1 அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

பிரம்மகுப்தா
கி.பி. (பொ.ஆ.) 598 – கி.பி. (பொ.ஆ.) 668

அறிமுகம்

நம் அன்றாட வாழ்க்கையில் நில அதிர்வு கணக்கெடுப்புகளுக்கு அணிகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். வரைபடங்கள் வரைய, புள்ளியியல் மற்றும் அறிவியல் ஆய்வுகளின் பல துறைகளில் இவற்றைப் பயன்படுத்துகிறோம். மக்கள் தொகையின் பண்புகள், அவர்களின் பழக்க வழக்கங்கள் ஆகியவற்றைக் குறிக்கவும் அணிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

அணிக்கோவைகள் அற்புதமான இயற்கணித பண்புகளை கொண்டுள்ளன. நேரியல் கணிதத்தில் பெருமை மிக்க இடத்தையும் பெற்றுள்ளன. உயர்நிலை இயற்கணிதத்தில் அணிக்கோவைகள் முக்கியமாகக் கருதப்படுகிறது.

பிரம்மகுப்தா [கி.பி. (பொ.ஆ.) 598 – கி.பி. (பொ.ஆ.) 668] என்பவர் பண்டைய இந்தியாவின் முக்கியமான கணிதவியல் மற்றும் வானியல் அறிஞர் ஆவார். பூச்சியத்தைப் பயன்படுத்துவதற்கான முக்கிய விதிகளையும் முதன் முதலில் அளித்தவரும் அவரே. அணிகளில், $B(x\,,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ \pm ty & \pm x \end{pmatrix}$ என்ற அணி பிரம்மகுப்தா அணி (Brahmagupta Matrix) என அழைக்கப்படுகிறது.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தை படித்த பின்பு பின்வரும் பாடக் கருத்துக்களை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

RZQU1Z

- அணியின் தரம் – கருத்துரு.
- அடிப்படை உருமாற்றங்கள் மற்றும் சமான அணிகள்.
- அணியின் ஏறுபடி வடிவம்.
- அணியின் தரம் காணல்.
- சமச்சீரற்ற நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒருங்கமைவு தன்மையை ஆராய்தல்.
- நேரிய சமன்பாடுகளின் பயன்பாடுகள்.
- சமச்சீரற்ற நேரிய சமன்பாடுகளை கிரேமர் விதியைக்கொண்டு தீர்வு காணல்.
- தொடக்க பங்கு சந்தை பங்கீட்டினைக் கொண்டு அடுத்த நிலையினை முன்னறிவித்தல்.

1.1 அணியின் தரம் (Rank of a Matrix)

பொருளாதாரம், வாணிபம் மற்றும் தொழில்துறைகளில் பொதுவாக அணிகள் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

அணிகளின் அடிப்படை பண்புகளை நாம் ஏற்கனவே படித்துள்ளோம். இப்பாடத்தில் அடிப்படை உருமாற்றங்களை பயன்படுத்தி,

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 1 3/5/2020 10:51:14 AM

அணிகளின் பயன்பாடுகளில் புதிய முறைகளை உருவாக்குதலைப் பற்றி படிக்கலாம்.

1.1.1 கருத்துரு (Concept)

ஒவ்வொரு அணியுடனும் தொடர்பு படுத்தக்கூடிய ஒரு குறையற்ற எண், அந்த அணியின் தரம் எனப்படும்.

வரையறை 1.1

A என்கிற அணியின் தரம் 'r' எனில் பின்வரும் நிபந்தனைகள் உண்மையாக இருக்க வேண்டும்.

(i) A ஆனது குறைந்தபட்சம் ஒரு 'r' வரிசை பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவையை பெற்றிருத்தல் வேண்டும்.

(ii) A-ன் ஒவ்வொரு $(r+1)$ வரிசை மற்றும் அதைவிட அதிகமான வரிசை கொண்ட சிற்றணிக்கோவைகளின் மதிப்புகள் பூச்சியமாக இருத்தல் வேண்டும்.

குறிப்பு

(i) $\rho(A) \geq 0$

(ii) அணி A-ன் வரிசை $m \times n$ எனில் அதன் தரமானது, $\{m,n\}$ –ன் மீச்சிறு மதிப்புக்குச் சமமாகவோ அல்லது சிறியதாகவோ இருக்கும்.

(iii) பூச்சிய அணியின் தரம் '0' ஆகும்.

(iv) $n \times n$ வரிசை உடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணியின் தரம் 'n'ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.1

$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ என்க.

A -ன் வரிசை 2×2 $\quad \therefore \rho(A) \leq 2$

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ ஆகும்.

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 2$.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

சங்கேத மொழிகளை உருவாக்குவதற்கு அணியின் கருத்துருக்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1.2

$\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

$A = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ என்க.

A -ன் வரிசை 2×2 $\quad \therefore \rho(A) \leq 2$

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது $\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$ ஆகும்.

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவை பூச்சியமாவதால், $\rho(A) \neq 2$.

ஒன்றாம் வரிசை கொண்ட ஒரு சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது $|-5| \neq 0$ ஆகும்.

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 1 ஆகும். $\therefore \rho\ (A) = 1$

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ என்க

A -ன் வரிசை 3×3.

$\therefore \rho(A) \leq 3$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 2 3/5/2020 10:51:17 AM

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணிக் கோவையை கருத, நாம் பெறுவது

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை மூன்று ஆகும். $\therefore \rho(A) = 3.$

எடுத்துக்காட்டு 1.4

$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ என்க.

A -ன் வரிசை 3×3. $\therefore \rho(A) \leq 3.$

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணிக் கோவையை கருத, நாம் பெறுவது,

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ மூன்றாம் வரிசைக் கொண்ட சிற்றணிக்கோவை பூச்சியமாவதால், $\rho(A) \neq 3$ ஆகும்.

இரண்டாம் வரிசை கொண்ட ஒரு சிற்றணிக் கோவையை கருத, நாம் பெறுவது

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 2.$

எடுத்துக்காட்டு 1.5

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ என்க.

A -ன் வரிசை 3×4

$\therefore \rho(A) \leq 3.$

மூன்றாம் வரிசை கொண்ட சிற்றணிக் கோவைகளை கருத, நாம் பெறுவது

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அனைத்து மூன்றாம் வரிசை கொண்ட சிற்றணிக்கோவைகளின் மதிப்புகளும் பூச்சியமாகும். $\rho(A) \neq 3.$

ஏதேனும் ஒரு இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\Rightarrow$ பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 2.$

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

A என்ற சதுர அணியின் வரிசை 3. A இன் தரம் 2 எனில், $adj\ A$ இன் தரம் 1 ஆகும்.

1.1.2 அடிப்படை உருமாற்றங்கள் மற்றும் சமான அணிகள் (Elementary Transformations and Equivalent matrices)

அணிகளின் அடிப்படை உருமாற்றங்கள் பின்வரும் மூன்று செயல்களைப் பொறுத்து அமைகிறது.

(i) ஏதேனும் இரு நிரைகளை (அல்லது நிரல்கள்) பரிமாற்றம் செய்தல். [$R_i \leftrightarrow R_j$ (அ) $C_i \leftrightarrow C_j$]

(ii) ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற திசையிலி k -ஆல் பெருக்குதல். [$R_i \rightarrow kR_i$ (அ) $C_j \rightarrow kC_j$].

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 3 3/5/2020 10:51:21 AM

(iii) ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள உறுப்புகளை மற்றொரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளுடன் ஒரே மாறிலியால் பெருக்கி கூட்டுதல்.

$[R_i \to R_i + kR_j$ (அ) $C_i \to C_i + kC_j]$

சமான அணிகள் (Equivalent Matrices)

A மற்றும் B என்பவை சமவரிசைக் கொண்ட அணிகள் என்க. இவற்றில் ஒரு அணியை மற்றொரு அணியிலிருந்து, முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள அடிப்படை உருமாற்றங்களை மேற்கொள்வதன் மூலம் பெறுவோமாயின், A-யும் B-யும் சமான அணிகள் எனப்படும். இதனை $A \sim B$ அல்லது $B \sim A$ என குறிப்பிடலாம்.

1.1.3 ஏறுபடி வடிவம் மூலம் வரிசை 3×4 வரை உள்ள அணியின் தரம் காணல் (Echelon form and finding the rank of the matrix upto the order of 3×4)

$m\times n$ வரிசை உடைய A என்ற அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளதாயின் அது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்தல் வேண்டும்.

(i) அனைத்து உறுப்புகளையும் பூச்சிய உறுப்புகளாய் கொண்ட ஒவ்வொரு நிரையும் பூச்சியமற்ற உறுப்புகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட நிரைக்கு கீழே அமைய வேண்டும்.

(ii) பூச்சியமற்ற நிரையில் வரும் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு முன்பாக இடம்பெறும் பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வாறாகவே அதற்கு அடுத்து வரும் நிரையில் உள்ள பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைவிட குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.6

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு :

A -ன் வரிசை 3×3. $\therefore \rho(A) \le 3$.

அணி A – ஐ, ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்க,

அணி A	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$ $R_3 \to R_3 - 3R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$
கடைசியாக பெறப்பட்ட அணியானது ஏறு படிவ வடிவில் உள்ளது.	

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும். $\therefore \rho(A) = 2$.

குறிப்பு

ஒரு நிரையில் உள்ள உறுப்புகளில் குறைந்தது ஒரு உறுப்பு பூச்சியமற்ற உறுப்பாக அமையுமானால் அந்த நிரை பூச்சியமற்ற நிரை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

A -ன் வரிசை 3×4. $\therefore \rho(A) \le 3$.

அணி A -ஐ, ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்க,

அணி A	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 4 3/5/2020 10:51:24 AM

$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&1&2&1\\0&-5&-8&-3\end{pmatrix}$	$R_3\to R_3-3R_1$
$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&1&2&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$	$R_3\to R_3+5R_2$

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும். $\therefore \rho(A)=3.$

எடுத்துக்காட்டு 1.8

$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&2\\2&3&4&0\end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

A -யின் வரிசை 3×4.

$\therefore \rho(A)\le 3.$

அணி A-ஐ, ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்க,

அணி A	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&4&5&2\\2&3&4&0\end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&1&2&-2\end{pmatrix}$	$R_2\to R_2-3R_1$ $R_3\to R_3-2R_1$
$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$	$R_3\to R_3-R_2$

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும். $\therefore \rho(A)=3.$

சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவு (Consistency of Equations)

இருமாறிகள் கொண்ட நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு (System of linear equations in two variables) :

இரண்டு நேரிய சமன்பாடுகளை அணியின் நேர்மாறு முறையில் எவ்வாறு தீர்ப்பது என்பதை நாம் அறிவோம்.

> **மீள்பார்வை**
>
> நேரிய சமன்பாடுகளை அணி வடிவத்தில் AX=B என்றவாறு எழுத இயலும் அதன் தீர்வு $|A|\neq 0$ எனும் நிலையில் $X=A^{-1}B$ ஆகும்.

பின்வரும் இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\left.\begin{aligned}ax+by&=h\\cx+dy&=k\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

a, b, c, d, h மற்றும் k என்பவை மெய் மாறிலிகள், ஒரே நேரத்தில் a மற்றும் b என்ற இரண்டுமே பூஜ்ஜிமாகவோ அல்லது c மற்றும் d என்ற இரண்டுமே பூச்சியமாகவோ இருக்க இயலாது. கொடுக்கப்பட்ட L_1 , L_2 ஆகிய இரு நேர்கோடுகளில் பின்வரும் ஏதேனும் ஒன்று கிடைக்கலாம்.

L_1 மற்றும் L_2 சரியாக ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக்கொள்ளும்.

L_1 மற்றும் L_2 ஒன்றின் மீது மற்றொன்று பொருந்தும்.

L_1 மற்றும் L_2 இணையானவை மற்றும் வெவ்வேறானவை.

படம் 1.1–ல் முதல் நிலையில் இரு கோடுகளும் ஒன்றை ஒன்று ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டுவதால் சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

இரண்டாவது நிலையில் கோட்டின் மீது உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அச்சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாக அமையும். எனவே சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது, மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

மூன்றாவது நிலையில் இருகோடுகளும் இணைகோடுகள் ஆவதால் சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது. தீர்வுகள் இல்லை.

ஒவ்வொன்றையும் விளக்கும் வகையில் முதலில் இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரியல் தொகுதிகளைப் பார்ப்போம்.

(அ) ஒரே ஒரு தீர்வை மட்டுமே கொண்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு

$2x-y=1,\ 3x+2y=12$ என்ற சமன்பாடுகள் $(2,3)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 5 3/5/2020 10:51:27 AM

அதாவது (2,3) இருகோடுகளின் மீதும் அமைகின்றது. எனவே இந்த சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு கொண்டவை ஆகும்.

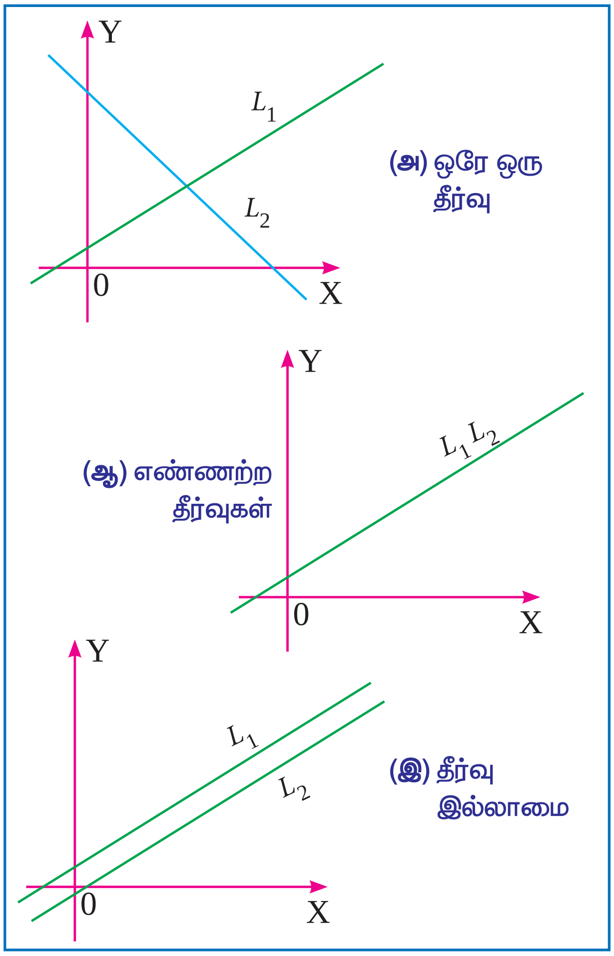
(ஆ) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைக் கொண்ட சமன்பாட்டுத்தொகுப்பு

$2x - y = 1,\ 6x - 3y = 3$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒன்றன் மீது மற்றொன்றாக அமையும் இரு நேர்க்கோடுகளாகும். மேலும் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அச்சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாக அமையக் காண்கிறோம்.

இச்சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் (0,–1), (1, 1)... என எண்ணிக்கையற்றதீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன.

(இ) தீர்வுகள் அற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு

$2x - y = 1,\ 6x - 3y = 12$ என்ற சமன்பாடுகள் இரு இணையான கோடுகளாகும். இச்சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை.



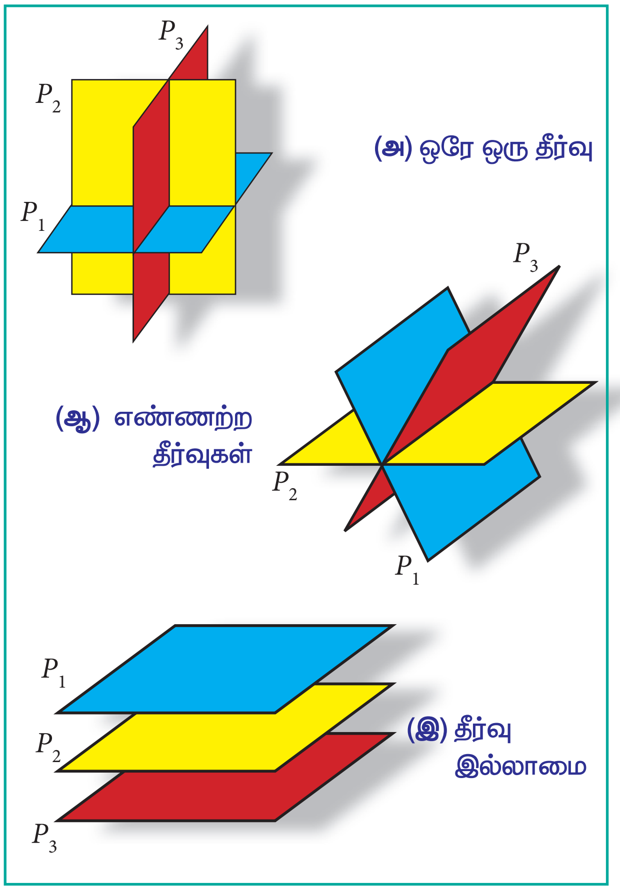
படம் 1.1

மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட சமச்சீரற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு (System of non Homogeneous Equations in three variables)

x, y மற்றும் z ஆகிய மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட மூன்று நேரிய சமன்பாடுகளைக் கொண்ட நேரிய தொகுப்பின் பொது வடிவம்

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

$ax + by + cz = d$ (a,b மற்றும் c ஆகியன பூச்சியமற்றவை) என்ற மூன்று மாறிகளைக் கொண்ட நேரிய சமன்பாடு முப்பரிமாண வெளியில் அமைந்த தளத்தைக் குறிக்கும். எனவே தொகுப்பு (2)-ல் அமைந்த ஒவ்வொரு சமன்பாடும், முப்பரிமாண வெளியில் ஒவ்வொரு தளத்தைக் குறிக்கும். மேலும் தொகுப்பின் தீர்வு(கள்), தொகுப்பின் மூன்று சமன்பாடுகள் குறிக்கும் தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி(கள்) ஆகும். ஒவ்வொரு தளமும் ஒன்றை ஒன்று வெட்டிக்கொள்ளும் தன்மையைப் பொறுத்து தொகுப்பு ஆனது ஒரே ஒரு தீர்வு, எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள், அல்லது தீர்வு இல்லாமை என பெற்றிருக்கும்.



படம் 1.2

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 6 3/5/2020 10:51:28 AM

படம் 1.2 ஆனது ஒவ்வொரு சாத்தியக்கூறுகளையும் விளக்குகின்றது.

படம் 1.2(அ)-ல் மூன்று தளங்களும் ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. எனவே சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு (2) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெறும்.

படம் 1.2(ஆ)-ல் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு என்பதை சித்தரிக்கின்றது. இங்கு மூன்று தளங்களும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் வெட்டிக் கொள்வதால், கோட்டின் மீதுள்ள அனைத்து புள்ளிகளும் தீர்வுகளாக கிடைக்கின்றன.

படம் 1.2(இ)-ல் மூன்று தளங்களும் ஒன்றுக்கொன்று இணையானவை மற்றும் வெவ்வேறானவை. மூன்று தளங்களுக்கு பொதுவான புள்ளி ஏதும் இல்லை எனவே தொகுப்பு (2) க்கு இந்நிலையில் தீர்வு ஏதும் இல்லை.

குறிப்பு

ஒவ்வொரு நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பும் ஒரே ஒரு தீர்வு அல்லது எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் அல்லது தீர்வு இல்லாமலும் இருக்கும்.

n மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட 'm' நேரிய சமன்பாடுகளைக் கொண்ட தன்னிச்சையான தொகுப்பினை

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

என எழுதலாம் $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்பன மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகள் மேலும் a_{ij} மற்றும் b_i $(i = 1,2,3,\dots, m,\ j = 1,2,3,\dots, n)$ என்பவை மாறிலிகள் ஆகும்.

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணிகள் (Augmented matrices)

'n' மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட 'm' நேரிய சமன்பாடுகளை கொண்ட தொகுப்பு, செவ்வக வரிசையில் அமைந்த எண்களாக சுருக்கப்படுகின்றது.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & & b_n \end{bmatrix}$$

இது தொகுப்பின் விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி ஆகும், மேலும் $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ என்பது கெழு அணி எனப்படும்.

பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினை கருதுவோம்.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

இதில் $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ என்பது கெழு அணி மற்றும்

$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & & 9 \\ 2 & 4 & -3 & & 1 \\ 3 & 6 & -5 & & 0 \end{bmatrix}$ என்பது விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி ஆகும்.

1.1.4 சமச்சீரற்ற நேரிய சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவுத் தன்மையை, தர முறையில் சோதித்தல் (இரண்டு மற்றும் மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய) [Testing the consistency of non homogeneous linear equations (two and three variables) by rank method]

n மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளைக் கொண்ட $AX=B$ என்ற அணி சமன்பாட்டில்

(i) $\rho([A, B]) = \rho(A)$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை.

(ii) $\rho([A, B]) = \rho(A) = n$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

(iii) $\rho([A, B]) = \rho(A) < n$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

(iv) $\rho([A, B]) \neq \rho(A)$ எனில் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.9

$x + y = 5,\ 2x + y = 8$ ஆகிய சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பிற்கான அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X \quad = \quad B$$

அணி A	விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றம்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$\rho(A) = 2$	$\rho([A,B]) = 2$	

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும்.

$\rho(A) = \rho([A,B]) = 2$ = மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடையது மேலும் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பினை

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$ என எழுதலாம்.

$$\Rightarrow\ x + y = 5 \qquad ...(1)$$

$$y = 2$$

$$\therefore (1) \Rightarrow x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

தீர்வு : $x = 3,\ y = 2$

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$2x + y = 5,\ 4x + 2y = 10$ ஆகிய சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கான அணிச் சமன்பாடு,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X \quad = \quad B$$

அணி A	விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றம்
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$\rho(A) = 1$	$\rho([A,B]) = 1$	

ஏறுபடிவ அணியிலுள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 1 ஆகும்.

இங்கு, $\rho(A) = \rho([A,B]) = 1 <$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

∴ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளை பெற்றிருக்கும்.

தொகுப்பிற்கான சமான அணி வடிவம்,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ஆகும்.

$$\Rightarrow 2x + y = 5 \qquad ...(1)$$

$k \in R$, $y = k$ எனக் கொண்டால்,

$$x = \frac{1}{2}(5 - k)$$ (1) லிருந்து,

$$x = \frac{1}{2}(5-k),\ y = k;\ k \in R$$

k-யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறு தீர்வுகளை நாம் பெறலாம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

$3x - 2y = 6,\ 6x - 4y = 10$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றது எனக் காட்டுக.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 8 3/5/2020 10:51:38 AM

தீர்வு:

அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

அணி A	விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றம்
$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -4 & 10 \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\sim\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$\rho(A) = 1$	$\rho([A,B]) = 2$	

$$\therefore \rho([A,B]) = 2, \qquad \rho(A) = 1$$

$$\rho(A) \neq \rho([A,B])$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

$2x + y + z = 5,\ x + y + z = 4,\ x - y + 2z = 1$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனக்காட்டுக மேலும் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு:

அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 2R_1$ $R_3 \to R_3 - R_1$
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - 2R_2$
$\rho(A) = 3, \quad \rho([A,B]) = 3$	

கடைசி சமான அணி ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$\rho(A) = \rho([A,B]) = 3 =$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

∴ கொடுக்கப்பட்டதொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது. மேலும் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்:

தீர்வு காண தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு சமானமான அணி சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x + y + z = 4 \qquad (1)$$

$$y + z = 3 \qquad (2)$$

$$3z = 3 \qquad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \quad z = 1$$

$$(2) \Rightarrow \quad y = 3 - z = 2$$

$$(1) \Rightarrow x = 4 - y - z$$

$$x = 1$$

$$\therefore x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

$x + y + z = 6,\ x + 2y + 3z = 14,\ x + 4y + 7z = 30$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனக்காட்டுக. மேலும் அவற்றைத் தீர்க்க.

தீர்வு: அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 7 & 30 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - R_1$ $R_3 \to R_3 - R_2$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - 2R_2$
$\rho(A) = 2,\ \rho([A,B]) = 2$	

கடைசி சமான அணி ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$$\therefore \quad \rho([A,B]) = 2,\ \rho(A) = 2$$

இங்கு, $\rho(A) = \rho([A,\ B]) = 2 <$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது. மேலும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பிற்கு சமானமான அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y + z = 6 \qquad (1)$$

$$y + 2z = 8 \qquad (2)$$

$(2) \Rightarrow \quad y = 8 - 2z,$

$(1) \Rightarrow \quad x = 6 - y - z = 6 - (8 - 2z) - z = z - 2$

$z = k,\ \ k \in R$ எனக்கொண்டால், $x = k - 2,\ y = 8 - 2k$ எனப் பெறலாம்.

k-யின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு வெவ்வேறு தீர்வுகளை நாம் பெறலாம்.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.14

$x - 4y + 7z = 14,\ 3x + 8y - 2z = 13,\ 7x - 8y + 26z = 5$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனக்காட்டுக.

தீர்வு:

அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 3 & 8 & -2 \\ 7 & -8 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X \quad = \quad B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 7 & -8 & 26 & 5 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 20 & -23 & -93 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 3R_1$ $R_3 \to R_3 - 7R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$
$\rho(A) = 2,\ \rho([A,B]) = 3$	

கடைசி சமானமான அணி ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$$\therefore \quad \rho([A,\ B]) = 3, \qquad \rho(A) = 2$$

$$\rho(A) \neq \rho([A,\ B])$$

எனவே, சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வு ஏதுமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 1.15

பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் k-ன் மதிப்பைக்காண்க.
$x + 2y - 3z = -2,\ 3x - y - 2z = 1,$ மற்றும்

$$2x + 3y - 5z = k$$

தீர்வு:

தரப்பட்ட தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 10 3/5/2020 10:51:49 AM

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & k \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 4+k \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 3R_1$ $R_3 \to R_3 - 2R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 21+7k \end{pmatrix}$	$R_3 \to 7R_3 - R_2$
$\rho(A) = 2$, $\rho([A, B]) = 2$ (அல்லது) 3	

சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை எனில் $\rho([A, B]) = \rho(A) = 2$

$$\therefore \quad 21 + 7k = 0$$

$$7k = -21.$$

$$k = -3$$

எடுத்துக்காட்டு 1.16

தரப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனில் k -ன் மதிப்பு காண்க. $x + y + z = 7$, $x + 2y + 3z = 18$, $y + kz = 6$.

தீர்வு:

தரப்பட்ட தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & k & 6 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & k & 6 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - 3R_1$ $R_3 \to R_3 - 7R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & k-2 & -5 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$
$\rho(A) = 2$ அல்லது 3, $\rho([A, B]) = 3$	

சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனில் $\rho([A, B]) \neq \rho(A)$

$$\Rightarrow \quad k - 2 = 0. \quad \therefore k = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 1.17

'a' மற்றும் 'b' இன் எம்மதிப்புகளுக்கு $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + az = b$ என்ற சமன்பாடுகள்

(i) எந்த தீர்வும் பெற்றிராது.

(ii) ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்.

(iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என ஆராய்க.

தீர்வு:

தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ b \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & a & b \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & a-1 & b-6 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - R_1$ $R_3 \to R_3 - R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & a-3 & b-10 \end{pmatrix}$	$R_3 \to R_3 - R_2$

கடைசி சமான அணி ஏறுபடிவ வடிவில் உள்ளது.

நிலை (i) தீர்வு இல்லை :

$\rho(A) \neq \rho([A,B])$ எனில், தொகுப்பிற்கு தீர்வு இல்லை. $a-3 = 0$ மற்றும் $b-10 \neq 0$ எனும்போது மட்டுமே $\rho(A) \neq \rho([A,B])$ ஆகும்.

$\therefore$ $a = 3$, $b \neq 10$ எனும்போது தொகுப்பிற்கு தீர்வு இல்லை.

நிலை (ii) ஒரே ஒரு தீர்வு :

$\rho(A) = \rho([A,B]) =$ மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை, எனில் தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

இங்கு $a-3 \neq 0$ எனில் $\rho(A) = \rho([A,B]) = 3$.

$\therefore$ $a \neq 3$ மற்றும் $b \in R$ எனில் தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

நிலை (iii) எண்ணற்ற தீர்வுகள்:

$\rho(A) = \rho([A,B]) <$ மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை, எனில் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

இங்கு $a-3=0$, $b-10=0$ எனில் $\rho(A) = \rho([A,B]) = 2 < 3$.

எனவே $a = 3$ மற்றும் $b = 10$ எனும் போது தொகுப்பிற்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 1.18

ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும் மொத்த அலகுகளின் நேரிய சார்பு $P = a + bl + cm$ இங்கு தொழிலாளர்களின் கூடுதல் உழைப்பு நேரம் (மணியில்) l, கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் (மணியில்) m மற்றும் வேலையை முடிக்கும் நேரம் a (நிலையானது) எனில் பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து a,b மற்றும் c ஆகிய மாறிலிகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

நாள்	உற்பத்தி (P அலகுகள்)	உழைப்பு நேரம் (l மணியில்)	கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் (m மணியில்)
திங்கள்	6,950	40	10
செவ்வாய்	6,725	35	9
புதன்	7,100	40	12

மேலும் உழைப்பு நேரம் 50 மணிகள் மற்றும் கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் 15 மணிகள் எனில் உற்பத்தியைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

$P = a + bl + cm$ என்பது உற்பத்தி சமன்பாடு ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து

$$6{,}950 = a + 40b + 10c$$
$$6{,}725 = a + 35b + 9c$$
$$7{,}100 = a + 40b + 12c$$

தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 \\ 1 & 35 & 9 \\ 1 & 40 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6950 \\ 6725 \\ 7100 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி $[A,B]$	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 & 6950 \\ 1 & 35 & 9 & 6725 \\ 1 & 40 & 12 & 7100 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 & 6950 \\ 0 & -5 & -1 & -225 \\ 0 & 0 & 2 & 150 \end{pmatrix}$	$R_2 \to R_2 - R_1$ $R_3 \to R_3 - R_1$
$\rho(A) = 3, \rho([A,B]) = 3$	

∴ தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்புக்குரிய சமானமான அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix}1 & 40 & 10\\ 0 & -5 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6950\\ -225\\ 150\end{pmatrix}$$

$$a+40b+10c=6950 \quad (1)$$

$$-5b-c=-225 \quad (2)$$

$$2c=150 \quad (3)$$

$$\boxed{c=75}$$

இப்பொழுது, $(2)\Rightarrow -5b-75=-225$

$$\boxed{b=30}$$

மற்றும் $(1)\Rightarrow a+1200+750=6950$

$$a = 5000$$

$$a = 5000,\ b = 30,\ c = 75$$

∴ உற்பத்தி சமன்பாடு $P = 5000 + 30l + 75m$

$l = 50,\ m=15$ இல் $P = 5000 + 30(50) + 75(15)$

$= 7625$

∴ உற்பத்தி = 7,625 அலகுகள்.

பயிற்சி 1.1

1. பின்வரும் அணிகளின் தரம் காண்க.

i) $\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -6\end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 4 & -3 & 4\\ -2 & 4 & -4\end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 2 & 4 & 1 & -2\\ 3 & 6 & 3 & -7\end{pmatrix}$

vii) $\begin{pmatrix}3 & 1 & -5 & -1\\ 1 & -2 & 1 & -5\\ 1 & 5 & -7 & 2\end{pmatrix}$ viii) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ -2 & 4 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 7 & 6\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 3\end{pmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 4 & -6\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}$ எனில் AB மற்றும் BA இவற்றின் தரத்தினைக் காண்க.

3. பின்வரும் சமன்பாட்டு தொகுப்பினை தர முறையில் தீர்க்க.

$x+y+z=9,\ \ 2x+5y+7z=52$ மற்றும்

$2x+y-z=0$

4. $5x+3y+7z=4,\ 3x+26y+2z=9$ மற்றும் $7x+2y+10z=5$ என்ற சமன்பாடுகளை தர முறையில் ஒருங்கமைவுடையது எனக்காட்டுக. மேலும் அவற்றை தீர்க்க.

5. பின்வரும் சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு தர முறையில் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு எனக் காட்டுக:

$x+y+z=3,\ x+2y+3z=4$ மற்றும்

$x+4y+9z=6$.

6. λ -ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிராது என தர முறையில் காண்க:

$3x-y+\lambda z=1,\ 2x+y+z=2$ மற்றும்

$x+2y-\lambda z=-1$.

7. X, Y மற்றும் Z ஆகிய மூன்று பொருள்களின் விலைகள் முறையே x, y மற்றும் z ஆகும். திரு. ஆனந்த் அவர்கள் Z–ல் 6 பொருள்களை வாங்கி, X-ல் 2 பொருள்கள் மற்றும் Y-ல் 3 பொருள்களை விற்கிறார். திரு. அமீர் அவர்கள் Y-ல் ஒரு பொருளை வாங்கி, X-ல் 3 பொருள்கள் மற்றும் Z-ல் 2 பொருள்களை விற்கிறார். திரு. அமித் அவர்கள் X-ல் ஒரு பொருளை வாங்கி Y-ல் மூன்று பொருள்கள் மற்றும் Z-ல் ஒரு பொருளை விற்கிறார். இதன் மூலமாக அவர்கள் மூவரும், முறையே ₹5,000, ₹2,000 மற்றும் ₹5,500 என வருமானம் பெறுகின்றனர் எனில் அம்மூன்று பொருள்களின் விலைகளைக் காண்க.

8. ஒரு தொகை ₹5,000 ஆனது ஆண்டிற்கு 6%, 7% மற்றும் 8% தரக்கூடிய மூன்று பங்குகளில் பிரித்து முதலீடு செய்யப்பட்டு, ஆண்டு மொத்த வருமானமாக ₹358 பெறப்படுகிறது. முதல் இரண்டு முதலீடுகளிலிருந்து கிடைக்கும் வருமானம், மூன்றாவது முதலீட்டிலிருந்து கிடைக்கும் வருமானத்தை விட ₹70 அதிகம் எனில், அம்மூன்று பங்குகளில் செலுத்தப்படும் முதலீடுகளை தரமுறையில் காண்க.

1.2 கிரேமர் விதி (Cramer's Rule)

சுவிஸ் கணித மேதையான கேப்ரியல் கிரேமர் 1704-ஆம் ஆண்டு ஜூலை 31 ஆம் நாள் ஜெனிவா என்ற நகரத்தில் பிறந்தார். இவர் இரண்டு மூத்த பெர்னோலிகளின் படைப்புகளை தொகுத்தது மட்டுமல்லாது, கிரகங்களின் கோள வடிவத் தன்மையையும், அவற்றிற்கான இயல்பான காரணத்தையும் (1730) மற்றும் நியூட்டன் முப்படி வளைவரை கையாலுதலையும் (1746) தொகுத்து வழங்கினார்.

இவர் 1750-ஆம் ஆண்டில் மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளில் அமைந்த n நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்புக்கு அணிக்கோவை முறையில் ஒரே ஒரு தீர்வைத்தரக்கூடிய சூத்திரமான கிரேமரின் விதியை வெளியிட்டார். கிரேமர் விதியின் சிறப்பு என்னவெனில் கண்டுபிடிக்கப்பட வேண்டிய மாறிகளான x,y,z -ல் எவையேனும் ஒன்றை கண்டுபிடிக்க, மற்ற மாறிகளின் மதிப்புகள் தெரிந்திருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. கிரேமர் விதியை $\Delta \neq 0$ ஆக இருக்கும் போது மட்டுமே பயன்படுத்தி ஒரே ஒரு தீர்வை பெறமுடியும்.

தேற்றம் (நிரூபணமின்றி) கிரேமரின் விதி (Theorem (without proof) Cramer's Rule)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ என்க.

அதாவது $AX=B$ என்பது n மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளில் அமைந்த சமன்பாட்டுத் தொகுப்புக்கு $\det(A) \neq 0$ எனில் தரப்பட்ட தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிக்கும்.

இத்தீர்வானது, $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det A}$, $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det A}$, $\dots$, $x_n = \dfrac{\det(A_n)}{\det A}$

இங்கு A_j என்ற அணியானது A–ன் j-வது நிரலிலுள்ள உறுப்புகளுக்கு பதிலாக

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ என்ற அணியிலுள்ள

உறுப்புகளை பிரதியிட்டு கிடைக்கும் அணியாகும்.

1.2.1 மதிப்பிட வேண்டிய மூன்று மாறிகள் வரை கொண்ட சமசீரற்ற சமன்பாடுகள் (Non Homogeneous linear equations upto three variables).

(a) இரண்டு மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகள் அமைந்த இரண்டு நேரிய சமன்பாடுகள் கொண்ட தொகுப்பினை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y = d_1$$
$$a_2x + b_2y = d_2$$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

கிரேமரின் விதிப்படி, மாறிகளுக்கான தீர்வு,

$\Delta \neq 0$ எனும் நிலையில் $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$

ஆகும்.

(b) மூன்று மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகள் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

இங்கு

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $\quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

என்க.

கிரேமரின் விதிப்படி, மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளுக்கான தீர்வு, $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta z}{\Delta}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.19

கிரேமரின் விதியை பயன்படுத்தி தீர்வு காண்க : $2x + 3y = 7$, $3x + 5y = 9$.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 14 3/5/2020 10:52:07 AM

தீர்வு:

சமன்பாடுகள் முறையே, $2x+3y=7$, $3x+5y=9$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

ஆதலால் கிரேமர் விதியை பயன்படுத்தலாம்.

இப்பொழுது, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 8 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3$

கிரேமரின் விதிப்படி, $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{8}{1} = 8$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-3}{1} = -3$$

$\therefore$ தீர்வு $x = 8, y = -3$

எடுத்துக்காட்டு 1.20

ஜனவரி மற்றும் பிப்ரவரி மாதங்களில் A மற்றும் B என்ற இரு நிறுவனங்களிலும் திரு. ரவி என்பவரால் வாங்கப்பட்ட பங்குகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் செய்யப்பட்ட மொத்த முதலீடுகள் (ரூபாயில்) கீழ்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், இவ்விரு மாதங்களிலும் வாங்கப்பட்ட பங்குகளின் விலையைக் காண்க.

மாதங்கள்	பங்குகளின் எண்ணிக்கை		செய்யப்பட்ட மொத்த முதலீடு (₹)
	A	B	
சனவரி	10	5	125
பிப்ரவரி	9	12	150

தீர்வு:

A-என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை x என்க.

B-என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை y என்க.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின்படி

$$10x+5y=125$$
$$9x+12y=150$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 75 \neq 0 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 125 & 5 \\ 150 & 12 \end{vmatrix} = 750$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 10 & 125 \\ 9 & 150 \end{vmatrix} = 375$$

$\therefore$ கிரேமரின் விதிப்படி, $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{750}{75} = 10$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{375}{75} = 5$$

A என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை ₹10 மற்றும் B என்ற நிறுவனத்திலிருந்து வாங்கப்பட்ட ஒரு பங்கின் விலை ₹5 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.21

11 பென்சில்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்களின் மொத்த விலை ₹64. மேலும் 8 பென்சில்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்களின் மொத்த விலை ₹49. கிரேமரின் விதியைப்பயன்படுத்தி ஒரு பென்சில் மற்றும் ஒரு அழிப்பான் விலையைக் காண்க.

தீர்வு:

ஒரு பென்சிலின் விலை ₹ x என்க

ஒரு அழிப்பானின் விலை ₹ y என்க

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

$$11x+3y=64$$
$$8x+3y=49$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$ (தொகுப்பு ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 64 & 3 \\ 49 & 3 \end{vmatrix} = 45 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 11 & 64 \\ 8 & 49 \end{vmatrix} = 27$$

$\therefore$ கிரேமரின் விதிப்படி

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{45}{9} = 5$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{27}{9} = 3$$

$\therefore$ ஒரு பென்சிலின் விலை ₹5 மற்றும் ஒரு அழிப்பானின் விலை ₹3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.22

கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க:

$$x+y+z=4,\ 2x-y+3z=1,\ 3x+2y-z=1$$

தீர்வு:

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$

∴ கிரேமரின் விதிப்படி, தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -13$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 39$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 26$$

∴ கிரேமரின் விதிப்படி $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{39}{13} = 3 \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2$$

∴ தீர்வு $\{x, y, z\} = \{-1, 3, 2\}$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

$|A| = 0$ எனும்பொழுது சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தீர்வுகளை கொண்டதாகவோ அல்லது தீர்வு இல்லாமலோ இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.23

3 வணிகக் கணிதப் புத்தகங்கள், 2 கணக்கு பதிவியல் புத்தகங்கள் மற்றும் ஒரு வணிகவியல் புத்தகம் ஆகியவற்றின் மொத்த விலை ₹840. இரண்டு வணிகக் கணித புத்தங்கள், ஒரு கணக்குபதிவியல் மற்றும் ஒரு வணிகவியல் புத்தகத்தின் மொத்த விலை ₹570. ஒரு வணிகக் கணித புத்தகம், ஒரு கணக்குப்பதிவியல் புத்தகம் மற்றும் 2 வணிகவியல் புத்தகங்களின் மொத்தவிலை ₹630 எனில், ஒவ்வொரு புத்தகத்தின் விலையை கிரேமரின் விதியைக் கொண்டுக் காண்க.

தீர்வு:

ஒரு வணிகக் கணித புத்தகத்தின் விலை ₹ x என்க.

ஒரு கணக்குபதிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ y என்க.

ஒரு வணிகவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹ z என்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு, கீழ்காணும் சமன்பாடுகளை பெறலாம்.

$$\therefore \; 3x + 2y + z = 840$$
$$2x + y + z = 570$$
$$x + y + 2z = 630$$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 840 & 2 & 1 \\ 570 & 1 & 1 \\ 630 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -240$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 840 & 1 \\ 2 & 570 & 1 \\ 1 & 630 & 2 \end{vmatrix} = -300$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 840 \\ 2 & 1 & 570 \\ 1 & 1 & 630 \end{vmatrix} = -360$$

∴ கிரேமரின் விதிப்படி $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-240}{-2} = 120$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-300}{-2} = 150$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-360}{-2} = 180$$

∴ ஒரு வணிகக் கணித புத்தகத்தின் விலை ₹ 120,

ஒரு கணக்குபதிவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹150 மற்றும்

ஒரு வணிகவியல் புத்தகத்தின் விலை ₹180.

எடுத்துக்காட்டு 1.24

ஒரு வாகன தயாரிப்பு நிறுவனமானது S_1, S_2 மற்றும் S_3 என்ற மூன்று வகையான எஃகு இரும்புகளையும் பயன்படுத்தி C_1, C_2 மற்றும் C_3 என்ற மூன்று வகையான மகிழுந்து வாகனங்களை உற்பத்தி செய்கிறது. ஒவ்வொரு வகையான வாகனங்ளுக்கு தேவையான எஃகு இரும்பு R டன்களில் மற்றும் மூன்று வகையான மகிழுந்து வாகனங்களுக்கும் தேவையான மொத்த

எஃகு இரும்பு விவரம் பின்வரும் அட்டவணையில் தொகுத்து வழங்கப்பட்டுள்ளது.

எஃகு வகைகள்	வாகனங்களின் வகைகள்			இருப்பிலுள்ள மொத்த எஃகு
	C_1	C_2	C_3	
S_1	3	2	4	28
S_2	1	1	2	13
S_3	2	2	1	14

நிறுவனம் தயாரிக்கும் ஒவ்வொரு வகையான வாகனங்களின் எண்ணிக்கையை காண்க.

தீர்வு:

C_1 வகை வாகனங்களின் எண்ணிக்கை x என்க.

C_2 வகை வாகனங்களின் எண்ணிக்கை y என்க.

C_3 வகை வாகனங்களின் எண்ணிக்கை z என்க.

$$\therefore\ 3x+2y+4z=28$$
$$x+y+2z=13$$
$$2x+2y+z=14$$

இங்கு $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 28 & 2 & 4 \\ 13 & 1 & 2 \\ 14 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 28 & 4 \\ 1 & 13 & 2 \\ 2 & 14 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 28 \\ 1 & 1 & 13 \\ 2 & 2 & 14 \end{vmatrix} = -12$$

$\therefore$ கிரேமரின் விதிப்படி $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-6}{-3} = 2$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$\therefore$ உற்பத்தி செய்யப்படும் ஒவ்வொரு வகையான வாகனங்களின் எண்ணிக்கை முறையே 2, 3 மற்றும் 4 ஆகும்.

பயிற்சி 1.2

1. கீழ்காணும் சமன்பாடுகளை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க.
   (i) $2x + 3y = 7, \quad 3x + 5y = 9$
   (ii) $5x + 3y = 17, \quad 3x + 7y = 31$
   (iii) $2x + y - z = 3, \quad x + y + z = 1, \quad x - 2y - 3z = 4$
   (iv) $x + y + z = 6, \quad 2x + 3y - z = 5, \quad 6x - 2y - 3z = -7$
   (v) $x + 4y + 3z = 2 \quad 2x - 6y + 6z = -3, \quad 5x - 2y + 3z = -5$

2. 3 அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளம் மற்றும் 2 அலகுகள் மூலதனம் கொண்டு தயாரிக்கப்படும் உற்பத்தி பொருள்களுக்கான செலவு ₹62 ஆகும். 4 அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளம் மற்றும் 1 அலகு மூலதனம் கொண்டு பொருள்கள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருந்தால் அதன் மொத்த செலவு ₹56 எனில், அணிக்கோவை முறையில் தொழிலாளர் மற்றும் மூலதனத்தின் ஒரு அலகுக்கு ஆகும் செலவினைக் காண்க.

3. ₹8,600 ஆனது இரண்டு விதமான கணக்குகளில் முதலீடு செய்யப்பட்டுள்ளது. இதில் ஒரு முதலீடானது $4\frac{3}{4}\%$ -ம், மற்றொரு முதலீடானது $6\frac{1}{2}\%$ -ம் ஆண்டு வருவாயை ஈட்டுத் தருகிறது. ஓர் ஆண்டில் இரு முதலீடுகளுக்கான மொத்த வருமானம் ₹431.25 எனில், ஒவ்வொரு கணக்கிலும் செய்யப்பட்ட முதலீட்டு தொகையினைக் காண்க.

4. மெரினா கடற்கரையில் இரண்டு சிறுமிகள் குதிரை சவாரி மற்றும் கிவாட் பைக் சவாரியை மணி நேர வாடகையில் விளையாடுகிறார்கள். மே மாதத்தின் போது சிறுமி கெரன் ₹780-ம் சிறுமி பெனிட்டா ₹560-ம் செலவு செய்தார்கள். அதன் விவரம் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பெயர்	பயன்படுத்திய காலம் (மணிகளில்)		மொத்த செலவு (₹)
	குதிரை சவாரி	கிவாட் பைக் சவாரி	
கெரன்	3	4	780
பெனிட்டா	2	3	560

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 17 3/5/2020 10:52:18 AM

இரண்டு விளையாட்டுகளுக்கான ஒரு மணி நேர வாடகையை அணிக்கோவை முறையில் காண்க.

5. ஒரு சந்தை ஆய்விற்காக A, B மற்றும் C ஆகிய பொருட்கள் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. குறியீட்டு எண்ணை காண்பதற்காக ஒவ்வொரு பொருளும் மூன்று வித தரங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு அவற்றிற்கு நிலையான எடைகள் ஒதுக்கப்படுகிறது. மூன்று பொருள்களின் நுகர்வு பற்றிய தகவல்கள் மற்றும் பொருள்களின் மொத்த எடைகள் ஆகியவை கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பொருள்கள்	தரங்களின் நுகர்வுகள்			மொத்த எடைகள்
	I	II	III	
A	1	2	3	11
B	2	4	5	21
C	3	5	6	27

மூன்று தரங்களுக்கும் ஒதுக்கப்பட்ட எடைகளை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி காண்க.

6. மொத்த தொகை ₹8,500 ஆனது வட்டி வருமானம் தரும் மூன்று விதமான கணக்குகளில் முதலீடு செய்யப்பட்டது. ஒவ்வொரு முதலீட்டுக்கான வட்டிவீதம் 2%, 3% மற்றும் 6% ஆகவும், ஒரு வருடத்திற்கான மொத்த வட்டி ₹380 ஆகவும் உள்ளது. மேலும் 6% முதலீட்டு தொகையானது மற்ற இரண்டு முதலீடுகளின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமம் எனில், கிரேமரின் விதியைக் கொண்டு ஒவ்வொரு பிரிவிலும் செய்த முதலீட்டுத் தொகை எவ்வளவு?

1.3 மாறுதல் நிகழ்தகவு அணிகள் (Transition Probability Matrices)

1.3.1 தொடக்க பங்கு சந்தை பங்கீட்டினைக் கொண்டு அடுத்த நிலையினை முன்னறிவித்தல் (Forecasting the succeeding state when the initial market share is given)

ஒருநிலை மாறுதல் நிகழ்தகவு (One stage Transition Probability)

ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் நிகழக்கூடிய நிகழ்வு s_n என்ற நிலையில் உள்ளது. ஒரு அலகு நேரம் கழித்து மற்றொரு நிகழ்வு நிகழுமானால், அதாவது அமைப்பு ஒரு நிலை s_n லிருந்து s_{n+1} க்கு நகருமானால், இந்நகர்வு நிகழ்தகவு பரவலுடன் தொடர்புபடுத்தப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு நகர்வின் மாற்றமும் s_n லிருந்து s_{n+1} க்கு மாறுவது நிகழ்தகவுடன் தொடர்புபடுத்தப்படுகின்றது. இந்நிகழ்தகவு ஒருநிலை மாறுதல் நிகழ்தகவு என அழைக்கப்படுகின்றது.

மாறுதல் அணி (Transition Matrix)

P_{jk} என்ற மாறுதல் நிகழ்தகவானது $P_{jk} > 0, \sum_k P_{jk} = 1$ என அனைத்து j க்கும் நிறைவு செய்கின்றது.

இந்த நிகழ்தகவுகளை அணிவடிவில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

இதுவே மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.25

சந்தையில் உள்ள A மற்றும் B ஆகிய தர அடையாளம் கொண்ட பொருள்களுக்கான மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $\begin{matrix} & A & B \\ A & 0.9 & 0.1 \\ B & 0.3 & 0.7 \end{matrix}$ (அணி) எனில், சமநிலையில் தர அடையாளம் கொண்ட ஒவ்வொரு பொருள்களுக்கான சந்தை பங்கீடுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

$$T = \begin{matrix} & A & B \\ A & 0.9 & 0.1 \\ B & 0.3 & 0.7 \end{matrix}$$

சமநிலையில், நாம் பெறுவது $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ மேலும், இங்கு $A + B = 1$ ஆகும்.

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$$

$$0.9A + 0.3B = A$$

$$0.9A + 0.3(1 - A) = A$$

$$0.9A - 0.3A + 0.3 = A$$

$$0.6A + 0.3 = A$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 18 3/5/2020 10:52:21 AM

$$0.4A = 0.3$$

$$A = \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow B = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

எனவே A –ன் சந்தைப்பங்கீடு 75% மற்றும் B-யின் சந்தைப்பங்கீடு 25% ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

பரிதி என்பவர் ஒவ்வொரு நாளும் சோகமாகவோ (S) அல்லது மகிழ்ச்சியாகவோ (H) உள்ளார். ஒரு நாள் மகிழ்ச்சியாக இருந்தால், அடுத்த நாள் 5-ல் 4-பங்கு சோகமாக இருப்பார். ஒரு நாள் சோகமாக இருந்தால், அடுத்த நாள் 3-ல் 2 பங்கு மகிழ்ச்சியாக இருப்பார் எனில், நீண்டகால அடிப்படையில் ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மகிழ்ச்சியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு:

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

சமநிலையில், $\begin{pmatrix} S & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & H \end{pmatrix}$

இங்கு $S + H = 1$

$$\frac{1}{3}S + \frac{4}{5}H = S$$

$$\frac{1}{3}(1-H) + \frac{4}{5}H = 1 - H$$

இதைத் தீர்க்க, நாம் பெறுவது $S = \frac{6}{11}$ மற்றும் $H = \frac{5}{11}$.

நீண்ட கால அடிப்படையில், தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட நாளில் மகிழ்ச்சியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{11}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.27

பின்வரும் வழிமுறைகளில் ஆகாஷ் மட்டைப்பந்து விளையாடுகின்றார். ஒரு முறை வெற்றி பெற்றால் (S) அடுத்த முறை விளையாடும்போது வெற்றிபெற 25% வாய்ப்பு உள்ளது. அவர் தோல்வி (F) அடைந்தால் அடுத்தமுறை விளையாடும்போது 35% வெற்றி பெற வாய்ப்பு உள்ளது. இவ்விவரங்களிலிருந்து மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி மற்றும் நீண்ட கால அடிப்படையில் அவரின் வெற்றி வாய்ப்பின் சராசரி ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு:

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $T = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix}$

சமநிலையில், $\begin{pmatrix} S & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.35 & 0.65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & F \end{pmatrix}$

இங்கு $S + F = 1$

$$0.25\,S + 0.35\,F = S$$

$$0.25\,S + 0.35\,(1 - S) = S$$

இதை தீர்க்க $S = \frac{0.35}{1.10}$

$\Rightarrow S = 0.318$ மற்றும் $F = 0.682$

$\therefore$ ஆகாஷின் வெற்றி வாய்ப்பு சராசரி 31.8% ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.28

ஒரு பாடவேளையில், கணிதம் பயிலும் மாணவர்களில் 80% பேர் அடுத்த பாடவேளையில் கணிதம் பயில்கின்றனர். ஒரு பாடவேளையில், ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்களில் 30% பேர் அடுத்த பாடவேளையில் ஆங்கிலம் பயில்கின்றனர். ஆரம்பத்தில் 60 மாணவர்கள் கணிதமும், 40 மாணவர்கள் ஆங்கிலமும் பயில்கின்றனர் எனில்,

(i) மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

(ii) தொடர்ச்சியாக அடுத்த 2 பாடவேளைகளிலும் கணிதம் மற்றும் ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

(i) மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} M & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} M \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

முதல் பாடவேளைக்குப் பின்,

$$\begin{matrix} M & E \end{matrix} \qquad \begin{matrix} M & E \end{matrix} \qquad \begin{matrix} M & E \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 60 & 40 \end{pmatrix} \begin{matrix} M \\ E \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 & 24 \end{pmatrix}$$

எனவே முதல் பாடவேளைக்குப் பின், கணிதம் பயிலும் மாணவர்கள் 76 பேர்களும், ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்கள் 24 பேர்களும் இருப்பார்கள்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 19 3/5/2020 10:52:23 AM

இரு பாடவேளைகளுக்குப் பின்,

$$\begin{matrix} & M \quad E \\ & \begin{pmatrix} 76 & 24 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} & M \quad\ \ E \\ \begin{matrix} M \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 60.8+16.8 & 15.2+7.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 77.6 & 22.4 \end{pmatrix}$$

இரு பாடவேளைகளுக்குப் பின், கணிதம் பயிலும் மாணவர்கள் 78 பேர்களும் (தோராயமாக) மற்றும் ஆங்கிலம் பயிலும் மாணவர்கள் 22 பேர்களும் (தோராயமாக) இருப்பர்.

மாற்று முறை

$$\begin{matrix} & M \quad E \\ & \begin{pmatrix} 60 & 40 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} & M \quad\ \ E \\ \begin{matrix} M \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}^2 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} & M \quad E \\ & \begin{pmatrix} 60 & 40 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} & M \quad\ \ E \\ \begin{matrix} M \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.78 & 0.22 \\ 0.77 & 0.23 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= (46.8 + 30.8 \quad 13.2 + 9.2)$$

$$= (77.6 \quad 22.4)$$

பயிற்சி 1.3

1. ஒரு வாரப்பத்திரிக்கைக்குச் சந்தா கட்டுமாறு கேட்டுக்கொள்ளப்படும் கடிதம் அந்த பத்திரிக்கை அலுவலகத்திலிருந்து ஏராளமானவர்களுக்கு அனுப்படுகிறது. கடிதம் பெற்றவர்களில், சந்தாதாரர்களாக இருந்து மீண்டும் சந்தா கட்டுபவர் 45% ஆகும். சந்தாதாரர்களாக இல்லாமல் இருந்து புதியதாக சந்தா கட்டுபவர்கள் 30% ஆகும். இதே போல் முன்னர் கடிதம் அனுப்பப்பட்டபோது, கடிதம் பெற்றவர்களில் 40% பேர் சந்தாதாரர்களாகச் சேர்ந்தனர் எனத் தெரிகிறது தற்போது கடிதத்தைப் பெறுபவர்களில் எத்தனை சதவீதம் பேர் சந்தாதாரர்களாவர் என எதிர்பார்க்கலாம்?

2. சென்னை நகரில் ஒரு புதிய போக்குவரத்து வசதி தற்போது செயல்பாட்டிற்கு வந்துள்ளது. அதனை இந்த ஆண்டு பயன்படுத்துபவர்கள் 30% பேர் அடுத்த ஆண்டு பயன்படுத்தாமல் மெட்ரோ ரயில் வண்டிக்கு மாறி விடுவர். மீதி 70% தொடர்ந்து அப்புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர். இந்த ஆண்டு மெட்ரோ ரயில் வண்டியை பயன்படுத்துபவர்களில் 70% பேர் அடுத்த ஆண்டும் தொடர்ந்து அதையே பயன்படுத்துவர் மீதி 30% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதிக்கு மாறிவிடுவர். சென்னை நகர மக்கள் தொகை மாறாமலிருக்கிறது என்றும் பயணிகளில் அடுத்த ஆண்டில் 60% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியையும் 40% பேர் மெட்ரோ ரயில் வண்டியையும் பயன்படுத்துவார்கள் எனக் கொண்டால்,

   (i) அதற்கு அடுத்த ஆண்டில் எத்தனை சதவீதம் பயணிகள் புதிய போக்குவரத்து வசதியை பயன்படுத்துவார்கள் என எதிர்பார்க்கலாம்?

   (ii) காலப்போக்கில் எத்தனை சதவீதம் பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர்?

3. சந்தையில் உள்ள A மற்றும் B இருவகையான சோப்புகளின் தற்போதைய சந்தைப் பங்கீடு 15% மற்றும் 85% ஆகும். சென்ற ஆண்டு Aவாங்கியவர்களின் 65% பேர் மீண்டும் அதை இந்த ஆண்டும் வாங்குகிறார்கள். 35% பேர் B-க்கு மாறிவிடுகின்றனர். சென்ற ஆண்டு B வாங்கியவர்களில் 55% பேர் இந்த ஆண்டும் மீண்டும் அதை வாங்குகிறார்கள். 45% பேர் A-க்கு மாறி விடுகிறார்கள் ஒரு ஆண்டுக்குப் பிறகு அவற்றின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க.மேலும் சந்தையில் சமநிலை எப்போது எட்டப்படும்?

4. A மற்றும் B என்ற இரு விற்பனைப் பொருள்களின் தற்போதைய சந்தை விற்பனை 50% மற்றும் 50% ஆக உள்ளது. நுகர்வோரின் விருப்பங்கள் ஒவ்வொரு வாரமும் மாறுகின்றன. சென்ற வாரம் A -ஐ வாங்கியவர்களில் 60% பேர் மீண்டும் A -ஐ வாங்குகின்றனர். 40% பேர் B-க்கு மாறிவிடுகிறார்கள். சென்ற வாரம் B வாங்கியவர்களில் 80% பேர் அதை மீண்டும் வாங்குகிறார்கள். 20% பேர் A-க்கு மாறி விடுகிறார்கள். இரு வாரங்களுக்குப் பிறகு அவர்களின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க. இந்த போக்கு தொடருமானால், எப்போது சமநிலை எட்டப்படும்?

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 20 3/5/2020 10:52:25 AM

பயிற்சி 1.4

பொருத்தமான விடையை தேர்ந்தெடுக்க

1. $A=(1\ \ 2\ \ 3)$ எனில், AA^T -ன் தரம்

   (a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 1

2. ஒவ்வொரு உறுப்பும் 1 எனக் கொண்ட $m\times n$ வரிசை உடைய அணியின் தரம்

   (a) 0 (b) 1 (c) m (d) n

3. $T = \begin{matrix} & A & B \\ A & 0.4 & 0.6 \\ B & 0.2 & 0.8 \end{matrix}$ என்பது ஒரு மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி எனில், சமநிலையில் A-ன் மதிப்பு

   (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{8}$

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ எனில், $\rho(A)$ =

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) n

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம்

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d)3

6. வரிசை n உடைய அலகு அணியின் தரம்

   (a) $n-1$ (b) n (c) $n+1$ (d) n^2

7. $\rho(A)=r$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எது சரி?

   (a) r வரிசையுடைய அனைத்து சிற்றணிக் கோவைகளின் மதிப்பும் பூச்சியங்களாக இருக்காது.

   (b) A ஆனது குறைந்தபட்சம் ஒரு r வரிசை பூச்சிமற்ற சிற்றணிக்கோவையாவது பெற்றிருக்கும்.

   (c) A ஆனது குறைந்த பட்சம் $(r+1)$ வரிசை யுடைய சிற்றணிக்கோவையின் மதிப்பு பூச்சியமாக இருக்கும்படியாக பெற்றிருக்கும்.

   (d) அனைத்து $(r+1)$ வரிசை மற்றும் அதைவிட அதிகமான வரிசை கொண்ட பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவைகள் இருக்கும்.

8. $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ எனில் AA^T -ன் தரம்

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

9. $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் 2 எனில், λ -ன் மதிப்பு

   (a) 1 (b) 2

   (c) 3 (d) மெய்யெண் மட்டும்

10. மூலைவிட்ட அணி $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ –ன் தரம்

    (a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 5

11. $T = \begin{matrix} & A & B \\ A & 0.7 & 0.3 \\ B & 0.6 & x \end{matrix}$ என்பது மாறுதல் நிகழ்வு அணி எனில் x-ன் மதிப்பு

    (a) 0.2 (b) 0.3 (c) 0.4 (d) 0.7

12. பின்வருவனவற்றில் எது ஒரு அணிக்கான அடிப்படை உருமாற்றம் ஆகாது?

    (a) $R_i \leftrightarrow R_j$ (b) $R_i \to 2R_i + 2C_j$

    (c) $R_i \to 2R_i - 4R_j$ (d) $C_i \to C_i + 5C_j$

13. $\rho(A)=\rho(A,B)$ எனில், தொகுப்பானது

    (a) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் பெற்றுள்ளது

    (b) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

    (c) ஒருங்கமைவு உடையது

    (d) ஒருங்கமைவு அற்றது

4WCNQV

14. $\rho(A)=\rho(A,B)=$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை எனில் தொகுப்பானது

    (a) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் பெற்றுள்ளது

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 21 3/5/2020 10:52:29 AM

(b) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

(c) ஒருங்கமைவு அற்றது

(d) ஒருங்கமைவு உடையது

15. $\rho(A) \neq \rho(A,B)$ எனில் தொகுப்பானது

(a) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் பெற்றுள்ளது

(b) ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது

(c) ஒருங்கமைவு அற்றது

(d) ஒருங்கமைவு உடையது

16. ஒரு மாறுதல் நிகழ்தகவு அணியில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளின் மதிப்பும் எந்த எண்ணுக்கு சமமாகவோ அல்லது பெரியதாகவோ இருக்கும்?

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) 3

17. $AX = B$ என்ற சமச்சீரற்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் மாறிகளின் எண்ணிக்கை n எனில், தொகுப்பானது ஒரே ஒரு தீர்வை எப்போதும் பெறும்?

(a) $\rho(A) = \rho(A,B) > n$

(b) $\rho(A) = \rho(A,B) = n$

(c) $\rho(A) = \rho(A,B) < n$

(d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

18. $4x+6y=5,\ 6x+9y=7$ என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு

(a) ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு

(b) தீர்வு இல்லை

(c) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு

(d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

19. $x+2y+3z=1,\quad 2x+y+3z=2$

$5x+5y+9z=4$ என்றசமன்பாட்டுதொகுப்பிற்கு

(a) ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு

(b) எண்ணிகையற்ற தீர்வுகள் உண்டு

(c) தீர்வு இல்லை

(d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

20. $|A| \neq 0$, எனில், A ஒரு

(a) பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி

(b) பூஜ்ஜியக் கோவை அணி

(c) பூஜ்ஜிய அணி

(d) மேற்கண்ட ஏதுமில்லை

21. $k \neq$ __ எனில், $x+y+z=2,\ 2x+y-z=3,\ 3x+2y+k=4$ என்ற நேரிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது, ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்.

(a) 4 (b) 0 (c) −4 (d) 1

22. கிரேமரின் விதியைக் கொண்டு ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற தேவையான கட்டுப்பாடு,

(a) $\Delta_z \neq 0$ (b) $\Delta_x \neq 0$

(c) $\Delta \neq 0$ (d) $\Delta_y \neq 0$

23. $\frac{a_1}{x}+\frac{b_1}{y}=c_1,\ \frac{a_2}{x}+\frac{b_2}{y}=c_2,$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$

எனில்,

(x,y) -ன் மதிப்பு

(a) $\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)$ (b) $\left(\frac{\Delta_3}{\Delta_1}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)$

(c) $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{\Delta_1}{\Delta_3}\right)$ (d) $\left(\frac{-\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{-\Delta_1}{\Delta_3}\right)$

24. $|A_{n\times n}| = 3\quad |adjA| = 243$ எனில் n-ன்மதிப்பு

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

25. பூஜ்ஜிய அணியின் தரம்

(a) 0 (b) −1 (c) ∞ (d) 1

இதர கணக்குகள்

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 22 3/5/2020 10:52:34 AM

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

4. $x+y+z=7$, $x+2y+3z=18$, $y+2z=6$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுடையதா என சோதிக்க.

5. பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் k-ன் மதிப்பைக் காண்க. $2x+3y-z=5$, $3x-y+4z=2$, $x+7y-6z=k$

6. தரப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனில் k-ன் மதிப்பைக் காண்க. $x+y+z=1$, $3x-y-z=4$, $x+5y+5z=k$.

7. $x+2y+z=7$, $2x-y+2z=4$, $x+y-2z=-1$ என்ற சமன்பாடுகளை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க.

8. 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ சர்க்கரையின் விலை ₹100. 1 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் விலை ₹80. 3 கிலோ கோதுமை, 2 கிலோ சர்க்கரை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் விலை ₹220 எனில் ஒவ்வொன்றின் ஒரு கிலோ விலையை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்திக் காண்க..

9. வெவ்வேறு தரகு வீதங்களையுடைய A, B, C என்ற மூன்று பொருள்களை கடந்த மூன்று மாதங்களில் ஒரு விற்பனையாளர் விற்பனை செய்ததற்கான விவரங்கள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாதங்கள்	விற்பனை செய்த அலகுகள்			பெற்ற மொத்த தரகு ₹)
	A	B	C	
ஜனவரி	90	100	20	800
பிப்ரவரி	130	50	40	900
மார்ச்சு	60	100	30	850

கிரேமரின் முறையில், A, B, C என்ற பொருள்களுக்கான தரகு வீதத்தைக் காண்க.

10. ஒரு வாரப் பத்திரிக்கைக்குச் சந்தா கட்டுமாறு கேட்டுக் கொள்ளப்படும் கடிதம் அந்த பத்திரிக்கை அலுவலகத்திலிருந்து ஏராளமானவர்களுக்கு அனுப்பப்படுகிறது. கடிதம் பெற்றவர்களில், சந்தாதாதாரர்களாக இருந்து மீண்டும் சந்தா கட்டுபவர் 60% ஆகும். சந்தாதாதாரர்களாக இல்லாமலிருந்து புதியதாக சந்தா கட்டுபவர்கள் 25% ஆகும். இதே போல் முன்னர் கடிதம் அனுப்பப்பட்ட போது கடிதம் பெற்றவர்களில் 40% பேர் சந்தாதாதாரர்களாகச் சேர்ந்தனர் எனத் தெரிகிறது. தற்போது கடிதத்தைப் பெறுபவர்களில் எத்தனை சதவீதம் பேர் சந்தாதாதாரர்களாவர் என எதிர்பார்க்கலாம்.

தொகுப்புரை

- **அணியின் தரம்**

  A என்ற அணியின் தரம், அந்த அணியின் மிகப்பெரிய பூச்சியமற்ற சிற்றணிக் கோவையின் வரிசை ஆகும்.
- $\rho(A) \geq 0$.
- அணி A-ன் வரிசை $m \times n$ எனில் அதன் தரமானது, $\{m,n\}$ –ன் மீச்சிறு மதிப்புக்குச் சமமாகவோ அல்லது சிறியதாகவோ இருக்கும்.
- பூச்சிய அணியின் தரம் '0' ஆகும்.
- $n \times n$ வரிசை உடைய பூச்சியமற்ற கோவை அணியின் தரம் 'n' ஆகும்.
- **சமான அணிகள்**

  A மற்றும் B என்பவை சமவரிசை கொண்ட அணிகள் என்க. இவற்றில் ஒரு அணியை மற்றொரு அணியிலிருந்து, முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள அடிப்படை உருமாற்றங்களை மேற்கொள்வதன் மூலம் பெறுவோமாயின், A-யும் B-யும் சமான அணிகள் எனப்படும். இதனை $A \sim B$ என குறிப்பிடலாம்.

- **ஏறுபடி வடிவம்**

  $m \times n$ வரிசை உடைய A என்ற அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளதாயின் அது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்தல் வேண்டும்.

  (i) அனைத்து உறுப்புகளையும் பூச்சிய உறுப்புகளாய் கொண்ட ஒவ்வொரு நிரையும் பூச்சியமற்ற உறுப்புகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட நிரைக்கு கீழே அமைய வேண்டும்.

  (ii) பூச்சியமற்ற நிரையில் வரும் முதல் பூச்சியமற்ற உறுப்பிற்கு முன்பாக இடம்பெறும் பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையானது அவ்வாறாகவே அதற்கு அடுத்து வரும் நிரையில் உள்ள பூச்சிய உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைவிட குறைவாக இருத்தல் வேண்டும்.

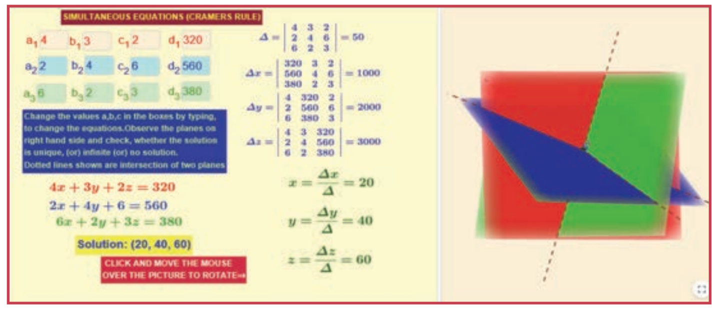
- குறைந்த பட்சம் ஒரு தீர்வாவது உண்டு எனில், சமன்பாட்டு தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு உடையது எனப்படும்.
- தீர்வுகள் அற்ற சமன்பாடு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது எனப்படும்.
- $\rho([A, B]) = \rho(A)$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை.
- $\rho([A, B]) = \rho(A) = n$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையவை மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வு மட்டும் உண்டு.
- $\rho([A, B]) = \rho(A) < n$ எனில், சமன்பாட்டுத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவு கொண்டது மற்றும் எண்ணிக்கயற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.
- $\rho([A, B]) \neq \rho(A)$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுத்தன்மை அற்றவை மேலும் தீர்வு இல்லை.
- $|adjA| = |A|^{n-1}$.
- $|A| = 0$ எனில், A ஆனது பூஜ்ஜியக் கோவை அணியாகும், இல்லையெனில், A ஆனது பூஜ்ஜியக் கோவை அல்லாத அணியாகும்.
- $AX = B$ என்ற சமன்பாட்டு தொகுப்பில் $|A| \neq 0$ எனில் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மற்றும் ஒரே ஒரு தீர்வை பெற்றிருக்கும்.
- கிரேமரின் விதி ஆனது $\Delta \neq 0$ ஆக இருக்குபோது மட்டுமே பொருந்தும்.

கலைச்சொற்கள் (GLOSSARY)	
அசமப்படித்தான	Non homogeneous
அடிப்படை உருமாற்றங்கள்	Elementary transformations
அணி	Matrix
அணி சமன்பாடு	Matrix equation
அணிக்கோவை	Determinant
உற்பத்தி	Production
ஏறுபடி வடிவம்	Echelon form
ஒருங்கமைவு	Consistent
ஒருங்கமைவு அற்றது	Inconsistent
ஒருங்கமைவுள்ள	Consistent
ஒரே ஒரு தீர்வு	Unique solution
சதுர அணி	Square matrix
சமநிலை	Equilibrium
சமப்படித்தான	Homogenerous
தரம்	Rank
தெரியாத	Unknown
தொடர்ச்சியான	Subsequent
நிலை மாற்றம்	Transition
நேரிய சமன்பாடுகள்	Linear equations
பயணிகள்	Commuters
பூஜ்ஜியக்கோவை அணி	Singular matrix
பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி	Non–Singular matrix
பொருள்கள்	Commodities
போக்குவரத்து அமைப்பு	Transit system
மாறிகள்	Variables
மிகுதிப்படுத்திய / விரிவுபடுத்தப்பட்ட	Augmented
வரிசை	Order
வெட்டிக்கொள்ளும்	Intersecting
வெளிப்படைத்தீர்வு	Trivial solution
வெளிப்படையற்ற தீர்வு	Non trivial solution

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 1.indd 25 3/5/2020 10:52:37 AM

இணையச் செயல்பாடு

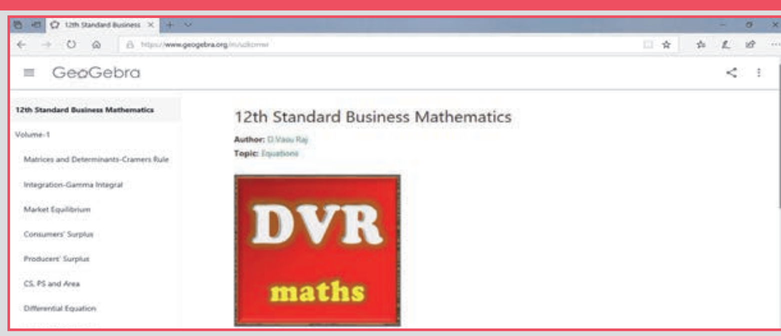
செயல்பாட்டின் இறுதியில் எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



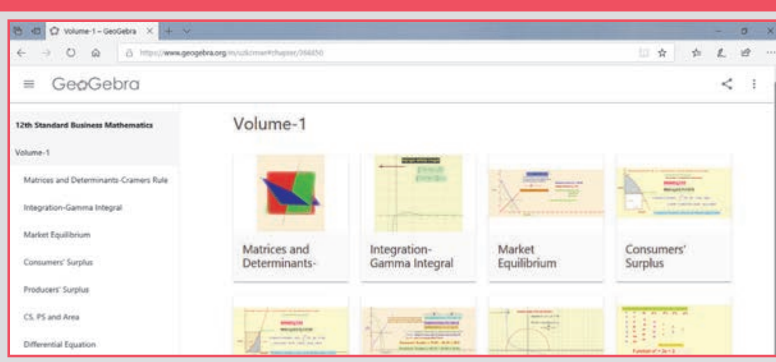
படி – 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–1" யை தெரிவு செய்யவும்..

படி - 2 : "Matrices and Determinants–Cramer's rule" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். அதில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் X,Y, Z கெழுக்களின் எண்களை மாற்றவும். பின்பு முப்பரிமாண படங்களை நகர்த்தி அதன் உண்மையானத் தீர்வினை காண்க

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM