்கப்படவில்லை. (ஏன்?)

$\theta = 90°$ எனும்போது, OP ஆனது OB இன் மீது அமையும். இங்கு $B\,(0,1)$ என்பதால் $x = 0, y = 1$.

இதைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது,

$\sin 90° = 1$; $\operatorname{cosec} 90° = 1$

$\cos 90° = 0$; $\sec 90°$ = வரையறுக்கப்படவில்லை

$\tan 90° = \frac{1}{0}$ = வரையறுக்கப்படவில்லை ; $\cot 90° = 0$

இவ்வாறு பெறப்பட்ட அனைத்து முடிவுகளையும் அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

θ / முக்கோணவியல் விகிதங்கள்	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	வரையறுக்கப் படவில்லை
$\operatorname{cosec}\theta$	வரையறுக்கப் படவில்லை	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	வரையறுக்கப் படவில்லை
$\cot\theta$	வரையறுக்கப் படவில்லை	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

எடுத்துக்காட்டு 6.5 மதிப்பு காண்க. (i) $\sin 30° + \cos 30°$ (ii) $\tan 60°.\cot 60°$

(iii) $\dfrac{\tan 45°}{\tan 30° + \tan 60°}$ (iv) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$

தீர்வு

(i) $\sin 30° + \cos 30° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\tan 60°.\cot 60° = \sqrt{3} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$

(iii) $$\frac{\tan 45°}{\tan 30° + \tan 60°} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\dfrac{1+3}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(iv) $$\sin^2 45° + \cos^2 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

குறிப்பு

- $(\sin\theta)^2$ என்பதை $\sin^2\theta = (\sin\theta)\times(\sin\theta)$ என்போம்.
- $(\sin\theta)^2$ என்பதை $\sin\theta^2$ என எழுதக்கூடாது, ஏனெனில் இது $\sin(\theta\times\theta)$ எனப் பொருள்படும்.

சிந்தனைக் களம்

கீழ்க்கண்ட குழுக்களில் உள்ளவை போன்ற மூன்று எண்களைப் பித்தகோரியன் எண்கள் (அல்லது Pythagorean Triplets) என்பர். அவை மூன்றும் சேர்ந்து ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகளாக அமையும்.

(i) 3, 4, 5 (ii) 5, 12, 13 (iii) 7, 24, 25

மேற்குறிப்பிட்ட ஏதாவது ஒரு பித்தகோரியன் எண்கள் குழுவில் உள்ள மூன்று எண்களையும் பூச்சியமற்ற ஒரு மாறிலியால் பெருக்கவும். தற்போது கிடைக்கப் பெற்றுள்ள புதிய மூன்று எண்களும் பித்தகோரியன் எண்களா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.6 பின்வருவனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

(i) $(\cos 0° + \sin 45° + \sin 30°)(\sin 90° - \cos 45° + \cos 60°)$

(ii) $\tan^2 60° - 2\tan^2 45° - \cot^2 30° + 2\sin^2 30° + \dfrac{3}{4}\text{cosec}^2 45°$

தீர்வு

(i) $(\cos 0° + \sin 45° + \sin 30°)(\sin 90° - \cos 45° + \cos 60°)$

$$= \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right]\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right]\left[\frac{2\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{3\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2}}\right]\left[\frac{3\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{18 - 4}{4\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{14}{4 \times 2} = \frac{7}{4}$$

(ii) $\tan^2 60° - 2\tan^2 45° - \cot^2 30° + 2\sin^2 30° + \frac{3}{4}\text{cosec}^2 45°$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2(1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$= 3 - 2 - 3 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= -2 + \frac{4}{2} = -2 + 2 = 0$$

குறிப்பு

- ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கோணங்கள் $45° : 45° : 90°$ என்ற அளவில் இருந்தால், அதன் பக்கங்கள் $1 : 1 : \sqrt{2}$.என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.
- இதைப் போலவே கோணங்கள் $30° : 60° : 90°$ என்ற விகிதத்தில் இருந்தால் அதன் பக்கங்கள் $1 : \sqrt{3} : 2$ என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.

(உங்கள் வடிவியல் கணித உபகரணப் பெட்டியில் இருக்கும் இரு மூலைமட்டக் கருவிகளே (*Set Squares*) மேற்கூறிய இரு முக்கோணங்களுக்கு மிகச் சிறந்த எடுத்துக்காட்டு ஆகும்.)

பயிற்சி 6.2

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்க.

   (i) $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$

   (ii) $1 + \tan^2 30° = \sec^2 30°$

   (iii) $\cos 90° = 1 - 2\sin^2 45° = 2\cos^2 45° - 1$

   (iv) $\sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60° = \sin 90°$

2. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

   (i) $\dfrac{\tan 45°}{\text{cosec} 30°} + \dfrac{\sec 60°}{\cot 45°} - \dfrac{5\sin 90°}{2\cos 0°}$

(ii) $(\sin 90° + \cos 60° + \cos 45°) \times (\sin 30° + \cos 0° - \cos 45°)$

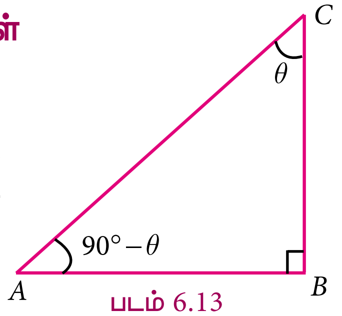
(iii) $\sin^2 30° - 2\cos^3 60° + 3\tan^4 45°$

3. $A = 30°$ எனில், $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ என்பதைச் சரிப்பார்க்கவும்.

4. $x = 15°$ எனில், $8\sin 2x.\cos 4x.\sin 6x$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

6.3 நிரப்புக் கோணங்களுக்கான முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (Trigonometric Ratios for Complementary Angles)

இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் 90° எனில், அவை நிரப்புக் கோணங்கள் என்பதை நினைவுகூர்வோம். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் உள்ள இரு குறுங்கோணங்களைப் பற்றி என்ன கூறலாம்?



படம் 6.13

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்திலுள்ள இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் 90°.எனவே செங்கோண முக்கோணத்தில் உள்ள இரு குறுங்கோணங்கள் எப்பொழுதுமே ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்கள் ஆகும்.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் 6.13 இல், முக்கோணம் ABC ஆனது B இல் செங்கோணத்தைத் தாங்கியுள்ளது. மேலும் $\angle C = \theta$ எனில், $\angle A = 90° - \theta$ ஆகும்.

கோணம் θ ஐப் பொறுத்து

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{AB}{AC} & \operatorname{cosec}\theta &= \frac{AC}{AB} \\ \cos\theta &= \frac{BC}{AC} & \sec\theta &= \frac{AC}{BC} \\ \tan\theta &= \frac{AB}{BC} & \cot\theta &= \frac{BC}{AB} \end{aligned}\right\} \quad ....(1)$$

இதைப் போலவே கோணம் (90° – θ) ஐப் பொறுத்து,

$$\left.\begin{aligned} \sin(90°-\theta) &= \frac{BC}{AC} & \operatorname{cosec}(90°-\theta) &= \frac{AC}{BC} \\ \cos(90°-\theta) &= \frac{AB}{AC} & \sec(90°-\theta) &= \frac{AC}{AB} \\ \tan(90°-\theta) &= \frac{BC}{AB} & \cot(90°-\theta) &= \frac{AB}{BC} \end{aligned}\right\} \quad .....(2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ ஒப்பிட,

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \cos(90°-\theta) & \operatorname{cosec}\theta &= \sec(90°-\theta) \\ \cos\theta &= \sin(90°-\theta) & \sec\theta &= \operatorname{cosec}(90°-\theta) \\ \tan\theta &= \cot(90°-\theta) & \cot\theta &= \tan(90°-\theta) \end{aligned}$$

எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.7

கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் கேட்கப்பட்டுள்ள முக்கோணவியல் விகிதங்களில் மாற்றிக் கூறுக. (i) $\sin 74°$ இன் மதிப்பை cosine இல் (ii) $\tan 12°$ இன் மதிப்பை cotangent இல் (iii) cosec39° இன் மதிப்பை secant இல்

தீர்வு

(i) $\sin 74° = \sin(90° - 16°)$ (ஏனெனில், $90° - 16° = 74°$)

வலப்பக்கமானது $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

எனவே, $\sin 74° = \cos 16°$

(ii) $\tan 12° = \tan(90° - 78°)$ (ஏனெனில், , $12° = 90° - 78°$)

வலப்பக்கமானது $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

எனவே, $\tan 12° = \cot 78°$

(iii) $\operatorname{cosec} 39° = \operatorname{cosec}(90° - 51°)$ (ஏனெனில், $39° = 90° - 51°$)

வலப்பக்கமானது $\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

எனவே, $\operatorname{cosec} 39° = \sec 51°$

எடுத்துக்காட்டு 6.8 மதிப்பிடுக. (i) $\dfrac{\sin 49°}{\cos 41°}$ (ii) $\dfrac{\sec 63°}{\operatorname{cosec} 27°}$

தீர்வு

(i) $\dfrac{\sin 49°}{\cos 41°}$

$\sin 49° = \sin(90° - 41°) = \cos 41°$ ஏனெனில், $49° + 41° = 90°$ (நிரப்புக் கோணங்கள்),

$\sin 49° = \cos 41°$ எனப் பிரதியிட நாம் பெறுவது, $\dfrac{\cos 41°}{\cos 41°} = 1$

(ii) $\dfrac{\sec 63°}{\operatorname{cosec} 27°}$

$\sec 63° = \sec(90° - 27°) = \operatorname{cosec} 27°$, எனப் பிரதியிட,

(இங்கு, $63°$ மற்றும் $27°$ நிரப்புக் கோணங்கள்) நாம் பெறுவது,

$$\frac{\sec 63°}{\operatorname{cosec} 27°} = \frac{\operatorname{cosec} 27°}{\operatorname{cosec} 27°} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 6.9 மதிப்புக் காண்க. (i) $\tan 7° \tan 23° \tan 60° \tan 67° \tan 83°$

(ii) $\dfrac{\cos 35°}{\sin 55°} + \dfrac{\sin 12°}{\cos 78°} - \dfrac{\cos 18°}{\sin 72°}$

தீர்வு

(i) $\tan 7° \tan 23° \tan 60° \tan 67° \tan 83°$

$= \tan 7° \tan 83° \tan 23° \tan 67° \tan 60°$ (நிரப்புக் கோணங்களைக் குழுப்படுத்த)

$= \tan 7° \tan(90° - 7°) \tan 23° \tan(90° - 23°) \tan 60°$

$= (\tan 7° \cot 7°)(\tan 23° \cot 23°) \tan 60°$

$$= (1) \times (1) \times \tan 60^\circ$$

$$= \tan 60^\circ \qquad = \sqrt{3}$$

(ii) $\dfrac{\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

$$= \frac{\cos(90^\circ - 55^\circ)}{\sin 55^\circ} + \frac{\sin(90^\circ - 78^\circ)}{\cos 78^\circ} - \frac{\cos(90^\circ - 72^\circ)}{\sin 72^\circ}$$

$$= \frac{\sin 55^\circ}{\sin 55^\circ} + \frac{\cos 78^\circ}{\cos 78^\circ} - \frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ}$$

$$= 1 + 1 - 1 = 1$$

[ஏனெனில்,
$\cos 35^\circ = \cos(90^\circ - 55^\circ)$
$\sin 12^\circ = \sin(90^\circ - 78^\circ)$
$\cos 18^\circ = \cos(90^\circ - 72^\circ)$]

எடுத்துக்காட்டு 6.10

(i) $\operatorname{cosec} A = \sec 34^\circ$ எனில், A இன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $\tan B = \cot 47^\circ$ எனில், B இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

(i) $\operatorname{cosec} A = \sec(90^\circ - A)$ என நாம் அறிவோம்.

$$\sec(90^\circ - A) = \sec(34^\circ)$$

$$90^\circ - A = 34^\circ$$

$$A = 90^\circ - 34^\circ$$

$$A = 56^\circ$$

(ii) $\tan B = \cot(90^\circ - B)$ என நாம் அறிவோம்.

$$\cot(90^\circ - B) = \cot 47^\circ$$

$$90^\circ - B = 47^\circ$$

$$B = 90^\circ - 47^\circ$$

$$B = 43^\circ$$

பயிற்சி 6.3

1. கீழ்க்காண்பவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\left(\dfrac{\cos 47^\circ}{\sin 43^\circ}\right)^2 + \left(\dfrac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}\right)^2 - 2\cos^2 45^\circ$

(ii) $\dfrac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} + \dfrac{\cos 59^\circ}{\sin 31^\circ} + \dfrac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} - 8\cos^2 60^\circ$

(iii) $\tan 15^\circ \tan 30^\circ \tan 45^\circ \tan 60^\circ \tan 75^\circ$

(iv) $\dfrac{\cot\theta}{\tan(90^\circ - \theta)} + \dfrac{\cos(90^\circ - \theta)\tan\theta\sec(90^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ - \theta)\cot(90^\circ - \theta)\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)}$

சிந்தனைக் களம்

(i) $\sin\theta$ இன் குறைந்தளவு மற்றும் அதிகளவு மதிப்பு எவ்வளவு?

(ii) $\cos\theta$ இன் குறைந்தளவு மற்றும் அதிகளவு மதிப்பு எவ்வளவு?

6.4 முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தும் முறை (Method of using Trigonometric Table)

$0°$, $30°$, $45°$, $60°$ மற்றும் $90°$ போன்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளை நாம் கணக்கிடக் கற்றுக்கொண்டோம். ஆனால் சில சமயங்களில் அனைத்துக் குறுங்கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளையும் நாம் கணக்கிட வேண்டியுள்ளது. எனவே முக்கோணவியல் விகித அட்டவணையைப் பயன்படுத்த நாம் கற்றுக்கொள்வோம்.

இங்கு ஒரு பாகை $(1°)$ என்பது 60 நிமிடங்களாகவும் $(60')$ மற்றும் ஒரு நிமிடம் $(1')$ என்பது 60 நொடிகளாகவும் $(60'')$ பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. எனவே, $1° = 60'$ மற்றும் $1' = 60''$.

முக்கோணவியல் விகித அட்டவணையானது $0°$ முதல் $90°$ வரையான கோணங்களை $60'$ நிமிடத்தின் சம இடைவெளிகளாகப் பிரித்து, அவற்றின் மதிப்புகளை நான்கு தசம இடத் திருத்தமாகக் கொண்டுள்ளது. இந்த அட்டவணையானது மூன்று பகுதிகளைக் கொண்டது.

இடது ஓரமாக உள்ள நிரலானது $0°$ முதல் $90°$ வரை பாகை அளவுகளைக் கொண்டது. அதைத் தொடர்ந்து பத்து நிரல்கள் $0', 6', 12', 18', 24', 30', 36', 42', 48'$ மற்றும் $54'$ எனப் பத்துத் தலைப்புகளின் கீழ் நிமிடங்கள் வரிசையாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பொது வித்தியாசம் என்ற தலைப்பில் ஐந்து நிரல்கள் 1, 2, 3, 4 மற்றும் 5 என்ற மதிப்புகள் இடம்பெற்றுள்ளன.

மேலே குறிப்பிட்ட பத்து நிரலில் உள்ள நிமிட அளவுகளைத் தவிரப் பிற கோண அளவுகளுக்கு ஏற்றவாறு பொது வித்தியாசங்களை கூட்டியோ, கழித்தோ அதன் மதிப்புகளைப் பெறலாம். sine மற்றும் tangent விகிதங்களுக்குப் பொது வித்தியாசத்தைக் கூட்டியும் cosine விகிதங்களுக்குப் பொது வித்தியாசத்தைக் கழித்தும் கோண விகித மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கணக்கிடும் முறையைப் புரிந்துக்கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.11

$\sin 64°34'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	பொது வித்தியாசம்				
	$0.0°$	$0.1°$	$0.2°$	$0.3°$	$0.4°$	$0.5°$	$0.6°$	$0.7°$	$0.8°$	$0.9°$	1	2	3	4	5
$64°$						0.9026								5	

$64°34' = 64°30' + 4'$ என எழுதலாம்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\sin 64°30' = 0.9026$

பொது வித்தியாசம் $4' = 5$ (sine –ற்குப் பொது வித்தியாசத்தைக் கூட்டவும்)

$\sin 64°34' = 0.9031$

எடுத்துக்காட்டு 6.12 $\cos 19°59'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
19°										0.9403					5

$19°59' = 19°54' + 5'$ என எழுதலாம்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\cos 19°54' = 0.9403$

பொது வித்தியாசம் $5' =$ 5 (cosine –ற்குப் பொது வித்தியாசத்தைக் கழிக்கவும்)

$\cos 19°59' = 0.9398$

எடுத்துக்காட்டு 6.13 $\tan 70°13'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
70°			2.7776								26				

$70°13' = 70°12' + 1'$ என எழுதலாம்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\tan 70°12' = 2.7776$

பொது வித்தியாசம் $1' =$ 26 (tan –ற்குப் பொது வித்தியாசத்தைக் கூட்டவும்)

$\tan 70°13' = 2.7802$

எடுத்துக்காட்டு 6.14 மதிப்பு காண்க. (i) $\sin 38°36' + \tan 12°12'$ (ii) $\tan 60°25' - \cos 49°20'$

தீர்வு

(i) $\sin 38°36' + \tan 12°12'$

$\sin 38°36' = 0.6239$

$\tan 12°12' = 0.2162$

$\sin 38°36' + \tan 12°12' = 0.8401$

(ii) $\tan 60°25' - \cos 49°20'$

$\tan 60°25' = 1.7603 + 0.0012 = 1.7615$

$\cos 49°20' = 0.6521 - 0.0004 = 0.6517$

$\tan 60°25' - \cos 49°20' = 1.1098$

எடுத்துக்காட்டு 6.15

θ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\sin\theta = 0.9858$ (ii) $\cos\theta = 0.7656$

தீர்வு

(i) $\sin\theta = 0.9858 = 0.9857 + 0.0001$

அட்டவணையிலிருந்து, $0.9857 = 80°18'$

பொது வித்தியாசம் $1 = 2'$

$0.9858 = 80°20'$

$\sin\theta = 0.9858 = \sin 80°20'$

$\theta = 80°20'$

(iii) $\cos\theta = 0.7656 = 0.7660 - 0.0004$

அட்டவணையிலிருந்து, $0.7660 = 40°0'$

பொது வித்தியாசம் $4 = 2'$ (பொது வித்தியாசத்தைக் கழிக்கவும்)

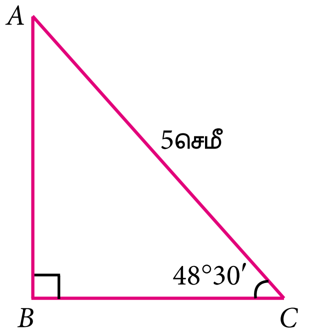
$0.7656 = 40°2'$

$\cos\theta = 0.7656 = \cos 40°2'$

$\theta = 40°2'$

எடுத்துக்காட்டு 6.16

கர்ணம் 5 செமீ மற்றும் ஒரு குறுங்கோணம் $48°30'$ கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.



படம் 6.14

தீர்வு

படத்திலிருந்து,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$
$$\sin 48°30' = \frac{AB}{5}$$
$$0.7490 = \frac{AB}{5}$$
$$5 \times 0.7490 = AB$$
$$AB = 3.7450 \text{ செமீ}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$
$$\cos 48°30' = \frac{BC}{5}$$
$$0.6626 = \frac{BC}{5}$$
$$0.6626 \times 5 = BC$$
$$BC = 3.313 \text{ செமீ}$$

முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}bh$

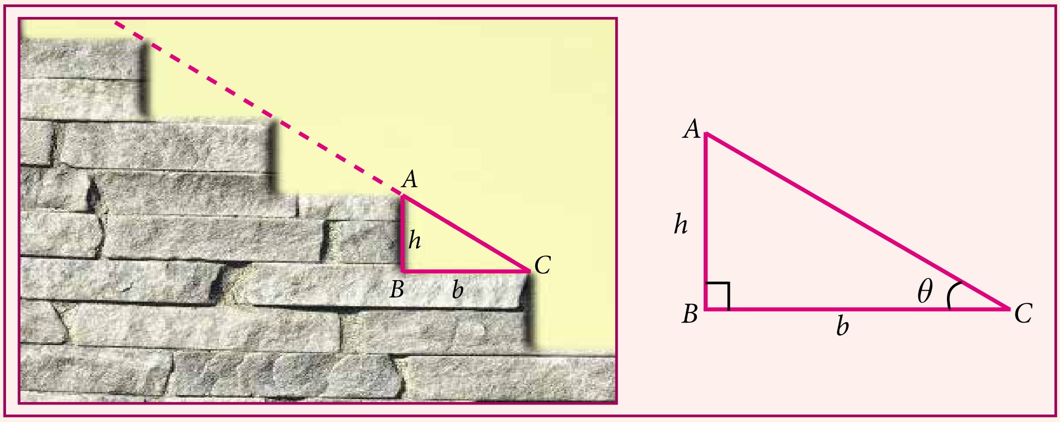
$$= \frac{1}{2} \times BC \times AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 3.3130 \times 3.7450$$

$$= 1.6565 \times 3.7450 \quad = 6.2035925 \text{ செமீ}^2$$

செயல்பாடு

உங்கள் வீட்டின் படிகளைக் கவனியுங்கள். அவற்றில் ஒரு படியின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரங்களைக் கணக்கிடுக. அதைக் கீழ்க்காணும் படத்தில் குறித்துப் படியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.



(i) ஒரே உயரம் மற்றும் அகலங்களைக் கொண்ட வேறுபட்ட படிக்கட்டுகளின் ஏற்றக் கோணங்களை ஒப்பிடவும். மேலும் அவற்றை உற்று நோக்கி விவாதிக்கவும்.

(ii) சில நேரங்களில் வீட்டில் உள்ள சில படிகள் ஒரே உயரத்தில் இல்லாமல் இருக்கலாம். அது போல் ஒரே அகலமும் வெவ்வேறு உயரங்களும் கொண்ட படிகளின் ஏற்றக் கோணங்களையும் கணக்கிட்டு ஒப்பிட்டு விவாதிக்கவும்.

பயிற்சி 6.4

1. கீழ்க்காண்பனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

   (i) $\sin 49°$ (ii) $\cos 74°39'$ (iii) $\tan 54°26'$ (iv) $\sin 21°21'$ (v) $\cos 33°53'$ (vi) $\tan 70°17'$

2. θ இன் மதிப்பு காண்க.

   (i) $\sin\theta = 0.9975$ (ii) $\cos\theta = 0.6763$ (iii) $\tan\theta = 0.0720$

   (iv) $\cos\theta = 0.0410$ (v) $\tan\theta = 7.5958$

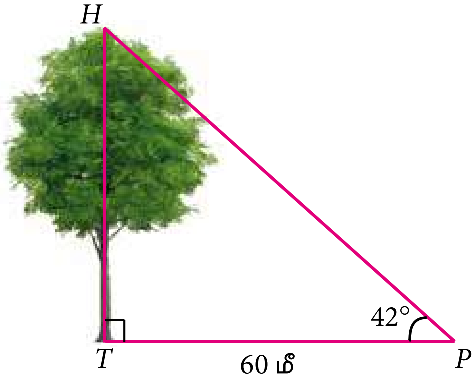
3. கீழ்க்காண்பனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

   (i) $\sin 65°39' + \cos 24°57' + \tan 10°10'$ $\tan 70°58' + \cos 15°26' - \sin 84°59'$

4. கர்ணம் 10 செமீ மற்றும் ஒரு குறுங்கோண அளவு $24°24'$ கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

5. 5மீ நீளமுள்ள ஓர் ஏணியானது சுவற்றிலிருந்து 4மீ தொலைவில் அடிப்பாகம் தரையைத் தொடுமாறு சுவற்றின் மீது சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது எனில், ஏணி தரைப்பகுதியுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் காண்க.

6. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், HT என்பது நேரான ஒரு மரத்தின் உயரத்தைக் குறிக்கிறது. மரத்தின் அடிப்பாகத்திலிருந்து 60 மீட்டர் தொலைவிலுள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து மரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $(\angle P)$ 42° எனில் மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.



பயிற்சி 6.5

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $\sin 30^\circ = x$ மற்றும் $\cos 60^\circ = y$ எனில், $x^2 + y^2$ இன் மதிப்பு

   (1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) $\sin 90^\circ$ (4) $\cos 90^\circ$

2. $\tan\theta = \cot 37^\circ$ எனில், θ இன் மதிப்பு

   (1) 37° (2) 53° (3) 90° (4) 1°

3. $\tan 72^\circ \tan 18^\circ$ இன் மதிப்பு

   (1) 0 (2) 1 (3) 18° (4) 72°

4. $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$ இன் மதிப்பு

   (1) $\cos 60^\circ$ (2) $\sin 60^\circ$ (3) $\tan 60^\circ$ (4) $\sin 30^\circ$

5. $2\sin 2\theta = \sqrt{3}$ எனில், θ இன் மதிப்பு

   (1) 90° (2) 30° (3) 45° (4) 60°

6. $3\sin 70^\circ \sec 20^\circ + 2\sin 49^\circ \sec 51^\circ$ இன் மதிப்பு

   (1) 2 (2) 3 (3) 5 (4) 6

7. $\dfrac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ}$ இன் மதிப்பு

   (1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) $\frac{1}{2}$

8. $\text{cosec}(70^\circ+\theta) - \sec(20^\circ-\theta) + \tan(65^\circ+\theta) - \cot(25^\circ-\theta)$ இன் மதிப்பு

   (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

9. $\tan 1^\circ \ \tan 2^\circ \ \tan 3^\circ \ldots \tan 89^\circ$ இன் மதிப்பு

   (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ மற்றும் $\cos\beta = \frac{1}{2}$ எனில், $\alpha + \beta$ இன் மதிப்பு

    (1) 0° (2) 90° (3) 30° (4) 60°

F81EIA

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

$\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$
$\cos\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\sec\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$
$\tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$	$\cot\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$

- முக்கோணவியல் விகிதங்களின் தலைகீழிகள்

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- நிரப்புக் கோணங்களுக்கான முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

$$\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta) \qquad \text{cosec}\,\theta = \sec(90^\circ - \theta)$$

$$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta) \qquad \sec\theta = \text{cosec}(90^\circ - \theta)$$

$$\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta) \qquad \cot\theta = \tan(90^\circ - \theta)$$

இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது

படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, GeoGebra வின் "Trigonometry" பக்கத்திற்குச் செல்க. Trigonometric ratios, Complimentary angles மற்றும் Kite problem ஆகிய மூன்று தலைப்புகளில் பணித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

புள்ளிகளையும் விகிதங்களையும் மாற்றுவதற்கு உரிய மதிப்பிற்கு நழுவலை நகர்த்தவும். கணக்குகளைச் செய்து விடைகளைச் சரி பார்க்கவும்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

முக்கோணவியல் : https://ggbm.at/hkwnccr6 or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

NATURAL SINES

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0366	0.0384	0.0401	0.0419	0.0436	0.0454	0.0471	0.0488	0.0506	3	6	9	12	15
3	0.0523	0.0541	0.0558	0.0576	0.0593	0.0610	0.0628	0.0645	0.0663	0.0680	3	6	9	12	15
4	0.0698	0.0715	0.0732	0.0750	0.0767	0.0785	0.0802	0.0819	0.0837	0.0854	3	6	9	12	15
5	0.0872	0.0889	0.0906	0.0924	0.0941	0.0958	0.0976	0.0993	0.1011	0.1028	3	6	9	12	14
6	0.1045	0.1063	0.1080	0.1097	0.1115	0.1132	0.1149	0.1167	0.1184	0.1201	3	6	9	12	14
7	0.1219	0.1236	0.1253	0.1271	0.1288	0.1305	0.1323	0.1340	0.1357	0.1374	3	6	9	12	14
8	0.1392	0.1409	0.1426	0.1444	0.1461	0.1478	0.1495	0.1513	0.1530	0.1547	3	6	9	12	14
9	0.1564	0.1582	0.1599	0.1616	0.1633	0.1650	0.1668	0.1685	0.1702	0.1719	3	6	9	12	14
10	0.1736	0.1754	0.1771	0.1788	0.1805	0.1822	0.1840	0.1857	0.1874	0.1891	3	6	9	12	14
11	0.1908	0.1925	0.1942	0.1959	0.1977	0.1994	0.2011	0.2028	0.2045	0.2062	3	6	9	11	14
12	0.2079	0.2096	0.2113	0.2130	0.2147	0.2164	0.2181	0.2198	0.2215	0.2233	3	6	9	11	14
13	0.2250	0.2267	0.2284	0.2300	0.2317	0.2334	0.2351	0.2368	0.2385	0.2402	3	6	8	11	14
14	0.2419	0.2436	0.2453	0.2470	0.2487	0.2504	0.2521	0.2538	0.2554	0.2571	3	6	8	11	14
15	0.2588	0.2605	0.2622	0.2639	0.2656	0.2672	0.2689	0.2706	0.2723	0.2740	3	6	8	11	14
16	0.2756	0.2773	0.2790	0.2807	0.2823	0.2840	0.2857	0.2874	0.2890	0.2907	3	6	8	11	14
17	0.2924	0.2940	0.2957	0.2974	0.2990	0.3007	0.3024	0.3040	0.3057	0.3074	3	6	8	11	14
18	0.3090	0.3107	0.3123	0.3140	0.3156	0.3173	0.3190	0.3206	0.3223	0.3239	3	6	8	11	14
19	0.3256	0.3272	0.3289	0.3305	0.3322	0.3338	0.3355	0.3371	0.3387	0.3404	3	5	8	11	14
20	0.3420	0.3437	0.3453	0.3469	0.3486	0.3502	0.3518	0.3535	0.3551	0.3567	3	5	8	11	14
21	0.3584	0.3600	0.3616	0.3633	0.3649	0.3665	0.3681	0.3697	0.3714	0.3730	3	5	8	11	14
22	0.3746	0.3762	0.3778	0.3795	0.3811	0.3827	0.3843	0.3859	0.3875	0.3891	3	5	8	11	14
23	0.3907	0.3923	0.3939	0.3955	0.3971	0.3987	0.4003	0.4019	0.4035	0.4051	3	5	8	11	14
24	0.4067	0.4083	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4163	0.4179	0.4195	0.4210	3	5	8	11	13
25	0.4226	0.4242	0.4258	0.4274	0.4289	0.4305	0.4321	0.4337	0.4352	0.4368	3	5	8	11	13
26	0.4384	0.4399	0.4415	0.4431	0.4446	0.4462	0.4478	0.4493	0.4509	0.4524	3	5	8	10	13
27	0.4540	0.4555	0.4571	0.4586	0.4602	0.4617	0.4633	0.4648	0.4664	0.4679	3	5	8	10	13
28	0.4695	0.4710	0.4726	0.4741	0.4756	0.4772	0.4787	0.4802	0.4818	0.4833	3	5	8	10	13
29	0.4848	0.4863	0.4879	0.4894	0.4909	0.4924	0.4939	0.4955	0.4970	0.4985	3	5	8	10	13
30	0.5000	0.5015	0.5030	0.5045	0.5060	0.5075	0.5090	0.5105	0.5120	0.5135	3	5	8	10	13
31	0.5150	0.5165	0.5180	0.5195	0.5210	0.5225	0.5240	0.5255	0.5270	0.5284	2	5	7	10	12
32	0.5299	0.5314	0.5329	0.5344	0.5358	0.5373	0.5388	0.5402	0.5417	0.5432	2	5	7	10	12
33	0.5446	0.5461	0.5476	0.5490	0.5505	0.5519	0.5534	0.5548	0.5563	0.5577	2	5	7	10	12
34	0.5592	0.5606	0.5621	0.5635	0.5650	0.5664	0.5678	0.5693	0.5707	0.5721	2	5	7	10	12
35	0.5736	0.5750	0.5764	0.5779	0.5793	0.5807	0.5821	0.5835	0.5850	0.5864	2	5	7	10	12
36	0.5878	0.5892	0.5906	0.5920	0.5934	0.5948	0.5962	0.5976	0.5990	0.6004	2	5	7	9	12
37	0.6018	0.6032	0.6046	0.6060	0.6074	0.6088	0.6101	0.6115	0.6129	0.6143	2	5	7	9	12
38	0.6157	0.6170	0.6184	0.6198	0.6211	0.6225	0.6239	0.6252	0.6266	0.6280	2	5	7	9	11
39	0.6293	0.6307	0.6320	0.6334	0.6347	0.6361	0.6374	0.6388	0.6401	0.6414	2	4	7	9	11
40	0.6428	0.6441	0.6455	0.6468	0.6481	0.6494	0.6508	0.6521	0.6534	0.6547	2	4	7	9	11
41	0.6561	0.6574	0.6587	0.6600	0.6613	0.6626	0.6639	0.6652	0.6665	0.6678	2	4	7	9	11
42	0.6691	0.6704	0.6717	0.6730	0.6743	0.6756	0.6769	0.6782	0.6794	0.6807	2	4	6	9	11
43	0.6820	0.6833	0.6845	0.6858	0.6871	0.6884	0.6896	0.6909	0.6921	0.6934	2	4	6	8	11
44	0.6947	0.6959	0.6972	0.6984	0.6997	0.7009	0.7022	0.7034	0.7046	0.7059	2	4	6	8	10

NATURAL SINES

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7083	0.7096	0.7108	0.7120	0.7133	0.7145	0.7157	0.7169	0.7181	2	4	6	8	10
46	0.7193	0.7206	0.7218	0.7230	0.7242	0.7254	0.7266	0.7278	0.7290	0.7302	2	4	6	8	10
47	0.7314	0.7325	0.7337	0.7349	0.7361	0.7373	0.7385	0.7396	0.7408	0.7420	2	4	6	8	10
48	0.7431	0.7443	0.7455	0.7466	0.7478	0.7490	0.7501	0.7513	0.7524	0.7536	2	4	6	8	10
49	0.7547	0.7559	0.7570	0.7581	0.7593	0.7604	0.7615	0.7627	0.7638	0.7649	2	4	6	8	9
50	0.7660	0.7672	0.7683	0.7694	0.7705	0.7716	0.7727	0.7738	0.7749	0.7760	2	4	6	7	9
51	0.7771	0.7782	0.7793	0.7804	0.7815	0.7826	0.7837	0.7848	0.7859	0.7869	2	4	5	7	9
52	0.7880	0.7891	0.7902	0.7912	0.7923	0.7934	0.7944	0.7955	0.7965	0.7976	2	4	5	7	9
53	0.7986	0.7997	0.8007	0.8018	0.8028	0.8039	0.8049	0.8059	0.8070	0.8080	2	3	5	7	9
54	0.8090	0.8100	0.8111	0.8121	0.8131	0.8141	0.8151	0.8161	0.8171	0.8181	2	3	5	7	8
55	0.8192	0.8202	0.8211	0.8221	0.8231	0.8241	0.8251	0.8261	0.8271	0.8281	2	3	5	7	8
56	0.8290	0.8300	0.8310	0.8320	0.8329	0.8339	0.8348	0.8358	0.8368	0.8377	2	3	5	6	8
57	0.8387	0.8396	0.8406	0.8415	0.8425	0.8434	0.8443	0.8453	0.8462	0.8471	2	3	5	6	8
58	0.8480	0.8490	0.8499	0.8508	0.8517	0.8526	0.8536	0.8545	0.8554	0.8563	2	3	5	6	8
59	0.8572	0.8581	0.8590	0.8599	0.8607	0.8616	0.8625	0.8634	0.8643	0.8652	1	3	4	6	7
60	0.8660	0.8669	0.8678	0.8686	0.8695	0.8704	0.8712	0.8721	0.8729	0.8738	1	3	4	6	7
61	0.8746	0.8755	0.8763	0.8771	0.8780	0.8788	0.8796	0.8805	0.8813	0.8821	1	3	4	6	7
62	0.8829	0.8838	0.8846	0.8854	0.8862	0.8870	0.8878	0.8886	0.8894	0.8902	1	3	4	5	7
63	0.8910	0.8918	0.8926	0.8934	0.8942	0.8949	0.8957	0.8965	0.8973	0.8980	1	3	4	5	6
64	0.8988	0.8996	0.9003	0.9011	0.9018	0.9026	0.9033	0.9041	0.9048	0.9056	1	3	4	5	6
65	0.9063	0.9070	0.9078	0.9085	0.9092	0.9100	0.9107	0.9114	0.9121	0.9128	1	2	4	5	6
66	0.9135	0.9143	0.9150	0.9157	0.9164	0.9171	0.9178	0.9184	0.9191	0.9198	1	2	3	5	6
67	0.9205	0.9212	0.9219	0.9225	0.9232	0.9239	0.9245	0.9252	0.9259	0.9265	1	2	3	4	6
68	0.9272	0.9278	0.9285	0.9291	0.9298	0.9304	0.9311	0.9317	0.9323	0.9330	1	2	3	4	5
69	0.9336	0.9342	0.9348	0.9354	0.9361	0.9367	0.9373	0.9379	0.9385	0.9391	1	2	3	4	5
70	0.9397	0.9403	0.9409	0.9415	0.9421	0.9426	0.9432	0.9438	0.9444	0.9449	1	2	3	4	5
71	0.9455	0.9461	0.9466	0.9472	0.9478	0.9483	0.9489	0.9494	0.9500	0.9505	1	2	3	4	5
72	0.9511	0.9516	0.9521	0.9527	0.9532	0.9537	0.9542	0.9548	0.9553	0.9558	1	2	3	3	4
73	0.9563	0.9568	0.9573	0.9578	0.9583	0.9588	0.9593	0.9598	0.9603	0.9608	1	2	2	3	4
74	0.9613	0.9617	0.9622	0.9627	0.9632	0.9636	0.9641	0.9646	0.9650	0.9655	1	2	2	3	4
75	0.9659	0.9664	0.9668	0.9673	0.9677	0.9681	0.9686	0.9690	0.9694	0.9699	1	1	2	3	4
76	0.9703	0.9707	0.9711	0.9715	0.9720	0.9724	0.9728	0.9732	0.9736	0.9740	1	1	2	3	3
77	0.9744	0.9748	0.9751	0.9755	0.9759	0.9763	0.9767	0.9770	0.9774	0.9778	1	1	2	3	3
78	0.9781	0.9785	0.9789	0.9792	0.9796	0.9799	0.9803	0.9806	0.9810	0.9813	1	1	2	2	3
79	0.9816	0.9820	0.9823	0.9826	0.9829	0.9833	0.9836	0.9839	0.9842	0.9845	1	1	2	2	3
80	0.9848	0.9851	0.9854	0.9857	0.9860	0.9863	0.9866	0.9869	0.9871	0.9874	0	1	1	2	2
81	0.9877	0.9880	0.9882	0.9885	0.9888	0.9890	0.9893	0.9895	0.9898	0.9900	0	1	1	2	2
82	0.9903	0.9905	0.9907	0.9910	0.9912	0.9914	0.9917	0.9919	0.9921	0.9923	0	1	1	2	2
83	0.9925	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936	0.9938	0.9940	0.9942	0.9943	0	1	1	1	2
84	0.9945	0.9947	0.9949	0.9951	0.9952	0.9954	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0	1	1	1	2
85	0.9962	0.9963	0.9965	0.9966	0.9968	0.9969	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	0	0	1	1	1
86	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981	0.9982	0.9983	0.9984	0.9985	0	0	1	1	1
87	0.9986	0.9987	0.9988	0.9989	0.9990	0.9990	0.9991	0.9992	0.9993	0.9993	0	0	0	1	1
88	0.9994	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	0	0	0	0	0
89	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0	0	0

NATURAL COSINES

(பொது வித்தியாசம் பகுதியில் உள்ள எண்களைக் கழிக்க வேண்டும் கூட்டக் கூடாது)

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0	0	0	0	0
1	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0	0	0	0	0
2	0.9994	0.9993	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9990	0.9989	0.9988	0.9987	0	0	0	1	1
3	0.9986	0.9985	0.9984	0.9983	0.9982	0.9981	0.9980	0.9979	0.9978	0.9977	0	0	1	1	1
4	0.9976	0.9974	0.9973	0.9972	0.9971	0.9969	0.9968	0.9966	0.9965	0.9963	0	0	1	1	1
5	0.9962	0.9960	0.9959	0.9957	0.9956	0.9954	0.9952	0.9951	0.9949	0.9947	0	1	1	1	2
6	0.9945	0.9943	0.9942	0.9940	0.9938	0.9936	0.9934	0.9932	0.9930	0.9928	0	1	1	1	2
7	0.9925	0.9923	0.9921	0.9919	0.9917	0.9914	0.9912	0.9910	0.9907	0.9905	0	1	1	2	2
8	0.9903	0.9900	0.9898	0.9895	0.9893	0.9890	0.9888	0.9885	0.9882	0.9880	0	1	1	2	2
9	0.9877	0.9874	0.9871	0.9869	0.9866	0.9863	0.9860	0.9857	0.9854	0.9851	0	1	1	2	2
10	0.9848	0.9845	0.9842	0.9839	0.9836	0.9833	0.9829	0.9826	0.9823	0.9820	1	1	2	2	3
11	0.9816	0.9813	0.9810	0.9806	0.9803	0.9799	0.9796	0.9792	0.9789	0.9785	1	1	2	2	3
12	0.9781	0.9778	0.9774	0.9770	0.9767	0.9763	0.9759	0.9755	0.9751	0.9748	1	1	2	3	3
13	0.9744	0.9740	0.9736	0.9732	0.9728	0.9724	0.9720	0.9715	0.9711	0.9707	1	1	2	3	3
14	0.9703	0.9699	0.9694	0.9690	0.9686	0.9681	0.9677	0.9673	0.9668	0.9664	1	1	2	3	4
15	0.9659	0.9655	0.9650	0.9646	0.9641	0.9636	0.9632	0.9627	0.9622	0.9617	1	2	2	3	4
16	0.9613	0.9608	0.9603	0.9598	0.9593	0.9588	0.9583	0.9578	0.9573	0.9568	1	2	2	3	4
17	0.9563	0.9558	0.9553	0.9548	0.9542	0.9537	0.9532	0.9527	0.9521	0.9516	1	2	3	3	4
18	0.9511	0.9505	0.9500	0.9494	0.9489	0.9483	0.9478	0.9472	0.9466	0.9461	1	2	3	4	5
19	0.9455	0.9449	0.9444	0.9438	0.9432	0.9426	0.9421	0.9415	0.9409	0.9403	1	2	3	4	5
20	0.9397	0.9391	0.9385	0.9379	0.9373	0.9367	0.9361	0.9354	0.9348	0.9342	1	2	3	4	5
21	0.9336	0.9330	0.9323	0.9317	0.9311	0.9304	0.9298	0.9291	0.9285	0.9278	1	2	3	4	5
22	0.9272	0.9265	0.9259	0.9252	0.9245	0.9239	0.9232	0.9225	0.9219	0.9212	1	2	3	4	6
23	0.9205	0.9198	0.9191	0.9184	0.9178	0.9171	0.9164	0.9157	0.9150	0.9143	1	2	3	5	6
24	0.9135	0.9128	0.9121	0.9114	0.9107	0.9100	0.9092	0.9085	0.9078	0.9070	1	2	4	5	6
25	0.9063	0.9056	0.9048	0.9041	0.9033	0.9026	0.9018	0.9011	0.9003	0.8996	1	3	4	5	6
26	0.8988	0.8980	0.8973	0.8965	0.8957	0.8949	0.8942	0.8934	0.8926	0.8918	1	3	4	5	6
27	0.8910	0.8902	0.8894	0.8886	0.8878	0.8870	0.8862	0.8854	0.8846	0.8838	1	3	4	5	7
28	0.8829	0.8821	0.8813	0.8805	0.8796	0.8788	0.8780	0.8771	0.8763	0.8755	1	3	4	6	7
29	0.8746	0.8738	0.8729	0.8721	0.8712	0.8704	0.8695	0.8686	0.8678	0.8669	1	3	4	6	7
30	0.8660	0.8652	0.8643	0.8634	0.8625	0.8616	0.8607	0.8599	0.8590	0.8581	1	3	4	6	7
31	0.8572	0.8563	0.8554	0.8545	0.8536	0.8526	0.8517	0.8508	0.8499	0.8490	2	3	5	6	8
32	0.8480	0.8471	0.8462	0.8453	0.8443	0.8434	0.8425	0.8415	0.8406	0.8396	2	3	5	6	8
33	0.8387	0.8377	0.8368	0.8358	0.8348	0.8339	0.8329	0.8320	0.8310	0.8300	2	3	5	6	8
34	0.8290	0.8281	0.8271	0.8261	0.8251	0.8241	0.8231	0.8221	0.8211	0.8202	2	3	5	7	8
35	0.8192	0.8181	0.8171	0.8161	0.8151	0.8141	0.8131	0.8121	0.8111	0.8100	2	3	5	7	8
36	0.8090	0.8080	0.8070	0.8059	0.8049	0.8039	0.8028	0.8018	0.8007	0.7997	2	3	5	7	9
37	0.7986	0.7976	0.7965	0.7955	0.7944	0.7934	0.7923	0.7912	0.7902	0.7891	2	4	5	7	9
38	0.7880	0.7869	0.7859	0.7848	0.7837	0.7826	0.7815	0.7804	0.7793	0.7782	2	4	5	7	9
39	0.7771	0.7760	0.7749	0.7738	0.7727	0.7716	0.7705	0.7694	0.7683	0.7672	2	4	6	7	9
40	0.7660	0.7649	0.7638	0.7627	0.7615	0.7604	0.7593	0.7581	0.7570	0.7559	2	4	6	8	9
41	0.7547	0.7536	0.7524	0.7513	0.7501	0.7490	0.7478	0.7466	0.7455	0.7443	2	4	6	8	10
42	0.7431	0.7420	0.7408	0.7396	0.7385	0.7373	0.7361	0.7349	0.7337	0.7325	2	4	6	8	10
43	0.7314	0.7302	0.7290	0.7278	0.7266	0.7254	0.7242	0.7230	0.7218	0.7206	2	4	6	8	10
44	0.7193	0.7181	0.7169	0.7157	0.7145	0.7133	0.7120	0.7108	0.7096	0.7083	2	4	6	8	10

NATURAL COSINES

(பொது வித்தியாசம் பகுதியில் உள்ள எண்களைக் கழிக்க வேண்டும் கூட்டக் கூடாது)

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7059	0.7046	0.7034	0.7022	0.7009	0.6997	0.6984	0.6972	0.6959	2	4	6	8	10
46	0.6947	0.6934	0.6921	0.6909	0.6896	0.6884	0.6871	0.6858	0.6845	0.6833	2	4	6	8	11
47	0.6820	0.6807	0.6794	0.6782	0.6769	0.6756	0.6743	0.6730	0.6717	0.6704	2	4	6	9	11
48	0.6691	0.6678	0.6665	0.6652	0.6639	0.6626	0.6613	0.6600	0.6587	0.6574	2	4	7	9	11
49	0.6561	0.6547	0.6534	0.6521	0.6508	0.6494	0.6481	0.6468	0.6455	0.6441	2	4	7	9	11
50	0.6428	0.6414	0.6401	0.6388	0.6374	0.6361	0.6347	0.6334	0.6320	0.6307	2	4	7	9	11
51	0.6293	0.6280	0.6266	0.6252	0.6239	0.6225	0.6211	0.6198	0.6184	0.6170	2	5	7	9	11
52	0.6157	0.6143	0.6129	0.6115	0.6101	0.6088	0.6074	0.6060	0.6046	0.6032	2	5	7	9	12
53	0.6018	0.6004	0.5990	0.5976	0.5962	0.5948	0.5934	0.5920	0.5906	0.5892	2	5	7	9	12
54	0.5878	0.5864	0.5850	0.5835	0.5821	0.5807	0.5793	0.5779	0.5764	0.5750	2	5	7	9	12
55	0.5736	0.5721	0.5707	0.5693	0.5678	0.5664	0.5650	0.5635	0.5621	0.5606	2	5	7	10	12
56	0.5592	0.5577	0.5563	0.5548	0.5534	0.5519	0.5505	0.5490	0.5476	0.5461	2	5	7	10	12
57	0.5446	0.5432	0.5417	0.5402	0.5388	0.5373	0.5358	0.5344	0.5329	0.5314	2	5	7	10	12
58	0.5299	0.5284	0.5270	0.5255	0.5240	0.5225	0.5210	0.5195	0.5180	0.5165	2	5	7	10	12
59	0.5150	0.5135	0.5120	0.5105	0.5090	0.5075	0.5060	0.5045	0.5030	0.5015	3	5	8	10	13
60	0.5000	0.4985	0.4970	0.4955	0.4939	0.4924	0.4909	0.4894	0.4879	0.4863	3	5	8	10	13
61	0.4848	0.4833	0.4818	0.4802	0.4787	0.4772	0.4756	0.4741	0.4726	0.4710	3	5	8	10	13
62	0.4695	0.4679	0.4664	0.4648	0.4633	0.4617	0.4602	0.4586	0.4571	0.4555	3	5	8	10	13
63	0.4540	0.4524	0.4509	0.4493	0.4478	0.4462	0.4446	0.4431	0.4415	0.4399	3	5	8	10	13
64	0.4384	0.4368	0.4352	0.4337	0.4321	0.4305	0.4289	0.4274	0.4258	0.4242	3	5	8	11	13
65	0.4226	0.4210	0.4195	0.4179	0.4163	0.4147	0.4131	0.4115	0.4099	0.4083	3	5	8	11	13
66	0.4067	0.4051	0.4035	0.4019	0.4003	0.3987	0.3971	0.3955	0.3939	0.3923	3	5	8	11	14
67	0.3907	0.3891	0.3875	0.3859	0.3843	0.3827	0.3811	0.3795	0.3778	0.3762	3	5	8	11	14
68	0.3746	0.3730	0.3714	0.3697	0.3681	0.3665	0.3649	0.3633	0.3616	0.3600	3	5	8	11	14
69	0.3584	0.3567	0.3551	0.3535	0.3518	0.3502	0.3486	0.3469	0.3453	0.3437	3	5	8	11	14
70	0.3420	0.3404	0.3387	0.3371	0.3355	0.3338	0.3322	0.3305	0.3289	0.3272	3	5	8	11	14
71	0.3256	0.3239	0.3223	0.3206	0.3190	0.3173	0.3156	0.3140	0.3123	0.3107	3	6	8	11	14
72	0.3090	0.3074	0.3057	0.3040	0.3024	0.3007	0.2990	0.2974	0.2957	0.2940	3	6	8	11	14
73	0.2924	0.2907	0.2890	0.2874	0.2857	0.2840	0.2823	0.2807	0.2790	0.2773	3	6	8	11	14
74	0.2756	0.2740	0.2723	0.2706	0.2689	0.2672	0.2656	0.2639	0.2622	0.2605	3	6	8	11	14
75	0.2588	0.2571	0.2554	0.2538	0.2521	0.2504	0.2487	0.2470	0.2453	0.2436	3	6	8	11	14
76	0.2419	0.2402	0.2385	0.2368	0.2351	0.2334	0.2317	0.2300	0.2284	0.2267	3	6	8	11	14
77	0.2250	0.2233	0.2215	0.2198	0.2181	0.2164	0.2147	0.2130	0.2113	0.2096	3	6	9	11	14
78	0.2079	0.2062	0.2045	0.2028	0.2011	0.1994	0.1977	0.1959	0.1942	0.1925	3	6	9	11	14
79	0.1908	0.1891	0.1874	0.1857	0.1840	0.1822	0.1805	0.1788	0.1771	0.1754	3	6	9	11	14
80	0.1736	0.1719	0.1702	0.1685	0.1668	0.1650	0.1633	0.1616	0.1599	0.1582	3	6	9	12	14
81	0.1564	0.1547	0.1530	0.1513	0.1495	0.1478	0.1461	0.1444	0.1426	0.1409	3	6	9	12	14
82	0.1392	0.1374	0.1357	0.1340	0.1323	0.1305	0.1288	0.1271	0.1253	0.1236	3	6	9	12	14
83	0.1219	0.1201	0.1184	0.1167	0.1149	0.1132	0.1115	0.1097	0.1080	0.1063	3	6	9	12	14
84	0.1045	0.1028	0.1011	0.0993	0.0976	0.0958	0.0941	0.0924	0.0906	0.0889	3	6	9	12	14
85	0.0872	0.0854	0.0837	0.0819	0.0802	0.0785	0.0767	0.0750	0.0732	0.0715	3	6	9	12	15
86	0.0698	0.0680	0.0663	0.0645	0.0628	0.0610	0.0593	0.0576	0.0558	0.0541	3	6	9	12	15
87	0.0523	0.0506	0.0488	0.0471	0.0454	0.0436	0.0419	0.0401	0.0384	0.0366	3	6	9	12	15
88	0.0349	0.0332	0.0314	0.0297	0.0279	0.0262	0.0244	0.0227	0.0209	0.0192	3	6	9	12	15
89	0.0175	0.0157	0.0140	0.0122	0.0105	0.0087	0.0070	0.0052	0.0035	0.0017	3	6	9	12	15

NATURAL TANGENTS

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0367	0.0384	0.0402	0.0419	0.0437	0.0454	0.0472	0.0489	0.0507	3	6	9	12	15
3	0.0524	0.0542	0.0559	0.0577	0.0594	0.0612	0.0629	0.0647	0.0664	0.0682	3	6	9	12	15
4	0.0699	0.0717	0.0734	0.0752	0.0769	0.0787	0.0805	0.0822	0.0840	0.0857	3	6	9	12	15
5	0.0875	0.0892	0.0910	0.0928	0.0945	0.0963	0.0981	0.0998	0.1016	0.1033	3	6	9	12	15
6	0.1051	0.1069	0.1086	0.1104	0.1122	0.1139	0.1157	0.1175	0.1192	0.1210	3	6	9	12	15
7	0.1228	0.1246	0.1263	0.1281	0.1299	0.1317	0.1334	0.1352	0.1370	0.1388	3	6	9	12	15
8	0.1405	0.1423	0.1441	0.1459	0.1477	0.1495	0.1512	0.1530	0.1548	0.1566	3	6	9	12	15
9	0.1584	0.1602	0.1620	0.1638	0.1655	0.1673	0.1691	0.1709	0.1727	0.1745	3	6	9	12	15
10	0.1763	0.1781	0.1799	0.1817	0.1835	0.1853	0.1871	0.1890	0.1908	0.1926	3	6	9	12	15
11	0.1944	0.1962	0.1980	0.1998	0.2016	0.2035	0.2053	0.2071	0.2089	0.2107	3	6	9	12	15
12	0.2126	0.2144	0.2162	0.2180	0.2199	0.2217	0.2235	0.2254	0.2272	0.2290	3	6	9	12	15
13	0.2309	0.2327	0.2345	0.2364	0.2382	0.2401	0.2419	0.2438	0.2456	0.2475	3	6	9	12	15
14	0.2493	0.2512	0.2530	0.2549	0.2568	0.2586	0.2605	0.2623	0.2642	0.2661	3	6	9	12	16
15	0.2679	0.2698	0.2717	0.2736	0.2754	0.2773	0.2792	0.2811	0.2830	0.2849	3	6	9	13	16
16	0.2867	0.2886	0.2905	0.2924	0.2943	0.2962	0.2981	0.3000	0.3019	0.3038	3	6	9	13	16
17	0.3057	0.3076	0.3096	0.3115	0.3134	0.3153	0.3172	0.3191	0.3211	0.3230	3	6	10	13	16
18	0.3249	0.3269	0.3288	0.3307	0.3327	0.3346	0.3365	0.3385	0.3404	0.3424	3	6	10	13	16
19	0.3443	0.3463	0.3482	0.3502	0.3522	0.3541	0.3561	0.3581	0.3600	0.3620	3	7	10	13	16
20	0.3640	0.3659	0.3679	0.3699	0.3719	0.3739	0.3759	0.3779	0.3799	0.3819	3	7	10	13	17
21	0.3839	0.3859	0.3879	0.3899	0.3919	0.3939	0.3959	0.3979	0.4000	0.4020	3	7	10	13	17
22	0.4040	0.4061	0.4081	0.4101	0.4122	0.4142	0.4163	0.4183	0.4204	0.4224	3	7	10	14	17
23	0.4245	0.4265	0.4286	0.4307	0.4327	0.4348	0.4369	0.4390	0.4411	0.4431	3	7	10	14	17
24	0.4452	0.4473	0.4494	0.4515	0.4536	0.4557	0.4578	0.4599	0.4621	0.4642	4	7	11	14	18
25	0.4663	0.4684	0.4706	0.4727	0.4748	0.4770	0.4791	0.4813	0.4834	0.4856	4	7	11	14	18
26	0.4877	0.4899	0.4921	0.4942	0.4964	0.4986	0.5008	0.5029	0.5051	0.5073	4	7	11	15	18
27	0.5095	0.5117	0.5139	0.5161	0.5184	0.5206	0.5228	0.5250	0.5272	0.5295	4	7	11	15	18
28	0.5317	0.5340	0.5362	0.5384	0.5407	0.5430	0.5452	0.5475	0.5498	0.5520	4	8	11	15	19
29	0.5543	0.5566	0.5589	0.5612	0.5635	0.5658	0.5681	0.5704	0.5727	0.5750	4	8	12	15	19
30	0.5774	0.5797	0.5820	0.5844	0.5867	0.5890	0.5914	0.5938	0.5961	0.5985	4	8	12	16	20
31	0.6009	0.6032	0.6056	0.6080	0.6104	0.6128	0.6152	0.6176	0.6200	0.6224	4	8	12	16	20
32	0.6249	0.6273	0.6297	0.6322	0.6346	0.6371	0.6395	0.6420	0.6445	0.6469	4	8	12	16	20
33	0.6494	0.6519	0.6544	0.6569	0.6594	0.6619	0.6644	0.6669	0.6694	0.6720	4	8	13	17	21
34	0.6745	0.6771	0.6796	0.6822	0.6847	0.6873	0.6899	0.6924	0.6950	0.6976	4	9	13	17	21
35	0.7002	0.7028	0.7054	0.7080	0.7107	0.7133	0.7159	0.7186	0.7212	0.7239	4	9	13	18	22
36	0.7265	0.7292	0.7319	0.7346	0.7373	0.7400	0.7427	0.7454	0.7481	0.7508	5	9	14	18	23
37	0.7536	0.7563	0.7590	0.7618	0.7646	0.7673	0.7701	0.7729	0.7757	0.7785	5	9	14	18	23
38	0.7813	0.7841	0.7869	0.7898	0.7926	0.7954	0.7983	0.8012	0.8040	0.8069	5	9	14	19	24
39	0.8098	0.8127	0.8156	0.8185	0.8214	0.8243	0.8273	0.8302	0.8332	0.8361	5	10	15	20	24
40	0.8391	0.8421	0.8451	0.8481	0.8511	0.8541	0.8571	0.8601	0.8632	0.8662	5	10	15	20	25
41	0.8693	0.8724	0.8754	0.8785	0.8816	0.8847	0.8878	0.8910	0.8941	0.8972	5	10	16	21	26
42	0.9004	0.9036	0.9067	0.9099	0.9131	0.9163	0.9195	0.9228	0.9260	0.9293	5	11	16	21	27
43	0.9325	0.9358	0.9391	0.9424	0.9457	0.9490	0.9523	0.9556	0.9590	0.9623	6	11	17	22	28
44	0.9657	0.9691	0.9725	0.9759	0.9793	0.9827	0.9861	0.9896	0.9930	0.9965	6	11	17	23	29

NATURAL TANGENTS

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	1.0000	1.0035	1.0070	1.0105	1.0141	1.0176	1.0212	1.0247	1.0283	1.0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	1.0392	1.0428	1.0464	1.0501	1.0538	1.0575	1.0612	1.0649	1.0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	1.0761	1.0799	1.0837	1.0875	1.0913	1.0951	1.0990	1.1028	1.1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1.1145	1.1184	1.1224	1.1263	1.1303	1.1343	1.1383	1.1423	1.1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1.1544	1.1585	1.1626	1.1667	1.1708	1.1750	1.1792	1.1833	1.1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1.1960	1.2002	1.2045	1.2088	1.2131	1.2174	1.2218	1.2261	1.2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	1.2393	1.2437	1.2482	1.2527	1.2572	1.2617	1.2662	1.2708	1.2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	1.2846	1.2892	1.2938	1.2985	1.3032	1.3079	1.3127	1.3175	1.3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	1.3319	1.3367	1.3416	1.3465	1.3514	1.3564	1.3613	1.3663	1.3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	1.3814	1.3865	1.3916	1.3968	1.4019	1.4071	1.4124	1.4176	1.4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	1.4335	1.4388	1.4442	1.4496	1.4550	1.4605	1.4659	1.4715	1.4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	1.4882	1.4938	1.4994	1.5051	1.5108	1.5166	1.5224	1.5282	1.5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	1.5458	1.5517	1.5577	1.5637	1.5697	1.5757	1.5818	1.5880	1.5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	1.6066	1.6128	1.6191	1.6255	1.6319	1.6383	1.6447	1.6512	1.6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	1.6709	1.6775	1.6842	1.6909	1.6977	1.7045	1.7113	1.7182	1.7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	1.7391	1.7461	1.7532	1.7603	1.7675	1.7747	1.7820	1.7893	1.7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	1.8115	1.8190	1.8265	1.8341	1.8418	1.8495	1.8572	1.8650	1.8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	1.8887	1.8967	1.9047	1.9128	1.9210	1.9292	1.9375	1.9458	1.9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	1.9711	1.9797	1.9883	1.9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.0413	15	29	44	58	73
64	2.0503	2.0594	2.0686	2.0778	2.0872	2.0965	2.1060	2.1155	2.1251	2.1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	2.1543	2.1642	2.1742	2.1842	2.1943	2.2045	2.2148	2.2251	2.2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2.2566	2.2673	2.2781	2.2889	2.2998	2.3109	2.3220	2.3332	2.3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	2.3673	2.3789	2.3906	2.4023	2.4142	2.4262	2.4383	2.4504	2.4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	2.4876	2.5002	2.5129	2.5257	2.5386	2.5517	2.5649	2.5782	2.5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	2.6187	2.6325	2.6464	2.6605	2.6746	2.6889	2.7034	2.7179	2.7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	2.7625	2.7776	2.7929	2.8083	2.8239	2.8397	2.8556	2.8716	2.8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	2.9208	2.9375	2.9544	2.9714	2.9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	3.0961	3.1146	3.1334	3.1524	3.1716	3.1910	3.2106	3.2305	3.2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	3.2914	3.3122	3.3332	3.3544	3.3759	3.3977	3.4197	3.4420	3.4646	36	72	108	144	180
74	3.4874	3.5105	3.5339	3.5576	3.5816	3.6059	3.6305	3.6554	3.6806	3.7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	3.7583	3.7848	3.8118	3.8391	3.8667	3.8947	3.9232	3.9520	3.9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	4.0408	4.0713	4.1022	4.1335	4.1653	4.1976	4.2303	4.2635	4.2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	4.3662	4.4015	4.4373	4.4737	4.5107	4.5483	4.5864	4.6252	4.6646					
78	4.7046	4.7453	4.7867	4.8288	4.8716	4.9152	4.9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	5.1929	5.2422	5.2924	5.3435	5.3955	5.4486	5.5026	5.5578	5.6140					
80	5.6713	5.7297	5.7894	5.8502	5.9124	5.9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	6.3859	6.4596	6.5350	6.6122	6.6912	6.7720	6.8548	6.9395	7.0264					
82	7.1154	7.2066	7.3002	7.3962	7.4947	7.5958	7.6996	7.8062	7.9158	8.0285					
83	8.1443	8.2636	8.3863	8.5126	8.6427	8.7769	8.9152	9.0579	9.2052	9.3572					
84	9.5144	9.6768	9.8448	10.0187	10.1988	10.3854	10.5789	10.7797	10.9882	11.2048					
85	11.4301	11.6645	11.9087	12.1632	12.4288	12.7062	12.9962	13.2996	13.6174	13.9507					
86	14.3007	14.6685	15.0557	15.4638	15.8945	16.3499	16.8319	17.3432	17.8863	18.4645					
87	19.0811	19.7403	20.4465	21.2049	22.0217	22.9038	23.8593	24.8978	26.0307	27.2715					
88	28.6363	30.1446	31.8205	33.6935	35.8006	38.1885	40.9174	44.0661	47.7395	52.0807					
89	57.2900	63.6567	71.6151	81.8470	95.4895	114.5887	143.2371	190.9842	286.4777	572.9572					