अध्याय **12**

गुणनखंडन (FACTORIZATION)

12.0 परिचय:

माना कि संख्या 42 है। '42' को कोई दो संख्याओं के गुणा के रूप में लिखने का प्रयत्न कीजिए।

$$42 = 1 \times 42$$
$$= 2 \times 21$$
$$= 3 \times 14$$
$$= 6 \times 7$$

इस तरह 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 और 42 ये 42 के गुणनखण्ड है। इन गुणनखण्डों में, कौन-सी अभाज्य संख्याएँ हैं?

क्या तुम 42 को अभाज्य संख्याओं गुणा के रूप में लिख सकते हो?

रफी ने इस प्रकार किया	शिरीषा ने इस प्रकार किया	अकबर ने इस प्रकार किया
$42 = 2 \times 21$	$42 = 3 \times 14$	$42 = 6 \times 7$
$= 2 \times 3 \times 7$	$= 2 \times 3 \times 7$	$= 2 \times 3 \times 7$

तुमने क्या देखा? हमने देखा कि प्रत्येक स्थिति में अभाज्य गुणनखण्ड $2 \times 3 \times 7$ है।

अब दूसरी संख्या लीजिए '70'

70 के गुणनखंड 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 और 70 हैं।

70 को $2 \times 5 \times 7$ अभाज्य गुणनखण्डों के गुणा के रूप में लिख सकते है।

गुणन-खण्डन का रूप जहाँ सभी गुणनखण्ड अभाज्य रहते हैं, अभाज्य गुणनखण्ड रूप का गुणा कहते हैं।

$$70 = 1 \times 70$$
$$= 2 \times 35$$
$$= 5 \times 14$$
$$= 7 \times 10$$

यह कीजिए :

दी गई संख्याएँ अभाज्य के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 48 (ii) 72 (ii) 96

संख्याओं के लिए जैसा हमने किया वैसे ही बीजगणितीय व्यंजक भी उनके गुणनखण्डों के गुणा के रूप में व्यक्त कर सकते है। इस अध्याय में हम विविध बीजगणितीय व्यंजकों के गुणन-खण्डन के बारे में सीखेंगे।

SCERT TELANGANA

12.1 बीजगणितीय व्यंजक के गुणनखंड:

निम्न उदाहरण लीजिए :

$7yz \quad = 7(yz)$ (7 और yz गुणनखंड हैं।)

$= 7y(z)$ ($7y$ और z गुणनखंड हैं।)

$= 7z(y)$ ($7z$ और y गुणनखंड हैं।)

$= 7 \times y \times z$ ($7, y$ और z गुणनखंड हैं।)

$7yz$, का 1 गुणनखण्ड है क्योंकि $7yz = 1 \times 7 \times y \times z$.
वस्तुत: प्रत्येक पद का '1' गुणनखण्ड रहता है । किन्तु जबतक जरूरत न हो, अलग से '1' लिखने की आवश्यकता नहीं है ।

ऊपर के गुणनखण्डों में $7, y, z$ अलघुकृत गुणनखण्ड है। बीजगणितीय व्यंजको में वाक्यांश अलघुकृत, अभाज्य के स्थान पर उपयोग करते है। इस तरह हम कहते है कि $7yz$ का अलघुकृत रूप $7 \times y \times z$ है। ध्यान में रखिए कि $7 \times (yz)$ अथवा $7y(z)$ अथवा $7z(y)$ अलघुकृत रूप नहीं है।

अब व्यंजक $7y(z+3)$ लिजिए। यह $7y\,(z+3) = 7 \times y \times (z+3)$ जैसे लिख सकते है। यहाँ $7, y, (z+3)$ अलघुकृत गुणनखंड है।

इसी के समान $5x\,(y+2)\,(z+3) = 5 \times x \times (y+2) \times (z+3)$ यहाँ $5, x, (y+2), (z+3)$ अलघुकृत गुणनखंड है।

इसे कीजिए।

1. निम्न के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

   (i) $8x^2yz$ (ii) $2xy\,(x+y)$ (iii) $3x + y^3z$

12.2 गुणन-खण्डन की आवश्यकता :

जब बीजगणितीय व्यंजक के खंड किये जाते हैं तब इसके गुणनखंडो के गुणा के रूप में इसे लिखते हैं। यह गुणनखण्ड, संख्यात्मक, बीजगणितीय चर अथवा बीजगणितीय व्यंजकों के पद हो सकते है।

माना कि बीजगणितीय व्यंजक $23a + 23b + 23c$. इसे $23(a+b+c)$ भी लिख सकते है। यहाँ अलघुकृत गुणनखंड 23 और $(a+b+c)$ 23 संख्यात्मक गुणनखण्ड है और $(a+b+c)$ बीजगणितीय गुणनखण्ड है।

बीजगणितीय व्यंजक लीजिए : (i) $x^2y + y^2x + xy$ (ii) $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$.

प्रथण व्यंजक $x^2y + y^2x + xy = xy(x + y + 1)$

SCERT TELANGANA

इस तरह ऊपर के व्यंजक को आसान रूप में लिखते है।

द्वितीय उदाहरण $(4x^2 - 1) \div (2x - 1)$

$$\frac{4x^2-1}{2x-1} = \frac{(2x)^2-(1)^2}{2x-1}$$

$$= \frac{(2x+1)(2x-1)}{(2x-1)}$$

$$= (2x + 1)$$

ऊपर के उदाहरण से यह ध्यान में आता है कि गुणन खण्डन के कारण बीजगणितीय व्यंजक सरल रूप में लिख सकते है। इससे बीजगणितीय व्यंजक के भाग में भी सहायता होती है।

अब हम बीजगणितीय व्यंजकों के गुणन-खण्डन की कुछ पद्धतियों के बारे में चर्चा करेंगे।

12.3 समान (उभयनिष्ट) गुणनखण्डों की पद्धति :

हम $3x + 12$ के गुणनखण्ड करेंगे।

प्रत्येक पद को अलघुकृत गुणनखण्ड के गुणा के रूप में लिखने पर हमें प्राप्त होता है।

$3x + 12 = (3 \times x) + (2 \times 2 \times 3)$

दोनों पदों में समान गुणनखण्ड कौन-से हैं?

समान गुणनखण्ड 3 अलग लेने के बाद, हमें प्राप्त होता है,

$3 \times [x + (2\times2)] = 3 \times (x + 4) = 3\ (x + 4)$

अब हम कहते हैं कि $3x + 12$ के 3 और $(x + 4)$ गुणनखण्ड है।

ध्यान दीजिए कि ये गुणनखण्ड अलघुकृत है।

अब और एक व्यंजक $6ab+12b$ के गुणनखण्ड करेंगे।

ध्यान दीजिए कि $6ab$ औक $12b$ का महत्तम समापवर्त्य $6b$ हैं ।

$6ab+12b = (\underline{2 \times 3} \times a \times \underline{b}) + (2 \times \underline{2 \times 3 \times b})$

$= \underline{2 \times 3 \times b} \times (a + 2) \quad = 6b\ (a + 2)$

$\therefore\ 6ab + 12b = 6b\ (a + 2)$

उदाहरण 1: गुणनखण्ड कीजिए : (i) $6xy + 9y^2$ (ii) $25\, a^2b + 35ab^2$

हल : (i) $6xy + 9y^2$

हमें पता है, $6\,x\,y = 2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}$ और $9y^2 = 3 \times \underline{3 \times y} \times y$

'दोनों पदों में समान गुणनखण्ड 3 और y' है।

SCERT TELANGANA

अतः, $6xy + 9y^2$

$= (2 \times \underline{3} \times x \times \underline{y}) + (3 \times \underline{3 \times y} \times y)$ (दोनों पदों का संयोग करने पर)

$= \underline{3 \times y} \times [(2 \times x) + (3 \times y)]$

ध्यान दीजिए कि व्यंजक का गुणनखण्ड रूप को केवल एक पद मानते है ।

$\therefore\ 6xy + 9y^2 = 3y(2x + 3y)$

(ii) गुणनखण्ड कीजिए: $3x^2 + 6x^2y + 9xy^2$

$3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = (\underline{3 \times x} \times x) + (2 \times \underline{3 \times x} \times x \times y) + (3 \times \underline{3 \times x} \times y \times y)$

$= \underline{3 \times x}\,[x + (2 \times x \times y) + (3 \times y \times y)]$

$= 3x(x + 2xy + 3y^2)$

$\therefore\ 3x^2 + 6x^2y + 9xy^2 = 3x(x + 2xy + 3y^2)$ ($3x$ समान गुणनखण्ड लेने पर)

यह कीजिए :

गुणनखण्ड कीजिए: (i) $9a^2 - 6a$ (ii) $15a^3b - 35ab^3$ (iii) $7lm - 21lmn$

12.4 पदों के समूहन द्वारा गुणनखण्डन

व्यंजक $ax + bx + ay + by$ को ध्यान से देखिए। तुम जानोगे कि प्रथम दो पदों में समान गुणनखण्ड 'x' और अंतिम दो पदों में समान गुणनखण्ड 'y' है। किन्तु सभी पदों में एक भी समान गुणनखण्ड नहीं है। हम देखेंगे कि ऐसे व्यंजक के हम कैसे गुणनखण्ड कर सकते है।

पदों का समूहन करने पर हमें प्राप्त होता है $(ax + bx) + (ay + by)$

$(ax + bx) + (ay + by) = x(a+b) + y(a+b)$ (प्रत्येक समूह से समान गुणनखण्ड बाहर लेने पर)

$= (a+b)(x + y)$ (समूहों से समान गुणनखण्ड बाहर लेने पर)

व्यंजक $ax + bx + ay + by$ को अब इसके गुणनखण्डों के गुणा के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। गुणनखण्ड $(a+b)$ और $(x + y)$ हैं जो अलघुकृत है।

ऊपर के व्यंजक को दूसरे समूहन पद्धति द्वारा निम्न प्रकार से गुणनखण्ड कर सकते हैं।

$$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by)$$
$$= a(x + y) + b(x + y)$$
$$= (x + y)(a + b)$$

ध्यान दीजिए कि क्रम के अलावा गुणनखण्ड समान हैं।

SCERT TELANGANA

यह कीजिए :

गुणनखण्ड कीजिए : (i) $5xy + 5x + 4y + 4$ (ii) $3ab + 3a + 2b + 2$

उदाहरण 3: गुणनखण्ड कीजिए : $6ab - b^2 - 2bc + 12ac$

हल : सोपान 1: सभी पदों समान गुणनखण्ड है या नहीं की जाँच कीजिए।

सोपान 2: प्रथम दो पदों का समूहन करने पर हमें प्राप्त होता है।

$6ab - b^2 = b(6a - b)$ ——— I

ध्यान दीजिए कि व्यंजक में अंतिम दो पदों का क्रम बदलने की तुम्हें आवश्यकता है। जैसे $12ac - 2bc$.

इस तरह $12ac - 2bc = 2c(6a - b)$ ——— II

सोपान 3: I और II का संयोजन करने से

$6ab - b^2 - 2bc + 12ac = b(6a - b) + 2c(6a - b)$

$= (6a - b)(b + 2c)$ समान गुणनखण्ड $(6a - b)$ बाहर लेने पर

अत: $6ab - b^2 - 2bc + 12ac$ के गुणनखंड $(6a - b)$ और $(b + 2c)$

अभ्यास - 12.1

1. दिए गए पदों में समान गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $8x, 24$ (ii) $3a, 21ab$ (iii) $7xy, 35x^2y^3$ (iv) $4m^2, 6m^2, 8m^3$

(v) $15p, 20qr, 25rp$ (vi) $4x^2, 6xy, 8y^2x$ (vii) $12x^2y, 18xy^2$

2. निम्न व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $5x^2 - 25xy$ (ii) $9a^2 - 6ax$ (iii) $7p^2 + 49pq$

(iv) $36a^2b - 60a^2bc$ (v) $3a^2bc + 6ab^2c + 9abc^2$

(vi) $4p^2 + 5pq - 6pq^2$ (vii) $ut + at^2$

3. निम्न के गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $3ax - 6xy + 8by - 4bx$ (ii) $x^3 + 2x^2 + 5x + 10$

(iii) $m^2 - mn + 4m - 4n$ (iv) $a^3 - a^2b^2 - ab + b^3$ (v) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$

SCERT TELANGANA

12.5 सर्वसमिकाओं का उपयोग से गुणन-खण्डन करना :

हम जानते हैं कि $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$ यह बीजगणितीय सर्वसमकाएँ हैं।

उदाहरण 4: गुणनखण्ड कीजिए : $x^2+10x+25$

हल: दिए हुए व्यंजक में तीन पद है और प्रथम और तृतीय पद पूर्ण वर्ग है। अर्थात x^2 और 25 (5^2). मध्य पद का चिह्न धनात्मक है। यह सूचित करता है कि इसे

$a^2+2ab+b^2$ के रूप में लिखा जा सकता है,

इसलिए $x^2+10x+25=(x)^2+2(x)(5)+(5)^2$

इसकी $a^2+2ab+b^2$ के साथ तुलना करने पर, यह सर्वसमिका के L.H.S. के बराबर है अर्थात $(a+b)^2$ यहाँ $a=x$ और $b=5$

$x^2+10x+25 = (x+5)^2 = (x+5)(x+5)$

उदाहरण 5: गुणनखण्ड कीजिए : $16z^2-48z+36$

हल : दिए गए व्यंजक से समान संख्यात्मक गुणनखण्ड बाहर लेने पर हमें प्राप्त होते हैं,

$16z^2-48z+36=(4\times 4z^2)-(4\times 12z)+(4\times 9)=4(4z^2-12z+9)$

ध्यान दीजिए कि $4z^2=(2z)^2$; $9=(3)^2$ और $12z=2(2z)(3)$

$4z^2-12z+9=(2z)^2-2(2z)(3)+(3)^2$ क्योंकि $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$=(2z-3)^2$

तुलना करने पर, $16z^2-48z+36 = 4(4z^2-12z+9)=4(2z-3)^2$

$=4(2z-3)(2z-3)$

उदाहरण 6: गुणनखण्ड कीजिए : $25p^2-49q^2$

हल : हम जानते हैं कि व्यंजक, दो पूर्ण वर्गों में अंतर है।

अर्थात व्यंजक a^2-b^2 के रूप में है।

अतः सर्वसमिका $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ प्रयुक्त कर सकते हैं।

$25p^2-49q^2 = (5p)^2-(7q)^2$

$= (5p+7q)(5p-7q)$ [$\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)$]

इसलिए, $25p^2-49q^2 = (5p+7q)(5p-7q)$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 7: गुणनखण्ड कीजिए : $48a^2 - 243b^2$

हल : हम देखते हैं कि दोनों पद पूर्ण वर्ग नहीं है किन्तु दोनों में समान गुणनखण्ड '3'हैं।

अर्थात $48a^2 - 243b^2 = 3\,[16a^2 - 81b^2]$

$= 3\,[(4a)^2 - (9b)^2]$ $\quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$= 3\,[\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)]$

$= 3\,(4a + 9b)\,(4a - 9b)$

उदाहरण 8: गुणनखण्ड कीजिए : $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$

हल : व्यंजक के प्रथम तीन पर $(x + y)^2$ के रूप में और चतुर्थ पद पूर्ण वर्ग है।

अतः $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2 = (x + y)^2 - (2z)^2$

$= [(x + y) + 2z]\,[(x + y) - 2z]$

$= (x + y + 2z)\,(x + y - 2z)$

$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$

उदाहरण 9: गुणनखण्ड कीजिए : $p^4 - 256$

हल : $p^4 = (p^2)^2$ और $256 = (16)^2$

इस तरह $p^4 - 256 = (p^2)^2 - (16)^2$

$= (p^2 - 16)\,(p^2 + 16)$

$= (p+4)\,(p-4)\,(p^2 + 16)$ $\qquad p^2 - 16 = (p+4)\,(p-4)$

12.6 $(x + a)\,(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ रूप के गुणनखण्ड :

ध्यान से देखिए, व्यंजक $x^2 + 12x + 35$, $x^2 + 6x - 27$, $a^2 - 6a + 8$, $3y^2 + 9y + 6$.... आदि। इन व्यंजकों को इसके पहले उपयोग की गई सर्वसमिकाओं द्वारा गुणनखंड नहीं कर सकते क्योंकि अचर पद पूर्ण वर्ग नहीं है।

माना कि $x^2 + 12x + 35$

इन सभी पदों का गुणनखंड के लिए समूहन नहीं कर सकते

हम मध्य पद और अचर को विभाजित करते हैं और समूह बनाने का प्रयत्न करते हैं ताकि यह सर्वसमिका $x^2 + (a + b)x + ab$ के रूप में रहे।

माना कि, दो गुणनखण्ड के गुणा के समान अचर लिखने के सभी संभव उपाय

$35 =$	1×35	$1 + 35 = 36$
	$(-1) \times (-35)$	$-1 - 35 = -36$
	5×7	$5 + 7 = 12$
	$(-5) \times (-7)$	$-5 - 7 = -12$

क़ौन-से युग्म का योग मध्य पद का गुणांक होगा? स्पष्टतः $5 + 7 = 12$ है।

SCERT TELANGANA

$\therefore\ x^2 + 12x + 35 \ = \ x^2 + (5 + 7)\,x + 35$

$= \ x^2 + 5x + 7x + 35$ ($\because$ $12x = 5x + 7x$)

$= \ x\,(x + 5) + 7\,(x + 5)$ (समान गुणनखण्ड प्रत्येक लेकर)

$= \ (x + 5)\,(x + 7)$ (समान गुणनखण्ड $(x + 5)$ बाहर लेकर)

ऊपर की गई चर्चा से हम निर्णय ले सकते हैं कि व्यंजक जो $x^2 + (a + b)\,x + ab$ के रूप में लिख सकते हैं, के गुणनखण्ड $(x + a)\,(x + b)$ कर सकते हैं।

उदाहरण 10: गुणनखण्ड कीजिए : $m^2 - 4m - 21$

हल : सर्वसमिका $x^2 + (a + b)\,x + ab$ के साथ $m^2 - 4m - 21$ की तुलना करने पर हम जानते हैं कि $ab = -21$, और $a+b = -4$.

इसलिए, $(-7) + 3 = -4$ और $(-7)(3) = -21$

अतः $m^2 - 4m - 21 = m^2 - 7m + 3m - 21$

$= m\,(m - 7) + 3\,(m - 7)$

$= (m - 7)\,(m + 3)$

इसलिए $m^2 - 4m - 21 = (m - 7)\,(m + 3)$

–21 के गुणनखण्ड	और उनका योग
$-1 \times 21 = -21$	$-1 + 21 = 20$
$1 \times (-21) = -21$	$1 - 21 = -20$
$-7 \times 3 = -21$	$-7 + 3 = -4$
$-3 \times 7 = -21$	$-3 + 7 = 4$

उदाहरण 11: गुणनखण्ड कीजिए : $4x^2 + 20x - 96$

हल : हम देखते हैं कि सभी पदों में समान गुणनखण्ड 4 है।

इस प्रकार $4x^2 + 20x - 96 = 4\,[x^2 + 5x - 24]$

अब माना कि $x^2 + 5x - 24$

$= x^2 + 8x - 3x - 24$

$= x\,(x + 8) - 3\,(x + 8)$

$= (x + 8)\,(x - 3)$

इसलिए $4x^2 + 20x - 96 = 4(x + 8)(x - 3)$

–24 के गुणनखण्ड	और उनका योग
$-1 \times 24 = -24$	$-1 + 24 = 23$
$1 \times (-24) = -24$	$1 - 24 = -23$
$-8 \times 3 = -24$	$3 - 8 = -5$
$-3 \times 8 = -24$	$-3 + 8 = 5$

अभ्यास - 12.2

1. निम्न व्यंजक के गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $a^2 + 10a + 25$ (ii) $l^2 - 16l + 64$ (iii) $36x^2 + 96xy + 64y^2$

(iv) $25x^2 + 9y^2 - 30xy$ (v) $25m^2 - 40mn + 16n^2$

(vi) $81x^2 - 198\,xy + 121y^2$ (vii) $(x+y)^2 - 4xy$ (संकेत: प्रथम $(x + y)^2$ का विस्तार कीजिए।)

(viii) $l^4 + 4l^2m^2 + 4m^4$

SCERT TELANGANA

2. निम्न के गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $x^2 - 36$ (ii) $49x^2 - 25y^2$ (iii) $m^2 - 121$

(iv) $81 - 64x^2$ (v) $x^2y^2 - 64$ (vi) $6x^2 - 54$

(vii) $x^2 - 81$ (viii) $2x - 32x^5$ (ix) $81x^4 - 121x^2$

(x) $(p^2 - 2pq + q^2) - r^2$ (xi) $(x + y)^2 - (x - y)^2$

3. व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $lx^2 + mx$ (ii) $7y^2 + 35Z^2$ (iii) $3x^4 + 6x^3y + 9x^2Z$

(iv) $x^2 - ax - bx + ab$ (v) $3ax - 6ay - 8by + 4bx$ (vi) $mn + m + n + 1$

(vii) $6ab - b^2 + 12ac - 2bc$ (viii) $p^2q - pr^2 - pq + r^2$ (ix) $x(y+z) - 5(y+z)$

4. निम्न के गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $x^4 - y^4$ (ii) $a^4 - (b+c)^4$ (iii) $l^2 - (m - n)^2$

(iv) $49x^2 - \frac{16}{25}$ (v) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ (vi) $4(a+b)^2 - 9(a - b)^2$

5. निम्न व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

(i) $a^2 + 10a + 24$ (ii) $x^2 + 9x + 18$ (iii) $p^2 - 10q + 21$ (iv) $x^2 - 4x - 32$

12.7 बीजगणितीय व्यंजकों का भाग :

हम जानते हैं कि गुणा कि विलोम संक्रिया भाग है।

माना कि $3x \times 5x^3 = 15x^4$

तब $15x^4 \div 5x^3 = 3x$ और $15x^4 \div 3x = 5x^3$

इसी तरह माना कि $6a(a + 5) = 6a^2 + 30$

इसलिए $(6a^2 + 30) \div 6a = a + 5$

और $(6a^2 + 30a) \div (a+5) = 6a.$

12.8 एकपदी को दूसरे एकपदी से भाग :

मान लीजिए $24x^3 \div 3x$

$\therefore 24x^3 \div 3x$

$$= \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times x}{3 \times x}$$

$$= \frac{(3 \times x)(2 \times 2 \times 2 \times x \times x)}{(3 \times x)} = 8x^2$$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 12: भाग कीजिए :

(i) $70x^4 \div 14x^2$ (ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz$

हल : (i) $70x^4 \div 14x^2 = \dfrac{2\times5\times7\times x\times x\times x\times x}{2\times7\times x\times x}$

$= \dfrac{5\times x\times x}{1}$

$= 5x^2$

(ii) $4x^3y^3z^3 \div 12xyz = \dfrac{4\times x\times x\times x\times y\times y\times y\times z\times z\times z}{12\times x\times y\times z}$

$= \dfrac{1}{3}x^2y^2z^2$

12.9 व्यंजक को एकपदी से भाग :

मान लीजिए,

द्विपदी $6x^4+10x^3+8x^2$ को एकपदी $2x^2$ से भाग देना है।

$6x^4 + 10x^3 + 8x^2 = [2 \times 3 \times x \times x \times x \times x] + [2 \times 5 \times x \times x \times x] + [2 \times 2 \times 2 \times x \times x]$

$= \cancel{(2x^2)}(3x^2) + \cancel{(2x^2)}(5x) + \cancel{2x^2}(4)$

ध्यान दीजिए कि समान गुणनखण्ड $2x^2$ है।

$= 2x^2 [3x^2 + 5x + 4]$

इस प्रकार $(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4+10x^3+8x^2}{2x^2} = \dfrac{2x^2(3x^2+5x+4)}{2x^2}$

$= (3x^2 + 5x + 4)$

विकल्पत: निरसन पद्धति से व्यंजक के प्रत्येक पद को एकपदी से भाग दे सकते हैं।

$(6x^4 + 10x^3 + 8x^2) \div 2x^2$

$= \dfrac{6x^4}{2x^2}+\dfrac{10x^3}{2x^2}+\dfrac{8x^2}{2x^2}$

यहाँ हम अंश में व्यंजक के प्रत्येक पद को हर में एक पदी से भाग देते है।

$= 3x^2 + 5x + 4$

SCERT TELANGANA

उदाहरण 13: $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2)$ को $6abc$ से भाग दीजिए।

हल : $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2)$

$= 2 \times 3 \times 5\,[(a \times a \times b \times c) + (a \times b \times b \times c) + (a \times b \times c \times c)]$

$= 2 \times 3 \times 5 \times a \times b \times c\ \ (a + b + c)$

इस प्रकार $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{2 \times 3 \times 5 \times abc(a+b+c)}{2 \times 3 \times abc}$$

$= 5\,(a + b + c)$

विकल्पत: $30\,(a^2bc + ab^2c + abc^2) \div 6abc$

$$= \frac{30a^2bc}{6abc} + \frac{30ab^2c}{6abc} + \frac{30abc^2}{6abc}$$

$= 5a + 5b + 5c$

$= 5\,(a + b + c)$

12.10 व्यंजक को व्यंजक से भाग :

मान लीजिए $(3a^2 + 21a) \div (a+7)$

प्रथम $3a^2 + 21a$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए और हर के साथ गुणनखण्ड की तुलना कीजिए।

$$(3a^2 + 21a) \div (a+7) = \frac{3a^2 + 21a}{a+7}$$

$$= \frac{3a(a+7)}{a+7} = 3a$$

$= 3a$

उदाहरण 14: $39y^3(50y^2 - 98)$ by $26y^2(5y+7)$ से भाग दीजिए।

हल : $39y^3(50y^2 - 98) = 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [2\,(25y^2 - 49)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y)^2 - (7)^2]$ $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times [(5y + 7)\ (5y - 7)]$

$= 2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y \times (5y + 7)\,(5y - 7)$

तथा $26y^2(5y + 7) = 2 \times 13 \times y \times y \times ((5y + 7)$

SCERT TELANGANA

$\therefore \quad [39y^3(50y^2 - 98)] \div [26y^2(5y + 7)]$

$$= \frac{[2 \times 3 \times 13 \times y \times y \times y(5y+7)(5y-7)]}{[2 \times 13 \times y \times y \times (5y+7)]}$$

$= 3y(5y - 7)$

उदाहरण 15: $m^2 - 14m - 32$ by $m+2$ से भाग दीजिए।

हल : हमें ज्ञात है $m^2 - 14m - 32 = m^2 - 16m + 2m - 32$

$= m(m - 16) + 2(m - 16)$

$= (m - 16)(m+2)$

$(m^2 - 14m - 32) \div m+2 = (m - 16)(m+2) \div (m+2)$

$= (m - 16)$

उदाहरण 16: $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2)$ by $7a(a - 4)$ से भाग दीजिए।

हल : $42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) = 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 13a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a^2 - 9a - 4a + 36)$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [a(a - 9) - 4(a - 9)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times [(a - 9)(a - 4)]$

$= 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4)$

$42(a^4 - 13a^3 + 36a^2) \div 7a(a - 4) = 2 \times 3 \times 7 \times a \times a \times (a - 9)(a - 4) \div 7a(a - 4)$

$= 6a(a - 9)$

उदाहरण 17: $x(3x^2 - 108)$ by $3x(x - 6)$ से भाग दीजिए।

हल : $x(3x^2 - 108) = x \times [3(x^2 - 36)]$

$= x \times [3(x^2 - 6^2)]$

$= x \times [3(x + 6)(x - 6)]$

$= 3 \times x \times [(x + 6)(x - 6)]$

$x(3x^2 - 108) \div 3x(x - 6) = 3 \times x \times [(x + 6)(x - 6)] \div 3x(x - 6)$

$= (x + 6)$

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 12.3

1. निम्न भाग कीजिए :

   (i) $48a^3$ by $6a$ (ii) $14x^3$ by $42x^2$

   (iii) $72a^3b^4c^5$ by $8ab^2c^3$ (iv) $11xy^2z^3$ by $55xyz$ (v) $-54l^4m^3n^2$ by $9l^2m^2n^2$

2. दिए गए बहुपदी को दी गई एक पदी से भाग दीजिए :

   (i) $(3x^2-2x)\div x$ (ii) $(5a^3b-7ab^3)\div ab$

   (iii) $(25x^5-15x^4)\div 5x^3$ (iv) $(4l^5-6l^4+8l^3)\div 2l^2$

   (v) $15(a^3b^2c^2-a^2b^3c^2+a^2b^2c^3)\div 3abc$ (vi) $(3p^3-9p^2q-6pq^2)\div(-3p)$

   (vii) $(\frac{2}{3}a^2b^2c^2+\frac{4}{3}ab^2c^2)\div\frac{1}{2}abc$

3. निम्न भाग हल कीजिए :

   (i) $(49x-63)\div 7$ (ii) $12x(8x-20)\div 4(2x-5)$

   (iii) $11a^3b^3(7c-35)\div 3a^2b^2(c-5)$

   (iv) $54lmn(l+m)(m+n)(n+l)\div 81mn(l+m)(n+l)$

   (v) $36(x+4)(x^2+7x+10)\div 9(x+4)$ (vi) $a(a+1)(a+2)(a+3)\div a(a+3)$

4. व्यंजकों के गुणनखण्ड किजिए और उन्हें निर्देशानुसार भाग दीजिए।

   (i) $(x^2+7x+12)\div(x+3)$ (ii) $(x^2-8x+12)\div(x-6)$

   (iii) $(p^2+5p+4)\div(p+1)$ (iv) $15ab(a^2-7a+10)\div 3b(a-2)$

   (v) $15lm(2p^2-2q^2)\div 3l(p+q)$ (vi) $26z^3(32z^2-18)\div 13z^2(4z-3)$

12.11 सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

कक्षा परियोजना 1 : श्रीलेखा ने दिया गया समीकरण नीचे बताये जैसे हल किया।

$3x+4x+x+2x=90$

$9x=90$ इसलिए $x=10$

हल के सत्यता के बारे में क्या कह सकते है?

क्या तुम पहचान सकते हो कि श्रीलेखा ने कहाँ पर गलती की?

> यदि किसी पद का गुणांक 1 हो तो उसे नहीं लिखते है। परंतु सजातीय पदों का योग करते समय हम इसे योग में जोड़ते है।

SCERT TELANGANA

कक्षा परियोजना 2 : शरयू ने निम्न प्रकार से किया :

$x = -4$ के लिए, $7x = 7 - 4 = -3$

> स्मरण रखिए कि ऋणात्मक संख्या का गुणा करते समय कोष्टकों का उपयोग करना चाहिए ।

कक्षा परियोजना 3 : शरयू और दीपू ने बीजगणितीय व्यंजकों का गुणा निम्न पद्धतियों द्वारा किया। किसका गुणा सही है, जाँच कीजिए।

शरयू	दीपू
(i) $3(x-4) = 3x - 4$	$3(x-4) = 3x - 12$
(ii) $(2x)^2 = 2x^2$	$(2x)^2 = 4x^2$
(iii) $(2a-3)(a+2) = 2a^2 - 6$	$(2a-3)(a+2) = 2a^2 + a - 6$
(iv) $(x+8)^2 = x^2 - 64$	$(x+8)^2 = x^2 + 16x + 64$

कक्षा परियोजना 4: सुमंत ने भाग इस प्रकार किया : $(a+5) \div 5 = a+1$

उसके दोस्त दिनेश ने वही भाग इस प्रकार किया :$(a+5) \div 5 = a/5 + 1$

और उसकी दोस्त पावनी ने इस प्रकार किया :$(a+5) \div 5 = a$

अभ्यास - 12.4

त्रुटियाँ ज्ञात कीजिए और निम्नलिखित गणितीय वाक्यों को सही कीजिए।

(i) $3(x-9) = 3x - 9$

(ii) $x(3x+2) = 3x^2 + 2$

(iii) $2x + 3x = 5x^2$

(iv) $2x + x + 3x = sx$

(v) $4p + 3p + 2p + p - 9p = 0$

(vi) $3x + 2y = 6xy$

(vii) $(3x)^2 + 4x + 7 = 3x^2 + 4x + 7$

(viii) $(2x)^2 + 5x = 4x + 5x = 9x$

(ix) $(2a+3)^2 = 2a^2 + 6a + 9$

(x) मान रखिए $x = -3$

(a) $x^2 + 7x + 12 = (-3)^2 + 7(-3) + 12 = 9 + 4 + 12 = 25$

(b) $x^2 - 5x + 6 = (-3)^2 - 5(-3) + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

(c) $x^2 + 5x = (-3)^2 + 5(-3) + 6 = -9 - 15 = -24$

(xi) $(x-4)^2 = x^2 - 16$

(xii) $(x+7)^2 = x^2 + 49$

(xiii) $(3a+4b)(a-b) = 3a^2 - 4a^2$

(xiv) $(x+4)(x+2) = x^2 + 8$

SCERT TELANGANA

(xv) $(x-4)(x-2) = x^2 - 8$

(xvi) $5x^3 \div 5x^3 = 0$

(xvii) $2x^3 + 1 \div 2x^3 = 1$

(xviii) $3x + 2 \div 3x = \frac{2}{3x}$

(xix) $3x + 5 \div 3 = 5$

(xx) $\frac{4x+3}{3} = x + 1$

हमने क्या चर्चा की

1. गुणनखंडन किसी व्यंजक को उसके गुणकों के गुणा के रूप में व्यक्त करने की प्रक्रिया है।
2. वह खंड जिसे गुणनखंडों के गुणा के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता अपरिवर्तनीय गुणनखंड कहलाते हैं।
3. वे व्यंजक जो इस रूप में व्यक्त हैं-
   $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2$ और $x^2 + (a+b)x + ab$ इन्हें गुणनखंडों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
4. यदि व्यंजक $x^2 + (a+b)\ x + ab$ रूप में है तो इसका गुणनखंड $(x+a)(x+b)$ होगा।
5. गुणा, भाग का व्युत्क्रम होता है। यह संकल्पना बीजगणितीय व्यंजकों पर भी लागू होती है।

गोल्ड बच का अनुमान

गोल्ड बच ने अपने निरीक्षण में यह अनुमान लगाया कि प्रत्येक विषम संख्या या तो अविभाज्य संख्या या अविभाज्य संख्याओं का योग और किसी वर्ग का दोगुना होती है।

जैसे $21 = 19 + 2$ or $13 + 8$ or $3 + 18$.

इसे 9000 तक के लिए दर्शाया जा सकता है, केवल उसका कथन इस पर लागू नहीं होता

$5777 = 53 \times 109$ और $5993 = 13 \times 641$,

जो कि न अविभाज्य संख्या हैं, न ही अविभाज्य संख्याओं का योग हैं और न ही किसी वर्ग का दोगुना हैं।

SCERT TELANGANA