গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্ব
(PRINCIPLE OF MATHEMATICAL INDUCTION)

❖ *Analysis and natural philosophy owe their most important discoveries to this fruitful means, which is called induction. Newton was indebted to it for his theorem of the binomial and the principle of universal gravity.- LAPLACE* ❖

4.1 অৱতাৰণা (Introduction)

G.Peano
(1858–1932)

গণিতীয় চিন্তাৰ এটা প্ৰধান ভিত্তি হ'ল নিগমনিক উক্তি (deductive reasoning)। নিগমনিক যুক্তিৰ প্ৰকাশ কিদৰে কৰা হয় সাধাৰণভাৱে দেখুৱাবৰ বাবে তৰ্কশাস্ত্ৰৰ পৰা লোৱা তিনিটা উদাহৰণ এনেধৰণৰ ঃ

(ক) ছক্ৰেটিছ এজন মানুহ।

(খ) সকলো মানুহ মৰণশীল, গতিকে,

(গ) ছক্ৰেটিছ মৰণশীল।

যদি (ক) আৰু (খ) উক্তি দুটা সত্য, তেনেহ'লে (গ) ৰ সত্যতা প্ৰতিপন্ন হ'ব। কথাখিনি বুজিবৰ বাবে সৰল উদাহৰণ এটা লোৱা হ'ল ঃ

(i) দুইৰে আঠ বিভাজ্য।

(ii) দুইৰে বিভাজ্য যিকোনো সংখ্যা যুগ্ম সংখ্যা, গতিকে,

(iii) আঠ এটা যুগ্ম সংখ্যা।

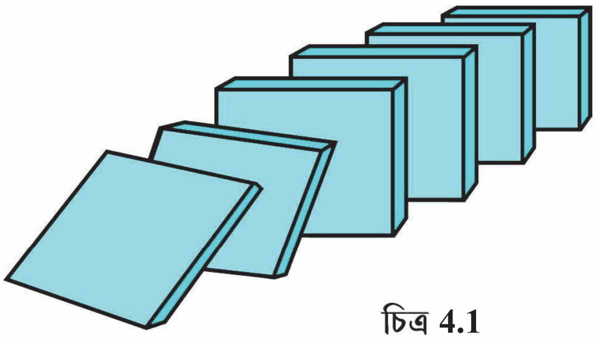
গতিকে নিগমনক চমুকৈ এনেকৈ ক'ব পৰা যায়— ধৰা হ'ল এটা উক্তি প্ৰমাণ কৰিব লাগে (গণিতত এই উক্তিক 'অনুমান' বা 'উপপাদ্য' বুলি কোৱা হয়)। এতিয়া বৈধ নিগমন ঢাপবিলাক আগবঢ়াই নি থকা হয় যাতে অনুমানটো সত্য বা অসত্য বুলি প্ৰমাণ কৰিব পৰা যায়। গতিকে নিগমন হ'ল এটা সৰ্বাত্মক সংঘটনৰ পৰা এটা বিশেষ সংঘটন প্ৰতিপাদন কৰা।

নিগমনৰ বিপৰীতে আগমনিক যুক্তিত প্ৰতিটো সংঘটন বিবেচনা কৰি এটা অনুমান বা সিদ্ধান্তত উপনীত হোৱা যায়। গণিতত ই সঘনে ব্যৱহৃত হয়। বৈজ্ঞানিক যুক্তিৰ ই হ'ল এটা প্ৰধান দিশ, য'ত তথ্য সংগ্ৰহ আৰু বিশ্লেষণেই হ'ল মূল কথা। সহজ কথাত, আগমন হ'ল বিশেষ অৱস্থা বা সত্যতাৰ সাধাৰণীকৰণ।

বীজগণিত বা গণিতৰ অন্য শাখাত n ৰ সহায়ত, (n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) এটা উক্তি বা এটা ফলাফল সূত্ৰবদ্ধ কৰা হয়। এনে উক্তি প্ৰমাণ কৰিবলৈ যাওঁতে যিটো সুউপযোগী পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰা হয় সেইটোৱেই হ'ল 'গাণিতীয় আৰোহ তত্ব'।

4.2 উদ্দেশ্য (Motivation)

গণিতত গণিতীয় আৰোহ নামেৰে আমি এটা সম্পূৰ্ণ আগমনৰ আৰ্হি ব্যৱহাৰ কৰোঁ। গণিতীয় আৰোহৰ মূল নীতি বুজাবলৈ আমি এটা উদাহৰণ লওঁ। পাতল আয়তাকাৰ খাপৰিৰ (tiles) সংগ্ৰহ এটা চিত্ৰ 4.1 ত দেখুওৱা ধৰণে দিয়া আছে।



চিত্ৰ 4.1

যেতিয়া প্ৰথমখন দেখুওৱা দিশত ঠেলি দিয়া হয়, তেতিয়াহ'লে সকলোবোৰ বাগৰি পৰিব। সকলোবোৰ যে বাগৰি পৰিব সেয়া নিশ্চিতভাৱে জানিবলৈ, আমি এইখিনি কথা জানিলেই হ'ব

(ক) প্ৰথমখন বাগৰি পৰে, আৰু

(খ) এখন বাগৰি পৰাৰ লগে লগে ইয়াৰ ঠিক পিছৰখনো বাগৰি পৰে।

গণিতীয় আৰোহৰ অন্তৰ্নিহিত নীতি এইটোৱেই।

আমি জানো যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিৰ **N** এটা বিশেষ ক্ৰমবদ্ধ উপসংহতি। দৰাচলতে তলৰ ধৰ্মটো মানি চলা **R** অৰ আটাইতকৈ সৰু উপসংহতিটো হ'ল **N**।

এটা সংহতি S অক আগমনিক সংহতি (inductive set) বুলি কোৱা হয় যদি $1 \in S$ আৰু $x+1 \in S$ যেতিয়া $x \in S$। যিহেতু আগমনিক সংহতি হিচাপে **N** য়েই **R** অৰ আটাইতকৈ সৰু উপসংহতি, গতিকে **R** অৰ যিকোনো আগমনিক উপসংহতিৰ ভিতৰত **N** থাকিব।

উদাহৰণ (Illustration)

ধৰা হ'ল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা 1,2,3,......,n অৰ যোগফলৰ বাবে আমি এটা সূত্ৰ উলিয়াব লাগে, অৰ্থাৎ এনে এটা সূত্ৰ উলিয়াব লাগে য'ত $n=3$ বহুৱালে $1+2+3$ ৰ মান পোৱা যাব, $n=4$ বহুৱালে $1+2+3+4$ ৰ মান পোৱা যাব আৰু এইদৰে হৈ গৈ থাকিব। ধৰা হ'ল কিবা উপায়ে আমি পালোঁ যে $1+2+3+.....+n = \frac{n(n+1)}{2}$ সূত্ৰটো শুদ্ধ।

এই সূত্ৰটো প্ৰকৃততে কেনেদৰে প্ৰমাণ কৰিব পৰা যায়? আমি অৱশ্যে n অৰ বিভিন্ন মানৰ বাবে উক্তিটো সত্যাপন কৰিব পাৰোঁ। কিন্তু এই পদ্ধতিটোৱে সূত্ৰটো n ৰ সকলো মানৰ বাবে সত্য বুলি প্ৰমাণ কৰা নুবুজায়। আমি এনেদৰে আগ বাঢ়িম যাতে সূত্ৰটো কোনো এটা নিৰ্দিষ্ট ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ বাবে সত্য হ'লে ঠিক ইয়াৰ পিছৰ অখণ্ড সংখ্যাটোৰ বাবে সত্য হ'ব আৰু এইদৰে n অৰ সকলো ধনাত্মক অখণ্ড মানৰ বাবে সত্য হ'ব। এই ধৰণৰ পদ্ধতি এটাকেই গণিতীয় আৰোহ তত্ত্বৰ প্ৰয়োগ কৰা হয়।

4.3 গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্ব (The Principle of Mathematical Induction)

স্বাভাৱিক সংখ্যা n জড়িত এটা উক্তি P (n) দিয়া আছে যাতে

(i) উক্তিটো $n=1$ অৰ বাবে সত্য অৰ্থাৎ P (1) সত্য আৰু

(ii) যদি উক্তিটো $n=k$ ৰ বাবে সত্য, (k এটা কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা), তেনেহলে উক্তিটো $n=k+1$ অৰ বাবে সত্য, অৰ্থাৎ P (k) ৰ সত্যতাই P ($k+1$) ৰ সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰে।

তেনেহ'লে, সকলো স্বাভাৱিক সংখ্যা n ৰ বাবে $P(n)$ সত্য।

(i) নম্বৰ ধৰ্মটো সত্যতাৰ উক্তি মাত্ৰ। এনেকুৱা অৱস্থা হ'ব পাৰে য'ত উক্তিটো সকলো $n \geq 4$ ৰ বাবেহে সত্য। এই ক্ষেত্ৰত 1 নম্বৰ সোপান $n=4$ অৰ পৰা আৰম্ভ হ'ব আৰু আমি ফলটো $n=4$ অৰ বাবে অৰ্থাৎ P(4) সত্যাপন কৰিম।

(ii) নম্বৰ ধৰ্মটো চৰ্তযুক্ত ধৰ্ম। ইয়ে প্ৰদত্ত উক্তিটো $n = k$ ৰ বাবে সত্য নুবুজায়। যদি উক্তিটো $n = k$ ৰ বাবে সত্য হয়, তেতিয়াহ'লে ই $n = k + 1$ অৰ বাবেও সত্য হ'ব। গতিকে ধৰ্মটো প্ৰমাণ কৰিবলৈ হ'লে, মাত্ৰ চৰ্তযুক্ত প্ৰতিজ্ঞাটো প্ৰমাণ কৰিব লাগে;

যদি উক্তিটো $n = k$ ৰ বাবে সত্য, তেনেহ'লে ই $n = k + 1$ অৰ বাবেও সত্য।

ইয়াক আগমনিক সোপান (inductive step) বুলি কোৱা হয়। এই আগমনিক সোপানত প্ৰদত্ত উক্তিটো $n = k$ ৰ বাবে সত্য বুলি ধৰি লোৱা অনুমানটোক আগমনিক প্ৰকল্প (inductive hypothesis) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে, গণিতত প্ৰায়েই, তলত দেখুওৱা ধৰণৰ পেটাৰ্ণ একোটাহঁতৰপৰা একোটা সূত্ৰ আৱিষ্কাৰ কৰা হয়।

$$1 = 1^2 = 1$$
$$4 = 2^2 = 1 + 3$$
$$9 = 3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7, \text{ ইত্যাদি।}$$

মন কৰিব লগীয়া যে প্ৰথম দুটা অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ যোগফল হ'ল দ্বিতীয় স্বাভাৱিক সংখ্যাটোৰ বৰ্গ, প্ৰথম তিনিটা অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ যোগফল হ'ল তৃতীয় স্বাভাৱিক সংখ্যাটোৰ বৰ্গ, এনেদৰে হৈ থাকিব। গতিকে এই পেটাৰ্ণটোৰপৰা দেখা গ'ল যে

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ অৰ্থাৎ

প্ৰথম n টা অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ যোগফল হ'ল n অৰ বৰ্গ।

এতিয়া আমি লিখোঁ যে

$P(n): 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ ।

এতিয়া সকলো n অৰ বাবে P (n) সত্য বুলি প্ৰমাণ কৰিব লাগে।

গণিতীয় আৰোহৰ সহায়ত কৰা প্ৰমাণৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰথম সোপানটো হ'ল P (1) সত্য বুলি প্ৰমাণ কৰা। এই সোপানটো প্ৰাথমিক সোপান। স্পষ্টতঃ

$1 = 1^2$, অৰ্থাৎ P(1) সত্য।

পিছৰ সোপানটো হ'ল আগমনিক সোপান। ইয়াত আমি কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা k ৰ বাবে P (k) সত্য বুলি ধৰি লম। আৰু আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে P$(k+1)$ সত্য। যিহেতু P (k) সত্য, সেয়ে আমি পালোঁ

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) = k^2 \qquad ...(1)$$

এতিয়া লোৱা হ'ল

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) + \{2(k + 1) - 1\} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2 \quad ... (2)$$ [(1) অৰ সহায়ত]

গতিকে P$(k + 1)$ সত্য আৰু আগমনিক প্ৰমাণটো সম্পূৰ্ণ হ'ল।

সেয়ে সকলো স্বাভাৱিক সংখ্যা n অৰ বাবে P(n) সত্য।

উদাহৰণ 1 সকলো $n \geq 1$ অৰ বাবে, প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

সমাধান ধৰা হ'ল প্ৰদত্ত উক্তিটো $P(n)$ অৰ্থাৎ

$$P(n): 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n = 1$ অৰ বাবে, $P(1): 1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = 1,$ আৰু ই সত্য।

ধৰা হ'ল কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা k ৰ বাবে P (k) সত্য অৰ্থাৎ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \ldots(1)$$

এতিয়া আমি প্ৰমাণ কৰিম যে $P(k+1)$ ও সত্য।

এতিয়া আমি পাওঁ যে,

$$\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + k^2\right) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \qquad [(1) \text{ অৰ সহায়ত}]$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\}}{6}$$

গতিকে P (k) সত্য হ'লে P (k+1) সত্য হ'ব।

গতিকে গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰপৰা সকলো স্বাভাৱিক সংখ্যা n অৰ বাবে P(n) সত্য।

উদাহৰণ 2 সকলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে প্ৰমাণ কৰাঁ যে $2^n > n$

সমাধান ধৰা হ'ল $P(n): 2^n > n$

যেতিয়া $n = 1$, $2^1 > 1$. সেয়ে $P(1)$ সত্য।

ধৰা হ'ল কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা k ৰ বাবে P (k) সত্য অৰ্থাৎ

$$2^k > k \qquad (1)$$

এতিয়া আমি প্ৰমাণ কৰিম যে $P(k)$ সত্য হ'লে $P(k+1)$ সত্য হ'ব।

(1) অৰ উভয়পক্ষক 2 ৰে পূৰণ কৰি, আমি পালোঁ

$$2.2^k > 2k$$

অৰ্থাৎ $2^{k+1} > 2k = k + k > k + 1$

গতিকে, যদি P (k) সত্য,তেনেহ'লে P (k +1) সত্য। গতিকে, গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰ পৰা, প্ৰত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে P (n) সত্য।

উদাহৰণ 3 সকলো $n \geq 1$ অৰ বাবে, প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

সমাধান ইয়াত

$$\mathrm{P}(n): \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.......+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

আমি দেখিলোঁ যে $\mathrm{P}(1): \frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$, যিটো সত্য। গতিকে $n=1$ অৰ বাবে P(n) সত্য।

ধৰা হ'ল কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা k ৰ বাবে P (k) সত্য।

অৰ্থাৎ, $$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.........+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \qquad \ldots(1)$$

আমি প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে P (k) সত্য হ'লে P (k+1) সত্য। এতিয়া

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+......+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.........+\frac{1}{k(k+1)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad [(1) \text{ অৰ সহায়ত}]$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k^2+2k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

গতিকে, যদি P (k) সত্য তেনেহ'লে P (k+1) সত্য। গতিকে, গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰপৰা, সকলো স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বাবে P(n) সত্য।

উদাহৰণ 4 প্ৰত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে প্ৰমাণ কৰাঁ যে 4 এৰে $7^n - 3^n$ বিভাজ্য।

সমাধান আমি এনেদৰে লিখিব পাৰোঁ

P (n): 4 এৰে $7^n - 3^n$ বিভাজ্য।

আমি দেখিলোঁ যে

$\mathrm{P}(1): 7^1 - 3^1 = 4$ আৰু ই 4 এৰে বিভাজ্য। গতিকে $n = 1$ অৰ বাবে P (n) সত্য।

ধৰা হ'ল কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা k ৰ বাবে P (k) সত্য

অৰ্থাৎ P(k): 4 ৰে $7^k – 3^k$ বিভাজ্য

আমি এনেদৰে লিখিব পাৰোঁ $7^k - 3^k = 4d$, য'ত $d \in \mathbf{N}$. এতিয়া আমি প্ৰমাণ কৰিম যে যদি P(k) সত্য, তেনেহ'লে P (k+1) সত্য।

এতিয়া $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)} = 7^{(k+1)} - 7.3^k + 7.3^k - 3^{(k+1)}$

$$= 7(7^k - 3^k) + (7-3)3^k = 7(4d) + (7-3)3^k$$

$$= 7(4d) + 4.3^k = 4(7d + 3^k)$$

শেষৰ শাৰীৰপৰা আমি দেখিলোঁ যে 4 এৰে $7^{(k+1)} - 3^{(k+1)}$ বিভাজ্য। গতিকে, যদি $\mathrm{P}(k)$ সত্য, তেনেহ'লে $\mathrm{P}(k+1)$ সত্য। গতিকে, গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰপৰা, প্ৰত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে উক্তিটো সত্য।

উদাহৰণ 5 সকলো স্বাভাৱিক সংখ্যা n অৰ বাবে প্ৰমাণ কৰাঁ যে $(1+x)^n \geq (1+nx)$, য'ত $x > -1$.

সমাধান ধৰা হ'ল প্ৰদত্ত উক্তিটো P (n)

অৰ্থাৎ $\mathrm{P}(n): (1+x)^n \geq (1+nx), \quad x > -1$

যিহেতু $(1+x) \geq 1+x, \;\; x > -1$, গতিকে $n = 1$ ৰ বাবে P(n) সত্য।

ধৰা হ'ল

$\mathrm{P}(k)$: $(1+x)^k \geq (1+kx)$, $x > -1$ সত্য। ...(1)

আমি প্ৰমাণ কৰিম যে P (k) সত্য হ'লে $x > -1$ অৰ বাবে P (k +1) সত্য। ...(2)

তলৰ অভেদটো লোৱা হ'ল

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x)$$

দিয়া আছে যে $x > -1$. গতিকে $(1+x) > 0$. গতিকে, $(1+x)^k \geq 1+kx$ অৰ সহায়ত, আমি পালোঁ

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$$

অৰ্থাৎ $$(1+x)^{k+1} \geq (1+x+kx+kx^2) \quad \text{... (3)}$$

ইয়াত k এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা আৰু $x^2 \geq 0$. গতিকে $kx^2 \geq 0$. গতিকে

$$(1+x+kx+kx^2) \geq (1+x+kx)$$

আৰু সেয়ে আমি পালোঁ

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+x+kx)$$

অৰ্থাৎ $$(1+x)^{k+1} \geq [1+(1+k)x]$$

গতিকে (2) ৰ উক্তিটো সত্য বুলি প্ৰমাণিত হ'ল। সেয়ে, গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰপৰা, সকলো স্বাভাৱিক সংখ্যা n অৰ বাবে P (n) সত্য।

উদাহৰণ 6 প্ৰমাণ কৰাঁ যে

সকলো $n \in \mathbf{N}$ অৰ বাবে 24 এৰে $2.7^n + 3.5^n - 5$ বিভাজ্য।

সমাধান উক্তিটো P(n) এৰে বুজোৱা হ'ল।

$P(n)$:24 এৰে $2.7^n + 3.5^n - 5$ বিভাজ্য।

আমি দেখিলোঁ যে $n = 1$ অৰ বাবে P(n) সত্য, কিয়নো $2.7 + 3.5 - 5 = 24$ আৰু ই 24 এৰে বিভাজ্য। ধৰা হ'ল P(k) সত্য

অৰ্থাৎ $2.7^k + 3.5^k - 5 = 24q$, যেতিয়া $q \in \mathbf{N}$ (1)

এতিয়া আমি প্ৰমাণ কৰিম যে যদি P (k) সত্য, তেনেহ'লে P (k +1) সত্য।

এতিয়া

$$\begin{aligned}
2.7^{k+1} + 3.5^{k+1} - 5 &= 2.7^k.7^1 + 3.5^k.5^1 - 5 \\
&= 7\left[2.7^k + 3.5^k - 5 - 3.5^k + 5\right] + 3.5^k.5 - 5 \\
&= 7[24q - 3.5^k + 5] + 15.5^k - 5 \\
&= 7 \times 24q - 21.5^k + 35 + 15.5^k - 5 \\
&= 7 \times 24q - 6.5^k + 30 \\
&= 7 \times 24q - 6(5^k - 5) \\
&= 7 \times 24q - 6(4p) \quad [5^k - 5,\ 4 \text{ অৰ এটা গুণিতক (কিয়?)}] \\
&= 7 \times 24q - 24p \\
&= 24(7q - p)
\end{aligned}$$

$= 24 \times r$; $r = 7q - p$, এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা ...(2)

(2) ৰ সোঁহাতৰ ৰাশিটো 24 এৰে বিভাজ্য। গতিকে, যদি P(k) সত্য, তেনেহ'লে P (k +1) সত্য।

সেয়ে, গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰপৰা, সকলো $n \in \mathbf{N}$ অৰ বাবে P (n) সত্য।

উদাহৰণ 7 প্ৰমাণ কৰাঁ যে

$$1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 > \frac{n^3}{3},\ n \in \mathbf{N}$$

সমাধান ধৰা হ'ল প্ৰদত্ত উক্তিটো P (n)

অৰ্থাৎ $P(n): 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 > \frac{n^3}{3},\ n \in \mathbf{N}$

$n = 1$ অৰ বাবে P (n) সত্য, কিয়নো $1^2 > \frac{1^3}{3}$

ধৰা হ'ল P (k) সত্য অৰ্থাৎ

$$P(k): 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + k^2 > \frac{k^3}{3} \qquad \ldots(1)$$

আমি প্ৰমাণ কৰিম যে যদি P (k) সত্য, তেনেহ'লে P(k +1) সত্য।

এতিয়া

$$1^2+2^2+3^2+....+k^2+(k+1)^2$$
$$=\left(1^2+2^2+....+k^2\right)+(k+1)^2>\frac{k^3}{3}+(k+1)^2 \qquad [\,(1)\text{ অৰ সহায়ত }]$$
$$=\frac{1}{3}\left[k^3+3k^2+6k+3\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[(k+1)^3+3k+2\right]>\frac{1}{3}(k+1)^3$$

গতিকে, যদি P (k) সত্য তেনেহ'লে P (k+1) ও সত্য। সেয়ে, গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰপৰা, সকলো $n\in\mathbf{N}$ অৰ বাবে P (n) সত্য।

উদাহৰণ 8 গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰত্যেক স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বাবে ঘাত-বিধি $(ab)^n=a^nb^n$ প্ৰমাণ কৰাঁ।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল প্ৰদত্ত উক্তিটো P (n)

অৰ্থাৎ $\mathrm{P}(n):(ab)^n=a^nb^n$

$n=1$ অৰ বাবে P (n) সত্য কিয়নো $(ab)^1=a^1b^1$.

ধৰা হ'ল $\mathrm{P}(k)$ সত্য অৰ্থাৎ

$$(ab)^k=a^kb^k \qquad ...(1)$$

এতিয়া আমি প্ৰমাণ কৰিম যে যদি P (k) সত্য, তেনেহ'লে P (k +1) সত্য।

এতিয়া $(ab)^{k+1}=(ab)^k(ab)$
$$=\left(a^kb^k\right)(ab)$$
$$=\left(a^k.a^1\right)\left(b^k.b^1\right)=a^{k+1}.b^{k+1}$$

গতিকে, যদি P (k) সত্য, তেনেহলে P (k +1) সত্য। সেয়ে, গণিতীয় আৰোহ -তত্ত্বৰপৰা, সকলো $n\in\mathbf{N}$ অৰ বাবে P (n) সত্য।

অনুশীলনী 4.1

সকলো $n\in\mathbf{N}$ অৰ বাবে গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰাঁ

1. $1+3+3^2+.........+3^{n-1}=\dfrac{(3^n-1)}{2}$

2. $1^3+2^3+3^3+.....+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. $1+\frac{1}{(1+2)}+\frac{1}{(1+2+3)}+\ldots\ldots+\frac{1}{(1+2+3+\ldots\ldots+n)}=\frac{2n}{(n+1)}$

4. $1.2.3+2.3.4+\ldots\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

5. $1.3+2.3^2+3.3^3+\ldots\ldots+n.3^n=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$

6. $1.2+2.3+3.4+\ldots.+n(n+1)=\left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$

7. $1.3+3.5+5.7+\ldots..+(2n-1)(2n+1)=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$

8. $1.2+2.2^2+3.2^3+\ldots\ldots+n.2^n=(n-1)2^{n+1}+2$

9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

10. $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+\ldots.+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{(6n+4)}$

11. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots..+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

12. $a+ar+ar^2+\ldots..+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

13. $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)\ldots..\left(1+\frac{(2n+1)}{n^2}\right)=(n+1)^2$

14. $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots.\left(1+\frac{1}{n}\right)=(n+1)$

15. $1^2+3^2+5^2+\ldots..+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

16. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots..+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{(3n+1)}$

17. $\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\ldots.+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$

18. $1+2+3+\ldots.+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$

19. $n(n+1)(n+5)$, 3 ৰ এটা গুণিতক
20. 11 এৰে $10^{2n-1}+1$ বিভাজ্য
21. $x+y$ ৰে $x^{2n}-y^{2n}$ বিভাজ্য
22. 8 এৰে $3^{2n+2}-8n-9$ বিভাজ্য
23. 41^n-14^n, 27 ৰ গুণিতক
24. $(2n+7)<(n+3)^2$

সাৰাংশ

- গণিতীয় চিন্তাৰ এটা প্ৰধান ভিত্তি হ'ল নিগমনিক যুক্তি। নিগমনৰ বিপৰীতে, আগমনিক যুক্তিত প্ৰতিটো বেলেগ বেলেগ বিষয় বিবেচনা কৰি এটা অনুমান বা সিদ্ধান্তত উপনীত হোৱা যায়। সহজ কথাত, আগমন হ'ল বিশেষ অৱস্থা বা সত্যতাৰ সাধাৰণীকৰণ।
- বিভিন্ন ধৰণৰ গণিতীয় উক্তি প্ৰমাণ কৰাৰ অন্যতম সঁজুলি হ'ল গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্ব। ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n জড়িত এটা উক্তিক P (n) এৰে বুজোৱা হয়। প্ৰথমতে $n = 1$ অৰ বাবে শুদ্ধতা পৰীক্ষা কৰা হয়। পিছত কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা k ৰ বাবে P (k) সত্য বুলি ধৰা হয় আৰু পিছত P $(k+1)$ অৰ সত্যতা প্ৰতিপন্ন কৰা হয়।

ঐতিহাসিক টোকা

অন্য ধাৰণা আৰু পদ্ধতিৰ বিপৰীতে, গণিতীয় আৰোহৰ সহায়ত কৰা প্ৰমাণ পদ্ধতি কোনো ব্যক্তি বিশেষৰ কোনো নিৰ্দিষ্ট সময়ত কৰা আৱিষ্কাৰ নহয়। কোৱা হয় যে পাইথাগ'ৰীয়সকলে গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্ব জানিছিল।

ফৰাচী গণিতজ্ঞ ব্লেইজ পাস্কেলে (Blaise Pascal) গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্বৰ ধাৰণাৰ সূত্ৰপাত কৰে বুলি কোৱা হয়।

ইংৰাজ গণিতজ্ঞ জন ৱালিছে (John Wallis) "induction" (আৰোহ/আগমন) নামটো ব্যৱহাৰ কৰে।

পিছত দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem) প্ৰমাণৰ বাবে এই নীতি ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

দ্য মৰ্গানে (De Morgan) গণিতৰ বিভিন্ন শাখাত বহু কৃতিত্ব ৰাখি থৈ গৈছে। 'mathematical induction' অৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু নামকৰণ কৰা প্ৰথমজন ব্যক্তি হ'ল তেঁৱেই। এটা গণিতীয় শ্ৰেণীৰ অভিসাৰিতা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ তেওঁ 'দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ' অৱতাৰণা কৰে।

এটা স্পষ্টভাৱে উল্লেখ কৰা অনুমানৰ সংহতিৰপৰা জি পিয়ানই (G. Peano) স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ ধৰ্ম নিগমন কৰে। এইবোৰক এতিয়া পিয়ান'ৰ স্বত:সিদ্ধ (Peano's axioms) বোলে। গণিতীয় আৰোহ-তত্ত্ব পিয়ান'ৰ এটা স্বত:সিদ্ধৰ পুনৰুক্তি।