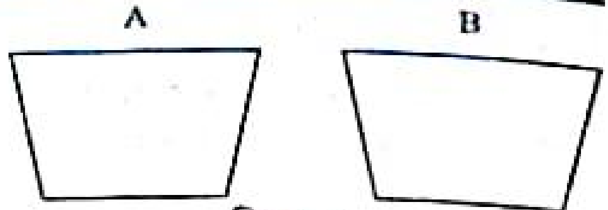
নৱম অধ্যায়

সামান্তৰিক আৰু ত্ৰিভুজৰ কালি
(Areas of parallelograms and Triangles)

9.1 অৱতাৰণা (Introduction) :

প্ৰথম অধ্যায়ত তোমালোকে পাই আহিছা যে পথাৰবিলাকৰ নতুনকৈ সীমা নির্দ্ধাৰণ আৰু সেইবোৰক উপযুক্ত অংশত বিভক্তকৰণৰ প্ৰক্ৰিয়াত আহি পৰা ভূ-ভাগৰ (মাটিৰ) জোখমাপেই জ্যামিতিৰ অধ্যয়নৰ প্ৰথম পাতনি। উদাহৰণ স্বৰূপে বুধিয়া নামৰ এগৰাকী খেতিয়কৰ এখন ত্ৰিভুজ আকৃতিৰ পথাৰ আছিল। তেওঁ এইখনক তেওঁৰ দুগৰাকী জীয়েক আৰু এজন পুতেকৰ মাজত সমানে ভাগ কৰি দিব খুজিলে। পথাৰখনৰ কালিৰ জোখ সঠিককৈ নির্ণয় কৰাৰ পৰিবৰ্তে মাত্ৰ তেওঁ ত্ৰিভুজাকাৰ ক্ষেত্ৰখনৰ (পথাৰ) এটা বাহুক সমানে তিনিটা অংশত বিভক্ত কৰিলে আৰু প্ৰতিটো ভাগবিন্দুক বিপৰীত শীৰ্ষবিন্দুটোৰ লগত সংযুক্ত কৰিলে। এইদৰে পথাৰখন তিনিটা সমান ভাগত বিভক্ত হ'ল আৰু তেওঁ ল'ৰা-ছোৱালীৰ প্ৰতিজনকে একোটা অংশ দিলে। তোমালোকে ভাবানে যে, তেওঁ এইদৰে উলিওৱা তিনিওটা অংশৰেই প্ৰকৃততে কালিৰ জোখ একে সমান আছিল? এনেকুৱা ধৰণৰ প্ৰশ্ন আৰু আন এই সম্পৰ্কীয় সমস্যাবোৰৰ সমাধান পাবলৈ তোমালোকে ইতিমধ্যে আগৰ শ্ৰেণীত অধ্যয়ন কৰি অহা সমতলীয় চিত্ৰবোৰৰ কালিৰ বিষয়ে পুনৰীক্ষণ কৰাৰ প্ৰয়োজন হ'ব।

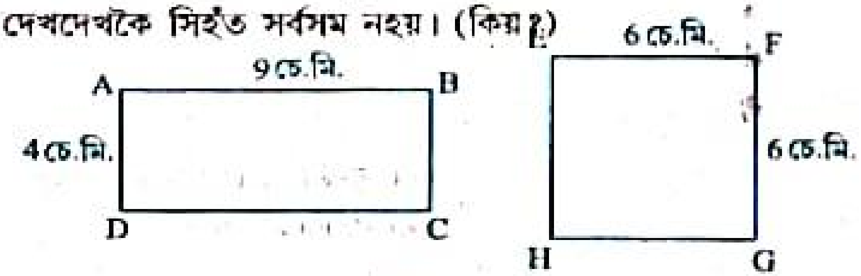
তোমালোকৰ বোধহয় মনত পৰিব যে সৰল বদ্ধ চিত্ৰ এটাই আবৰা সমতলৰ অংশ এটাক সেই চিত্ৰটো সাপেক্ষে এখন **সমতলীয় ক্ষেত্ৰ** (planar region) বোলে। এই সমতলীয় ক্ষেত্ৰৰ পৰিমাণ বা জোখ এটাকে ইয়াৰ **কালি** বোলে। এই পৰিমাণ বা জোখক সদায়ে এটা সংখ্যাৰ সহায়ত (কোনো এটা এককত) প্ৰকাশ কৰা হয়, যেনে 5 বৰ্গ চে.মি., 8 বৰ্গমিটাৰ, 3 হেক্টাৰ ইত্যাদি। গতিকে আমি ক'ব পাৰোঁ যে এটা চিত্ৰৰ কালি বুলিলে সমতলত সেই চিত্ৰটোৱে আগুৰা অংশৰ সৈতে জড়িত এটা সংখ্যাহে (কোনো এটা এককত) বুজায়।



চিত্ৰ 9.1

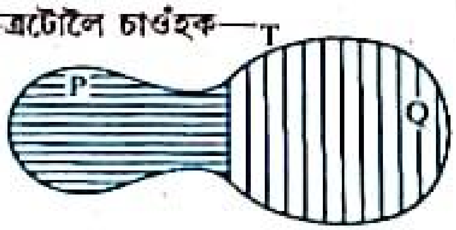
আগৰ শ্ৰেণী আৰু সপ্তম অধ্যায়ৰ পৰাই আমি সৰ্বসম চিত্ৰবোৰৰ ধাৰণাৰ সৈতেও সুপৰিচিত হৈ আহিছো। *দুটা চিত্ৰক সৰ্বসম বোলে যদি সিহঁতৰ আকৃতি একে আৰু একে জোখৰ হয়।*

আনভাষাত, যদি A আৰু B চিত্ৰ দুটা সৰ্বসম (চিত্ৰ 9.1 চোৱা) তেন্তে এখন নক্সা আঁকা কাকতৰ (tracing paper) সহায়ত তুমি এটা চিত্ৰক ইটোৰ ওপৰত সম্পূৰ্ণভাৱে ঢাক খোৱাকৈ সমাৰোপ (superimpose) কৰিব পাৰা। গতিকে *যদি দুটা চিত্ৰ A আৰু B সৰ্বসম, তেন্তে সিহঁতৰ কালি সমান হ'ব।* এই উক্তিৰ বিপৰীতটো কিন্তু সত্য নহয়। আন কথাত, *একে সমান কালিৰ দুটা চিত্ৰ সৰ্বসম নহ'বও পাৰে।* উদাহৰণ স্বৰূপে, চিত্ৰ 9.2 ত ABCD আৰু EFGH আয়ত দুটাৰ কালি একে (9×4 বৰ্গ চে.মি. আৰু 6 × 6 বৰ্গ চে.মি.), কিন্তু দেখদেখকৈ সিহঁত সৰ্বসম নহয়। (কিয়?)



চিত্ৰ 9.2

এতিয়া আমি তলৰ 9.3 চিত্ৰটোলৈ চাওঁহক—



চিত্ৰ 9.3

লক্ষ্য কৰা যে চিত্ৰ T য়ে আগুৰা সমতলীয় ক্ষেত্ৰটো P আৰু Q চিত্ৰ দুটাই আগুৰা দুটা সমতলীয় চিত্ৰৰে গঠিত। সহজতেই দেখা পাবা যে—

T চিত্ৰটোৰ কালি = P চিত্ৰৰ কালি + Q চিত্ৰৰ কালি।

তোমালোকে চিত্ৰ A ৰ কালিক কালি (A), চিত্ৰ B ৰ কালিক কালি (B), চিত্ৰ T ৰ কালিক কালি (T) ইত্যাদিৰূপে বুজাব পাৰা। এতিয়া ক'ব পাৰা যে—

এটা চিত্ৰৰ কালি সেই চিত্ৰটোৱে আগুৰা সমতলৰ অংশটোৰ সৈতে জড়িত এটা সংখ্যা (কোনো এটা এককত) যিয়ে তলৰ ধৰ্ম দুটা মানে—

(1) যদি A আৰু B চিত্ৰ দুটা সৰ্বসম, তেন্তে কালি (A) = কালি (B)

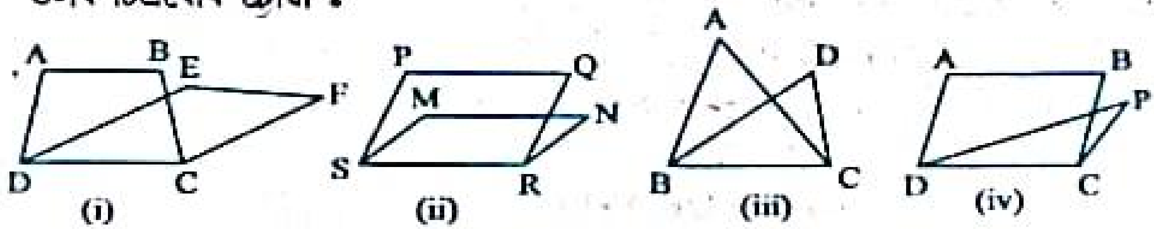
আৰু (2) যদি দুটা চিত্ৰ T য়ে আগুৰা সমতল ক্ষেত্ৰটো P আৰু Q দুটা অংশযুক্ত সমতল ক্ষেত্ৰৰ দ্বাৰা গঠিত তেন্তে

কালি (T) = কালি (P) + কালি (Q)

আয়ত, বৰ্গ, সামান্তৰিক, ত্ৰিভুজ ইত্যাদি বিভিন্ন চিত্ৰবোৰৰ কালি নিৰ্ণয়ৰ সূত্ৰ কিছুমানো তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীবোৰৰ পৰা জানি আহিছা। আমি এই অধ্যায়ত একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত অৱস্থান কৰাৰ চৰ্তসাপেক্ষে এই জ্যামিতিক চিত্ৰবোৰৰ কালিৰ মাজত কিছুমান সম্পৰ্ক অধ্যয়ন কৰি এই সূত্ৰবোৰৰ বিষয়ে থকা জ্ঞান সুদৃঢ় কৰাৰ চেষ্টা কৰিম। এই অধ্যয়ন আমাৰ 'ত্ৰিভুজৰ সদৃশতা'ৰ ওপৰত পাবলগীয়া ফল কিছুমান বুজাৰ ক্ষেত্ৰতো প্ৰয়োজন হ'ব।

9.2 একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা চিত্ৰ (Figures on the Same Base and Between the Same Parallels) :

তলৰ চিত্ৰবোৰ চোৱা :



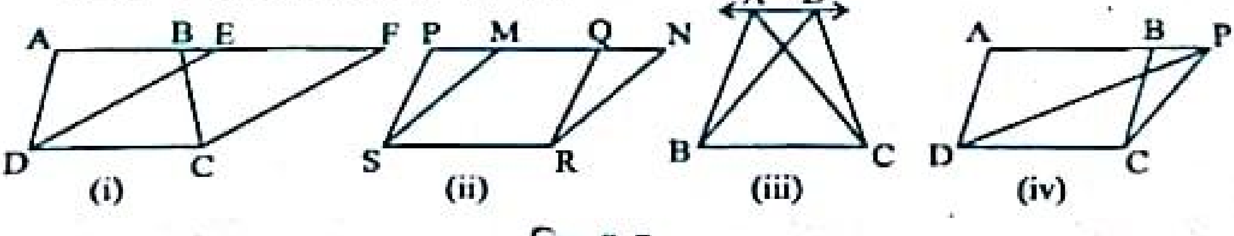
চিত্ৰ 9.4

9.4 (i) চিত্ৰটোত ABCD ট্ৰেপিজিয়াম আৰু EFCD সামান্তৰিকটোৰ এটা সাধাৰণ বাহু DC আছে। আমি ক'ম যে ABCD ট্ৰেপিজিয়াম আৰু EFCD সামান্তৰিক দুয়ো একেটা ভূমি DC ৰ ওপৰত আছে। একেদৰে—

চিত্ৰ 9.4 (ii) ত PQRS আৰু MNRS সামান্তৰিক দুটা একেটা ভূমি SB ৰ ওপৰত;

চিত্ৰ 9.4 (iii) ত ABC আৰু DBC ত্ৰিভুজ দুটা একেটা ভূমি BC ৰ ওপৰত আৰু চিত্ৰ 9.4(iv) ত ABCD সামান্তৰিক আৰু PDC ত্ৰিভুজটো একেটা ভূমি DC ৰ ওপৰত আছে।

এতিয়া তলৰ চিত্ৰকেইটালৈ মন কৰা—

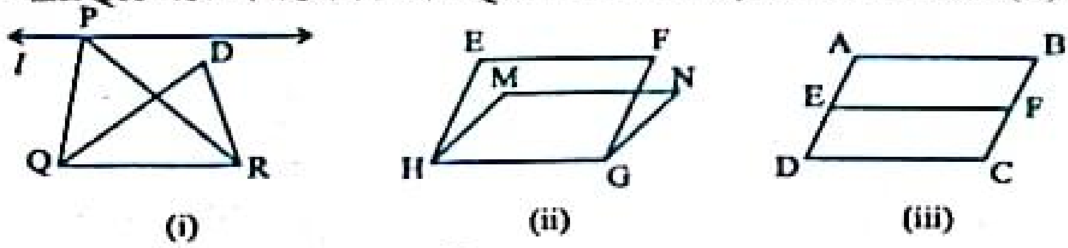


চিত্ৰ 9.5

ইয়াৰ 9.5(i) চিত্ৰটোত স্পষ্টভাৱে ABCD ট্ৰেপিজিয়াম আৰু EFCD সামান্তৰিকটো একে ভূমি DC ৰ ওপৰত আছে। তাৰোপৰি, DC ভূমিৰ বিপৰীতে ABCD ট্ৰেপিজিয়ামৰ শীৰ্ষবিন্দু A আৰু B, আৰু EFCD সামান্তৰিকৰ শীৰ্ষবিন্দু E আৰু F আটায়েই DC ৰ সমান্তৰাল এটা ৰেখা AF ৰ ওপৰত আছে। আমি কম যে, ABCD ট্ৰেপিজিয়াম আৰু EFCD সামান্তৰিক উভয়ে একে ভূমি DC ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল AF আৰু DC ৰ মাজত অৱস্থিত। একেদৰে PQRS আৰু MNRS সামান্তৰিক দুটা একে ভূমি SR ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল PN আৰু SR ৰ মাজত অৱস্থিত [চিত্ৰ 9.5 (ii)], যিহেতু PQRS ৰ শীৰ্ষবিন্দু P আৰু Q আৰু MNRS ৰ শীৰ্ষবিন্দু M আৰু N আটাইকেইটাই ভূমি SR ৰ সমান্তৰাল এটা ৰেখা PN ৰ ওপৰত আছে। একেধৰণেৰে ABC আৰু DBC ত্ৰিভুজ দুটা একে ভূমি BC ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল AD আৰু BC ৰ [চিত্ৰ 9.5 (iii) চোৱা] মাজত অৱস্থিত; আৰু ABCD সামান্তৰিক আৰু PCD ত্ৰিভুজ একে ভূমি DC ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল AP আৰু DC ৰ মাজত [চিত্ৰ 9.5 (iv) চোৱা] অৱস্থিত।

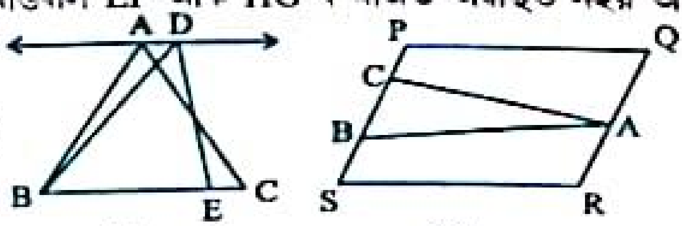
গতিকে, দুটা চিত্ৰক একে ভূমিৰ ওপৰত আৰু দুই সমান্তৰালৰ মাজত থকা বুলি কয় যদি সিহঁতৰ এটা সাধাৰণ ভূমি (বাহু) থাকে আৰু প্ৰতিটো চিত্ৰৰ সাধাৰণ ভূমিটোৰ বিপৰীতে থকা শীৰ্ষবিন্দুবোৰ (বা শীৰ্ষ বিন্দু) ভূমিৰ সমান্তৰাল এটা ৰেখাৰ ওপৰত থাকে।

ওপৰৰ কথাখিনিত দৃষ্টি ৰাখি তোমালোকে এতিয়া কব নোৱাৰিবা যে চিত্ৰ 9.6 (i) ত ΔPQR আৰু ΔDQR একে সমান্তৰাল l আৰু QR ৰ মাজত অৱস্থিত। একেদৰে চিত্ৰ 6(ii) ৰ EFGH



চিত্ৰ 9.6

আৰু MNGH সামান্তৰিক দুটা একে সমান্তৰাল EF আৰু HG ৰ মাজত অৱস্থিত নহয় আৰু চিত্ৰ 9.6 (iii) ৰ ABCD আৰু EFCD সামান্তৰিক দুটাও একে সমান্তৰাল AB আৰু DC ৰ মাজত (আনকি সিহঁতৰ DC সাধাৰণ ভূমি আৰু একে সমান্তৰাল AD আৰু BC ৰ মাজত থকা স্বত্বেও) অৱস্থিত নহয়।



চিত্ৰ 9.7

গতিকে এইটো স্পষ্টভাৱে মন কৰিব

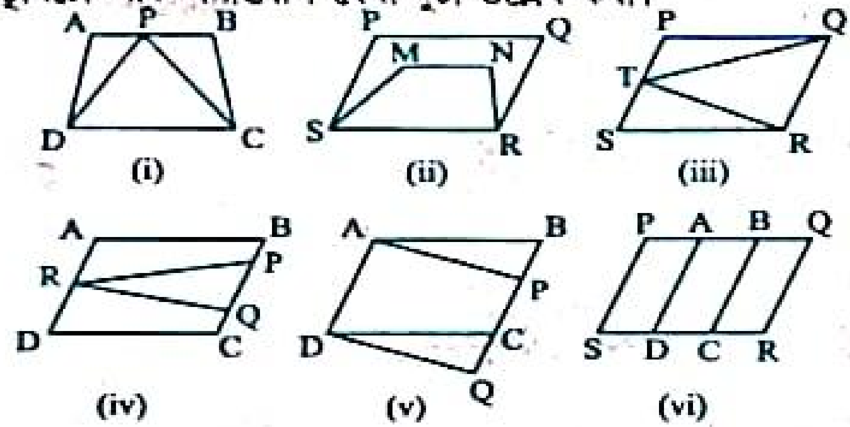
লাগিব যে—

সমান্তৰাল ৰেখা দুটাৰ ভিতৰত কোনোবা এটাত সাধাৰণ ভূমিটো থাকিব লাগিব।

মন কৰা যে 9.7 (i) চিত্ৰৰ ΔABC আৰু ΔDBE সাধাৰণ ভূমিৰ ওপৰত নাই। একেদৰে চিত্ৰ 9.7 (ii) ৰ ABC ত্ৰিভুজ PQRS আৰু সামান্তৰিকটোও একে ভূমিৰ ওপৰত নাই।

অনুশীলন 9.1

1. তলৰ চিত্ৰবোৰৰ কোনবোৰ একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত অৱস্থিত? এনেক্ষেত্ৰত সাধাৰণ ভূমিটো আৰু সমান্তৰাল ৰেখা দুটা উল্লেখ কৰা।

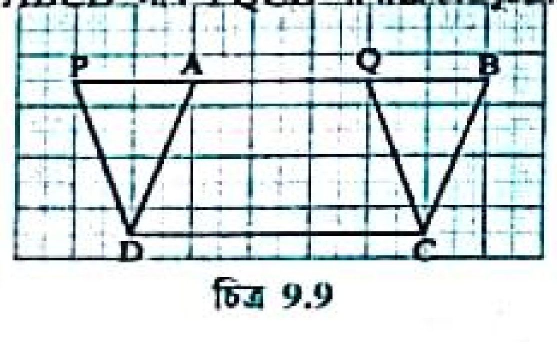


চিত্ৰ 9.8

9.3 একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা সামান্তৰিক (Parallelograms on the same Base and Between the same Parallels) :

এতিয়া আমি একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা দুটা সামান্তৰিকৰ কালিৰ মাজত থাকিব পৰা কোনো এক সম্পৰ্ক নিৰ্ণয় কৰাৰ চেষ্টা কৰিম। ইয়াৰ বাবে, আমি তলৰ কাৰ্যকেইটা কৰি লওঁ আহা।

কাৰ্য-1 : এখন লেখকাকতত ABCD আৰু PQCD সামান্তৰিক দুটা চিত্ৰ 9.9 ত দেখুৱা ধৰণে আঁকি লওঁ।

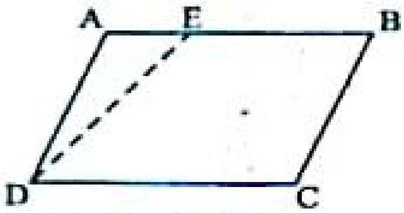


চিত্ৰ 9.9

ওপৰৰ দুয়োটা সামান্তৰিক একে ভূমি DC আৰু একে সমান্তৰাল PB আৰু DC ৰ মাজত আছে। বৰ্গবোৰ গণি সামান্তৰিক দুটাৰ কালি নিৰ্ণয়ৰ পদ্ধতিটো মনত পেলাব পাৰা।

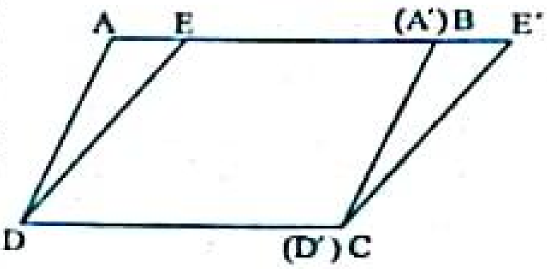
এই পদ্ধতিত, চিত্ৰটোৱে আবৰি থকা সম্পূৰ্ণ বৰ্গবোৰৰ সংখ্যা আৰু চিত্ৰৰ ভিতৰত আধা বা আধাতকৈ বেছি অংশ সোমাই থকা বৰ্গবোৰৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰি কালি উলিওৱা হয়। যিবোৰ বৰ্গৰ আধাতকৈ কম অংশ চিত্ৰৰ ভিতৰত সোমাই থাকে সেইবোৰক উপেক্ষা কৰা হয়। তোমালোকে দেখিবা যে দুয়োটা সামান্তৰিকৰ কালিয়েই (প্ৰায়) 15 বৰ্গ চে.মি. লেখকাকতত কেইযোৰমান আৰু সামান্তৰিক আঁকি এই কাৰ্যটো এখন খুঁটিমৰা বোৰ্ড (Geoboard) ব্যৱহাৰ কৰিও এই কাৰ্যক্ৰিয়াটো কৰিব পাৰি। পুনৰায় কৰা। তুমি কি লক্ষ্য কৰিছা? সামান্তৰিক দুটাৰ কালি বেলেগ বেলেগ নে একে সমান? প্ৰকৃততে সিহঁত সমান। সেয়ে ইয়েই তোমাক সিদ্ধান্তত উপনীত কৰাব যে—*একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰলাৰ মাজত অৱস্থিত সামান্তৰিকবোৰৰ কালিৰ পৰিমাণ সমান।* যি কি নহওঁক মনত ৰাখিবা যে এইটো এটা মাত্ৰ সত্যাপনহে।

কাৰ্য-2 ঃ এখন ডাঠ কাকত নাইবা এখন কাৰ্ডবোৰ্ড পাতৰ ওপৰত ABCD সামান্তৰিক এটা আঁকা। এতিয়া চিত্ৰ 9.10 অত দেখুৱাৰ দৰে DE ৰেখাখণ্ড এটা আঁকা।



চিত্ৰ 9.10

ইয়াৰ পিছত এখন নক্সা আঁকা কাকতৰ সহায় লৈ এখন বেলেগ কাকতত ΔADE ৰ সৰ্বসমকৈ ΔA′D′E′ কাটি লোৱা। এতিয়া চিত্ৰ 9.11 অত দেখুৱা ধৰণেৰে ΔA′D′E′ ক এনেদৰে ৰখা যাতে ইয়াৰ A′D′ বাহু BC ৰ লগত মিলি যায়। লক্ষ্য কৰা যে ইয়াত একে ভূমি DC আৰু একে সমান্তৰাল AE′ ৰ মাজত অৱস্থিত দুটা সামান্তৰিক ABCD আৰু EE′CD আছে। ইহঁতৰ কালিৰ বিষয়ে তুমি কি ক'বা?



চিত্ৰ 9.11

যিহেতু ΔADE ≅ ΔA′D′E′, গতিকে কালি (ADE) = কালি (A′D′E′)

আকৌ কালি (ABCD) = কালি (ADE) + কালি (EBCD)

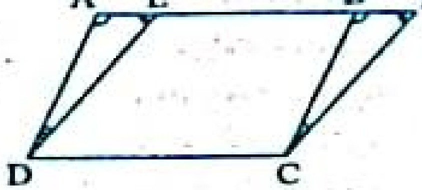
= কালি (A′D′E′) + কালি (EBCD)

= কালি (EE′CD)

গতিকে সামান্তৰিক দুটাৰ কালি সমান।

এতিয়া আমি এনেকুৱা দুটা সামান্তৰিকৰ মাজত থকা এই সম্পৰ্কটো প্ৰমাণ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰোঁ আঁহা।

উপপাদ্য 9.1 : *একে ভূমিত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত অৱস্থিত সামান্তৰিকবোৰৰ কালি সমান।*



চিত্ৰ 9.12

প্ৰমাণ : একে ভূমি DC ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল AF আৰু DC ৰ মাজত ABCD আৰু EFCD সামান্তৰিক দুটা দিয়া আছে (চিত্ৰ 9.12 চোৱা)।

প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে কালি (ABCD) = কালি (EFCD)

ADE আৰু BCF ত্ৰিভূজ দুটাত,

∠DAE = ∠CBF (AD||BC আৰু তিৰ্যক AF ৰ পৰা অনুৰূপ কোণ) .... (1)

∠AED = ∠BFC (ED||FC আৰু তিৰ্যক AF ৰ পৰা অনুৰূপ কোণ) .... (2)

গতিকে, ∠ADE = ∠BCF (ত্ৰিভূজৰ কোণ-সমষ্টি ধৰ্ম) .... (3)

আকৌ, AD = BC (ABCD সামন্তৰিকৰ বিপৰীত বাহু) .... (4)

এতেকে ΔADE ≡ ΔBCF [কো-বা-কো বিধিমতে, (1), (2), (3) ব্যৱহাৰ কৰি]

গতিকে কালি (ADE)= কালি (BCF) (সৰ্বসম চিত্ৰৰ কালি সমান) .... (5)

এতিয়া, কালি (ABCD)= কালি (ADE) + কালি (EDCB)

= কালি (BCF) + কালি(EDCB) .... [(5 ৰ পৰা]

= কালি (EFCD)

∴ ABCD আৰু EFCD সামন্তৰিকৰ কলি সমান।

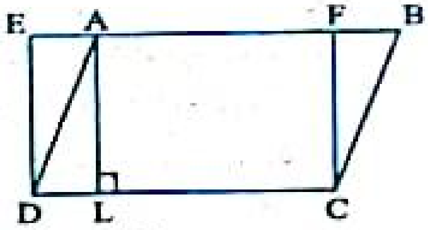
এতিয়া আমি ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ প্ৰয়োগ বৰ্ণনা কৰিবলৈ কেইটামান উদাহৰণ লওঁ আঁহা।

উদাহৰণ 1 : চিত্ৰ 9.13 ত ABCD এটা সামন্তৰিক আৰু EFCD এটা আয়ত।

তাৰোপৰি AL ⊥ DC। প্ৰমাণ কৰা যে,

(i) কালি (ABCD) = কালি (EFCD)

(ii) কালি (ABCD) = DC × AL



চিত্ৰ 9.13

সমাধান : (i) যিহেতু আয়তবোৰ সামান্তৰিক,

গতিকে, কালি (ABCD) = কালি (EFCD)

(উপপাদ্য 9.1)

(ii) ওপৰৰ ফলটোৰ পৰা,

কালি (ABCD) = DC × FC (আয়তৰ কালি = দীঘ × প্ৰস্থ)

যিহেতু AL ⊥ DC, গতিকে, AFCL এটা আয়ত। ....(1)

∴ AL = FC ....(2)

গতিকে কালি (ABCD) = DC × AL [(1) আৰু (2) ৰ পৰা]

ওপৰৰ (ii) ফলটোৰ পৰা মন কৰিব পৰা যে

এটা সামান্তৰিকৰ কালি ইয়াৰ যিকোনো এটা বাহু আৰু ইয়াৰ অনুৰূপ উন্নতিৰ পূৰণফল। তোমালোকৰ মনত পৰেনে যে পঞ্চম শ্ৰেণীতে তোমালোকে সামান্তৰিকৰ কালিৰ এই সূত্ৰটো অধ্যয়ন কৰি আহিছা। এই সূত্ৰটোৰ আধাৰত, উপপাদ্য 9.1 টো এনেধৰণেও লিখিব পাৰি—

একে ভূমিৰ ওপৰত নাইবা সমান ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা সামান্তৰিকবোৰৰ কালি সমান।

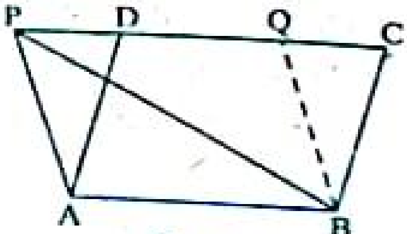
ওপৰৰ উক্তিটোৰ বিপৰীতটো লিখিব পাৰিবানে? ই তলত দিয়াৰ দৰে হ'ব—

একে ভূমিৰ (নাইবা সমান ভূমিৰ) ওপৰত আৰু সমান কালিৰ সামান্তৰিকবোৰ একে সমান্তৰাল ৰেখাৰ মাজত থাকে।

বিপৰীতটো সত্যনে? সামান্তৰিকটোৰ কালিৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি বিপৰীত উক্তিটো প্ৰমাণ কৰা।

উদাহৰণ 2 : এটা ত্ৰিভুজ আৰু এটা সামান্তৰিক যদি একে ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থাকে তেন্তে দেখুৱা যে ত্ৰিভুজটোৰ কালি সামান্তৰিকটোৰ কালিৰ আধা হ'ব।

সমাধান : ধৰা ΔABP আৰু সামান্তৰিক ABCD একে ভূমি AB আৰু একে সমান্তৰাল AB আৰু PC ৰ মাজত আছে। (চিত্ৰ 9.14)। তুমি দেখুৱাব খুজিছা যে



চিত্ৰ 9.14

কালি (PAB) = $\frac{1}{2}$ কালি (ABCD)

আন এটা সামান্তৰিক পোৱাকৈ BC||AP আঁকা। এতিয়া সামান্তৰিকদ্বয় ABQP আৰু ABCD একে ভূমি AB ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল AB আৰু PC ৰ মাজত আছে।

গতিকে, কালি (ABQP) = কালি (ABCD) [উপপাদ্য 9.1 মতে] ....(1)

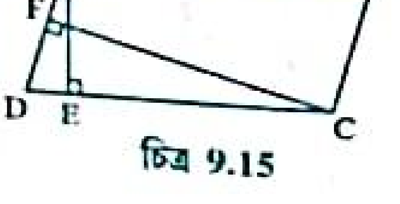
কিন্তু $\Delta PAB \cong \Delta BQP$ (PB কৰ্ণই ABQP সামান্তৰিকটোক দুটা সৰ্বসম ত্ৰিভুজত বিভক্ত কৰিছে।)

গতিকে কালি (PAB) = কালি (BQP) ....(2)

এতেকে, কালি (PAB) = $\frac{1}{2}$ কালি (ABQP) [(2) ৰ পৰা] ....(3)

ইয়াৰ পৰা কালি (PAB) = $\frac{1}{2}$ কালি (ABCD) [(1) আৰু (3) ৰ পৰা]

অনুশীলনী 9.2



চিত্ৰ 9.15

1. চিত্ৰ 9.15 অত ABCD এটা সামান্তৰিক, $AE \perp DC$ আৰু $CF \perp AD$। যদি AB = 16 চে.মি., AE = 8 চে.মি. আৰু CF = 10 চে.মি., AD উলিওৱা।
2. ABCD সামান্তৰিক এটাৰ বাহুবোৰৰ মধ্যবিন্দুকেইটা যদি

যথাক্ৰমে E, F, G আৰু H, দেখুৱা যে কালি (EFGH) = $\frac{1}{2}$ কালি (ABCD)।

3. ABCD এটা সামান্তৰিকৰ DC আৰু AD বাহুত অৱস্থিত যথাক্ৰমে P আৰু Q যিকোনো দুটা বিন্দু। দেখুৱা যে কালি (APB) = কালি (BQC)।

4. চিত্ৰ 9.16 অত ABCD সামান্তৰিকটোৰ ভিতৰত P এটা বিন্দু। দেখুৱা যে—

(i) কালি (APB) + কালি (PCD) = $\frac{1}{2}$ কালি (ABCD)

(ii) কালি (APD) + কালি (PBC) = কালি (APB) + কালি (PCD)

চিত্ৰ 9.16

[ইংগিত : P ৰ মাজেৰে AB ৰ সমান্তৰালকৈ এটা ৰেখা টানা।]

5. চিত্ৰ 9.17 অত PQRS আৰু ABRS দুটা সামান্তৰিক। BR বাহুৰ ওপৰত X এটা যিকোনো বিন্দু। দেখুওৱা যে—

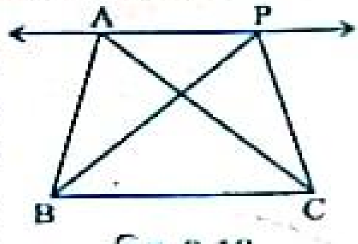
(i) কালি (PQRS) = কালি (ABRS)

(ii) কালি (AXS) = $\frac{1}{2}$ কালি (PQRS)

চিত্ৰ 9.17

6. এজন খেতিয়কৰ PQRS সামান্তৰিক এটাৰ আকৃতিৰ এখন খেতিপথাৰ আছিল। তেওঁ RS ৰ ওপৰত যিকোনো এটা বিন্দু ল'লে আৰু ইয়াক P আৰু Q বিন্দু দুটাৰ লগত সংযুক্ত কৰিলে। পথাৰখন কেইটা অংশত বিভক্ত হ'ল? এই অংশকেইটাৰ আকৃতিবোৰ কি কি? খেতিয়কজনে পথাৰখনৰ সমান সমান অংশত বেলেগ বেলেগ ঘেঁহু আৰু মাহৰ গুটি সিঁচিব খুজিলে। তেওঁ এইটো কিদৰে কৰিব?

9.4 একে ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা ত্ৰিভুজ (Triangles on the same Base and between the same Parallels) :

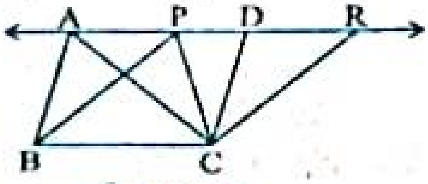


চিত্ৰ 9.18

আমি চিত্ৰ 9.18 চাওঁহক। ইয়াত একে ভূমি BC ত আৰু একে সমান্তৰাল BC আৰু AP ৰ মাজত ABC আৰু PBC ত্ৰিভুজ দুটা তোমাৰ আছে। এনে ত্ৰিভুজবোৰৰ কালিবোৰৰ বিষয়ে তুমি কি ক'ব পাৰিবা? এই প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিবলৈ, তুমি লেখকাকত এখনৰ ওপৰত কেইবাযোৰও ত্ৰিভুজ একে ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকাকৈ অংকণ কৰা আৰু বৰ্গ গণন পদ্ধতিৰে সিহঁতৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা কাৰ্যটো কৰি চাব পাৰা। প্ৰতিবাৰতে, তুমি দেখিবা যে ত্ৰিভুজ দুটাৰ কালি (প্ৰায়) একে। এই কাৰ্যটো জিওবোৰ্ড (খুঁটিবোৰ্ড) এখন ব্যৱহাৰ কৰিও কৰিব পাৰি। পুনৰায় দেখিবা যে কালি দুয়োটা (প্ৰায়) একে।

ওপৰৰ প্ৰশ্নটোৰ এটা যুক্তিগত উত্তৰ পাবলৈ তোমালোকে এইদৰে আগবাঢ়িব পাৰা—

চিত্ৰ 9.18 ত CD||BA আৰু CR||BP আঁকা যাতে AP ৰেখাৰ ওপৰত D আৰু R বিন্দু থাকে (চিত্ৰ 9.19)



চিত্ৰ 9.19

ইয়াৰ পৰা তুমি একে ভূমি BC ৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰাল BC আৰু AR ৰ মাজত PBCR আৰু ABCD সামান্তৰিক দুটা পাবা।

গতিকে, কালি (ABCD)= কালি (PBCR) (কিয় ?)

এতিয়া, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

আৰু $\Delta PBC \cong \Delta CRP$ (কিয় ?)

গতিকে কালি (ABC)= $\frac{1}{2}$ কালি (ABCD)

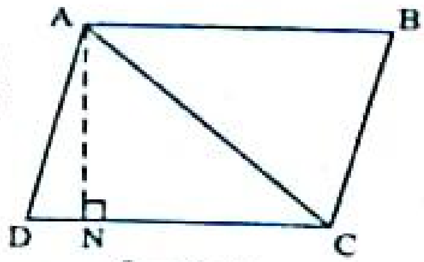
আৰু কালি (PBC) = $\frac{1}{2}$ কালি (PBCR) (কিয়)

সেয়েহে, কালি (ABC) = কালি (PBC)

এইদৰে, তোমালোকে তলৰ উপপাদ্যটোত এতিয়া আহি উপনীত হ'লা,

উপপাদ্য 9.2 : *একে (নাইবা সমান) ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা দুটা ত্ৰিভূজৰ কালি সমান।*

এতিয়া ধৰা ABCD এটা সামান্তৰিক যাৰ AC এডাল কৰ্ণ (চিত্ৰ 9.20 চোৱা)। ধৰা AN ⊥ DC।



চিত্ৰ 9.20

মন কৰা যে, $\Delta ADC \cong \Delta CBA$ (কিয় ?)

গতিকে কালি (ADC) = কালি (CBA) (কিয় ?)

$\therefore$ কালি (ADC)= $\frac{1}{2}$ কালি (ABCD)

$= \frac{1}{2}$ (DC × AN) (কিয় ?)

গতিকে, ΔADC ৰ কালি = $\frac{1}{2}$ × ভূমি DC × অনুৰূপ উন্নতি AN।

অন্য কথাত *ত্ৰিভূজৰ কালি ইয়াৰ ভূমি (বা যিকোনো বাহু) আৰু অনুৰূপ উন্নতিৰ (বা উচ্চতাৰ) পূৰণফল।* তোমালোকৰ মনত আছেনে, ত্ৰিভূজৰ কালিৰ এই সূত্ৰটো সপ্তম শ্ৰেণীতেই শিকি আহিছা? এই সূত্ৰটোৰ পৰা দেখিবা যে,

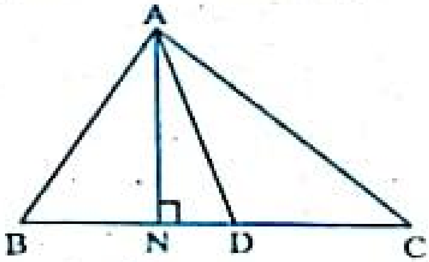
একে (বা সমান) ভূমিৰ ওপৰত আৰু একে সমান কালি থকা দুটা ত্ৰিভূজৰ অনুৰূপ উন্নতিও সমান।

সমান অনুৰূপ উন্নতি থাকিবলৈ হ'লে ত্ৰিভুজবোৰ একে সমান্তৰালৰ মাজত থাকিব লাগিব। ইয়াৰপৰা তোমালোকে উপপাদ্য 9.2 ৰ বিপৰীত নিম্নোক্ত উপপাদ্য এটাত উপনীত হ'লা—

উপপাদ্য 9.3 : *একে ভূমিৰ (সমান ভূমিৰ) ওপৰত থকা একে কালিবিশিষ্ট দুটা ত্ৰিভুজ একে সমান্তৰালৰ মাজত থাকে।*

ওপৰৰ ফলটোৰ প্ৰয়োগৰ বৰ্ণনা কৰাৰ বাবে আমি কেইটামান উদাহৰণ লওঁ আঁহা।

উদাহৰণ 3 : দেখুৱা যে কোনো ত্ৰিভুজৰ মধ্যমা এডালে ইয়াক দুটা সমান কালিবিশিষ্ট ত্ৰিভুজত বিভক্ত কৰে।



চিত্ৰ 9.21

সমাধান : ধৰা ABC এটা ত্ৰিভুজ আৰু AD ইয়াৰ এডাল মধ্যমা (চিত্ৰ 9.21 চোৱা)। তুমি দেখুৱাব লাগে যে,

কালি (ABD) = কালি (ACD)

যিহেতু কালিৰ সুত্ৰটো উন্নতিৰ সৈতে জড়িত, আমি $AN \perp BC$ আঁকি লম।

এতিয়া, কালি (ABD) $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উন্নতি (ΔABDৰ)

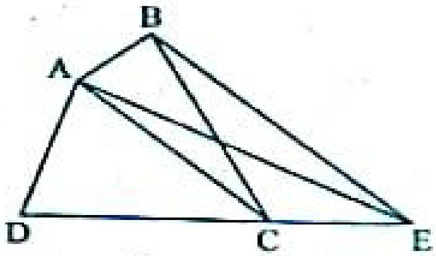
$= \frac{1}{2} \times BD \times AN$

$= \frac{1}{2} \times CD \times AN \; (\because BD = CD)$

$= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উন্নতি (ΔACD ৰ)

= কালি (ACD)

উদাহৰণ 4 : চিত্ৰ 9.22 ত ABCD এটা চতুৰ্ভুজ আৰু $BE \parallel AC$। BE ৰেখা DC ৰ বৰ্দ্ধিতাংশৰ E বিন্দুত লগ লাগিছে। দেখুৱা যে, ΔADE ৰ কালি ABCD চতুৰ্ভুজৰ কালিৰ সমান।



চিত্ৰ 9.22

সমাধান : চিত্ৰটো সাৱধানে লক্ষ্য কৰা।

ΔBAC আৰু ΔEAC একে ভূমি AC আৰু একে সমান্তৰাল AC আৰু BE ৰ মাজত আছে।

গতিকে, কালি (BAC) = কালি (EAC) [উপপাদ্য 9.2 অনুসৰি]

$\therefore$ কালি (BAC) + কালি (ADC) = কালি (EAC) + কালি (ADC)

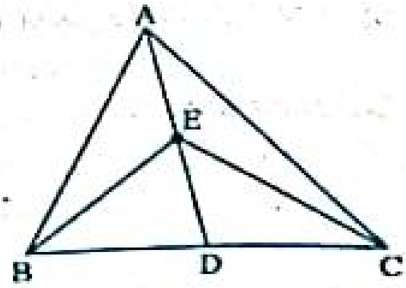
[দুয়োপিনে সমান কালি যোগ কৰি]

বা কালি (ABCD) = কালি (ADE)

অনুশীলনী 9.3

1. চিত্ৰ 9.23 ত কোনো ত্ৰিভুজ ABC ৰ AD মধ্যমাৰ ওপৰত E এটা যিকোনো বিন্দু। দেখুওৱা যে, কালি (ABE) = কালি (ACE)।

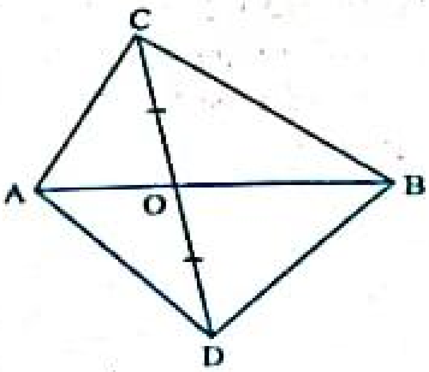
2. ABC ত্ৰিভুজৰ AD মধ্যমাৰ E মধ্যবিন্দু। দেখুওৱা যে, কালি (BED) = $\frac{1}{4}$ কালি (ABC)।



চিত্ৰ 9.23

3. দেখুওৱা যে এটা সামান্তৰিকৰ কৰ্ণ দুটাই সামান্তৰিকটোক চাৰিটা সমান কালিৰ ত্ৰিভুজত ভাগ কৰে।

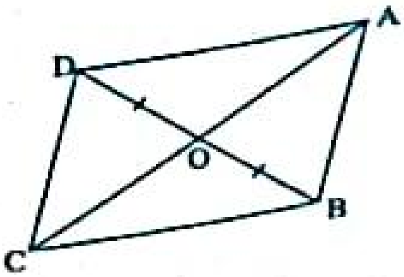
4. চিত্ৰ 9.24 ত একে ভূমি AB ৰ ওপৰত ABC আৰু ABD দুটা ত্ৰিভুজ। যদি AB ৰেখাই CD ৰেখাখণ্ডটোক O বিন্দুত সমদ্বিখণ্ডিত কৰে, তেন্তে দেখুওৱা যে, কালি (ABC) = কালি (ABD)।



চিত্ৰ 9.24

5. এটা ত্ৰিভুজ ABC ৰ BC, CA আৰু AB বাহকেইটাৰ মধ্যবিন্দু যথাক্ৰমে D, E আৰু F। দেখুওৱা যে,
   (i) BDEF এটা সামান্তৰিক
   (ii) কালি (DEF) = $\frac{1}{4}$ কালি (ABC)
   (iii) কালি (BDEF) = $\frac{1}{2}$ কালি (ABC)।

6. চিত্ৰ 9.25 ত ABCD চতুৰ্ভুজৰ কৰ্ণ AC আৰু BD য়ে O বিন্দুত ছেদ কৰিছে যাতে OB = OD।
   যদি AB = CD, তেন্তে দেখুওৱা যে
   (i) কালি (DOC) = কালি (AOB)
   (ii) কালি (DCB) = কালি (ACB)
   (iii) DA||CB অৰ্থাৎ ABCD এটা সামান্তৰিক।
   [ইংগিত : D আৰু B ৰ পৰা AC লৈ দুডাল লম্ব টনা]



চিত্ৰ 9.25

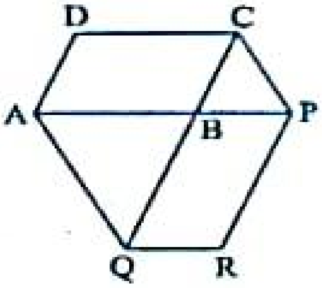
7. ABC ত্ৰিভুজৰ AB আৰু AC বাহু দুটাৰ ওপৰত দুটা বিন্দু ক্ৰমে D আৰু E এনেদৰে লোৱা হৈছে যাতে কালি (DBC) = কালি (EBC)। প্ৰমাণ কৰা যে DE||BC।

8. ABC ত্ৰিভুজৰ BC বাহুৰ সমান্তৰাল XY এডাল ৰেখা। যদি BE||AC আৰু CF||AB য়ে XY ক ক্ৰমে E আৰু F বিন্দুত কাটে, তেন্তে দেখুওৱা যে কালি (ABE) = কালি (ACE)

9. ABCD এটা সামান্তৰিকৰ AB বাহুটোক যিকোনো এটা বিন্দু P লৈ বঢ়াই দিয়া হ'ল। এতিয়া A বিন্দুৰ মাজেৰে আৰু CP ৰ সমান্তৰালভাৱে টনা এটা ৰেখাই CB ৰ বৰ্ধিতাংশক Q বিন্দুত কাটিছে। এতিয়া PBQR সামান্তৰিকটো সম্পূৰ্ণ কৰা (চিত্ৰ 9.26 চোৱা)। দেখুওৱা যে

কালি (ABCD) = কালি (PBQR)

[ইংগিত : AC আৰু PQ সংযোগ কৰা। এতিয়া কালি (ACQ) আৰু কালি (APQ) তুলনা কৰা।]



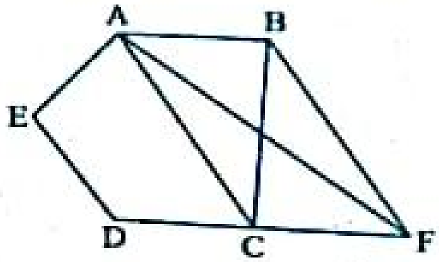
চিত্ৰ 9.26

10. ABCD ট্ৰেপিজিয়ামৰ AB||DC। কৰ্ণ AC আৰু BD য়ে পৰস্পৰক O বিন্দুত কাটে। প্ৰমাণ কৰা যে, কালি (AOD) = কালি (BOC)।

11. চিত্ৰ 9.27 ত ABCDE এটা পঞ্চভুজ। B বিন্দুৰ মাজেৰে AC ৰ সমান্তৰাল ৰেখা এটাই DC ৰ বৰ্দ্ধিতাংশৰ F বিন্দুত কাটিছে। দেখুওৱা যে

(i) কালি (ACB) = কালি (ACF)

(ii) কালি (AEDF) = কালি (ABCDE)



চিত্ৰ 9.27

12. ইতৱাৰি নামৰ গাঁওবাসী এজনৰ এটুকুৰা চতুৰ্ভুজ আকৃতিৰ মাটি আছিল। গাঁৱৰ গাঁও পঞ্চায়তে তাত স্বাস্থ্যকেন্দ্ৰ এটা প্ৰতিষ্ঠা কৰিবলৈ বুলি তেওঁৰ মাটিটুকুৰাৰ এটা চুকৰ পৰা কিছু অংশ ল'ব খুজিলে। ইতৱাৰি এই প্ৰস্তাবটোত সন্মত হ'ল এটা চৰ্তত যে তেওঁক তেওঁৰ মাটি টুকুৰাৰ পৰিবৰ্তে একে সমান পৰিমাণৰ মাটি এটুকুৰা তেওঁৰ মাটিৰ লগত লগলগাকৈ দিব লাগিব যাতে গোটেই মাটিখিনি এটা ত্ৰিভুজ আকৃতিৰ হয়।

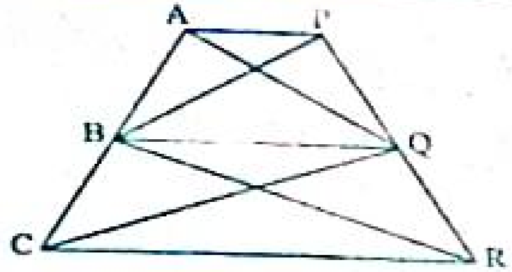
তেওঁৰ এই প্ৰস্তাবটো কিদৰে কাৰ্যকৰী কৰিব পৰা যাব ব্যাখ্যা কৰা।

13. ABCD ট্ৰেপিজিয়ামৰ AB||DC। AC ৰ সমান্তৰাল এডাল ৰেখাই AB ক X আৰু BCক Y বিন্দুত কাটিছে। প্ৰমাণ কৰা যে, কালি (ADX) = কালি (ACY)

[ইংগিত : CX লগ লগোৱা।]

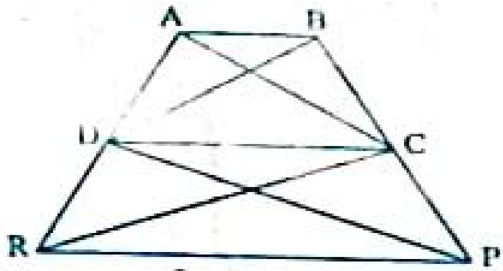
14. চিত্ৰ 9.28 অত AP||BQ||CR প্ৰমাণ কৰা যে, কালি (AQC) = কালি (PBR)

15. ABCD চতুৰ্ভুজ এটাৰ AC আৰু BD কৰ্ণ দুডালে O বিন্দুত পৰস্পৰক এনেদৰে কাটিছে যাতে কালি (AOD) = কালি (BOC)। প্ৰমাণ কৰা যে, ABCD এটা ট্ৰেপিজিয়াম।



চিত্ৰ 9.28

16. চিত্ৰ 9.29 অত কালি (DRC) = কালি (DPC), আৰু কালি (BDP) = কালি (ARC)। দেখুৱা যে, ABCD আৰু DCPR চতুৰ্ভুজ দুয়োটাই ট্ৰেপিজিয়াম।

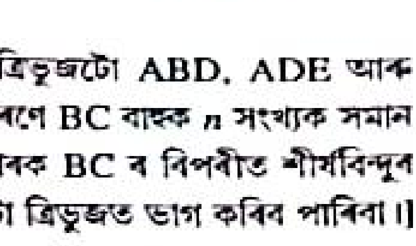


চিত্ৰ 9.29

অনুশীলনী 9.4 (ঐচ্ছিক)*

1. ABCD সমান্তৰিক আৰু ABEF আয়তটো একে ভূমি AB ৰ ওপৰত আছে আৰু ইহঁতৰ কালিও একে সমান। দেখুৱা যে সামান্তৰিকটোৰ পৰিসীমা আয়তটোৰ পৰিসীমাতকৈ ডাঙৰ।

2. চিত্ৰ 9.30 ত BC ৰ ওপৰত D আৰু E দুটা বিন্দু যাতে, BD=DE=EC। দেখুৱা যে, কালি (ABD) = কালি (ADE) = কালি (AEC)।
এতিয়া তুমি এই অধ্যায়ৰ 'পৰিচিতি'তে এৰি অহা প্ৰশ্নটোৰ উত্তৰ দিব পাৰিবানে, যে বুধিয়াৰ খেতিপথাৰখন প্ৰকৃততে সমান সমান কালিৰ তিনিটা অংশত বিভক্ত কৰা হৈছিল নে নাই?



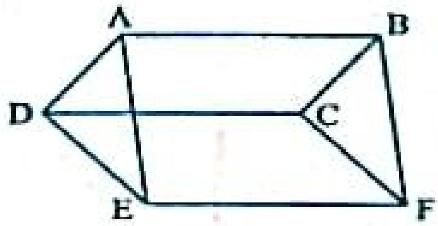
চিত্ৰ 9.30

[মন্তব্য : লক্ষ্য কৰা যে BD=DE=EC ললে ABC ত্ৰিভুজটো ABD, ADE আৰু AEC সমান কালিৰ তিনিটা ত্ৰিভুজত বিভক্ত হয়। একেধৰণে BC বাহুক n সংখ্যক সমান ভাগত বিভক্ত কৰি আৰু এনেদৰে পোৱা বিভাগ বিন্দুবোৰক BC ৰ বিপৰীত শীৰ্ষবিন্দুৰ লগত সংযুক্ত কৰি তুমি ABC ত্ৰিভুজক সমান কালিৰ nটা ত্ৰিভুজত ভাগ কৰিব পাৰিবা।]

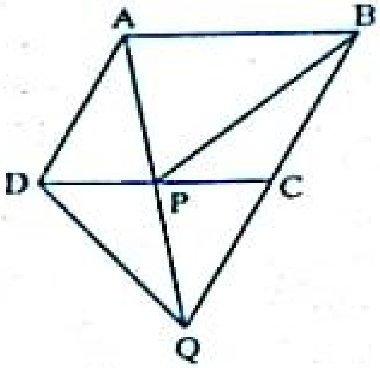
* এই অনুশীলনীবোৰ পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নল'বা।

3. চিত্ৰ 9.31 ত ABCD, DCFE আৰু ABFE তিনিও সামান্তৰিক। দেখুৱা যে, কালি (ADE) = কালি (BCF)।

4. চিত্ৰ 9.32 ত ABCD এটা সামান্তৰিক। BC ক Q বিন্দু এটালৈ বঢ়াই দিয়া হ'ল যাতে AD=CQ। যদি AQ য়ে DC ক P বিন্দুত ছেদ কৰে, দেখুৱা যে, কালি (BPC) = কালি (DPQ)।
[ইংগিত : AC লগ লগোৱা।]



চিত্ৰ 9.31



চিত্ৰ 9.32

5. চিত্ৰ 9.33 ত ABC আৰু BDE দুটা সমবাহু ত্ৰিভুজ যাতে BC ৰ মধ্যবিন্দু D। যদি AE য়ে BC ক F বিন্দুক কাটে, দেখুৱা যে,

(i) কালি (BDE) = $\frac{1}{4}$ × কালি (ABC)

(ii) কালি (BDE) = $\frac{1}{2}$ × কালি (BAE)

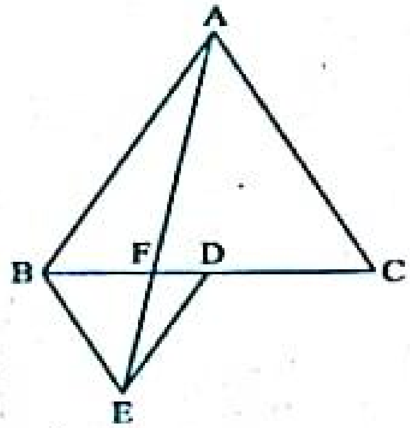
(iii) কালি (ABC) = 2 × কালি (BEC)

(iv) কালি (BFE) = কালি (AFD)

(v) কালি (BFE) = 2 × কালি (FED)

(vi) কালি (FED) = $\frac{1}{8}$ × কালি (AFC)

[ইংগিত : EC আৰু AD লগ লগোৱা। দেখুৱা যে BE||AC আৰু DE||AB ইত্যাদি।]



চিত্ৰ 9.33

6. এটা চতুৰ্ভুজ ABCD ৰ কৰ্ণ AC আৰু BD য়ে পৰস্পৰক P বিন্দুত কাটিছে। দেখুৱা যে, কালি (APB) × কালি (CPD) = কালি (APD) × কালি (BPC)
[ইংগিত : A আৰু C ৰ পৰা BD লৈ দুডাল লম্ব টানা।]

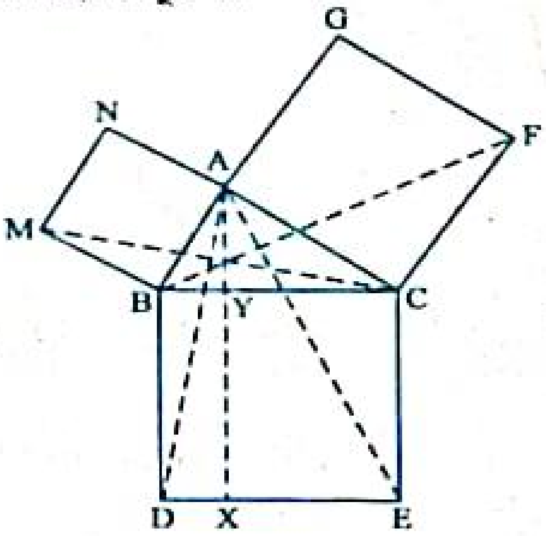
7. ABC ত্ৰিভুজৰ AB আৰু BC বাহু দুটাৰ মধ্যবিন্দু ক্ৰমে P আৰু Q। যদি AP ৰ মধ্যবিন্দু R, তেন্তে দেখুৱা যে,

(i) কালি (PRQ) = $\frac{1}{2}$ × কালি (ARC)

(ii) কালি (RQC) = $\frac{3}{8}$ × কালি (ABC)

(iii) কালি (PBQ) = কালি (ARC)

8. চিত্ৰ 9.34 অত A সমকোণ হোৱা ABC এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ। BC, CA আৰু AB বাহুৰ ওপৰত যথাক্ৰমে BCED, ACFG আৰু ABMN বৰ্গ। ৰেখাখণ্ড AX⊥DE য়ে BC ৰ Y বিন্দুত মিলিছে। দেখুৱা যে



চিত্ৰ 9.34

(i) $\Delta MBC \cong \Delta ABD$

(ii) কালি (BYXD) = 2 × কালি (MBC)

(iii) কালি (BYXD) = কালি (ABMN)

(iv) $\Delta FCB \cong \Delta ACE$

(v) কালি (CYXE) = 2 × কালি (FCB)

(vi) কালি (CYXE) = কালি (ACFG)

(vii) কালি (BCED) = কালি (ABMN) + কালি (ACFG)

টোকা : (vii) ৰ ফলটো বিখ্যাত 'পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য'। তোমালোকে এই উপপাদ্যটোৰ এটা সৰল প্ৰমাণ দশম শ্ৰেণীত শিকিবা)

9.5 সাৰাংশ (Summary) :

এই অধ্যাত তুমি তলত দিয়া কথাকেইটা শিকিলা :

1. এটা চিত্ৰই আগুৰা সমতলখনৰ অংশৰ সৈতে জড়িত কালি বা ক্ষেত্ৰফল (কোনো এককত) হৈছে এটা সংখ্যা।
2. দুটা সৰ্বাংগসম চিত্ৰৰ কালি সমান কিন্তু ইয়াৰ বিপৰীতটো সত্য নহ'বও পাৰে।
3. যদি এটা চিত্ৰ T য়ে গঠিত সামতলিক ক্ষেত্ৰ দুটা চিত্ৰ P আৰু Q ৰ সমতল ক্ষেত্ৰৰ দ্বাৰা গঠিত ওপৰা-ওপৰি নোহোৱা ক্ষেত্ৰ হ'ব, তেন্তে কালি (T) = কালি (P) + কালি (Q), য'ত কালি (T) হৈছে চিত্ৰ-T ৰ কালি।
4. দুটা চিত্ৰক একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা বুলি কোৱা হয়, যদি সিহঁতৰ এটা সাধাৰণ ভূমি (বাহু) থাকে আৰু প্ৰতিটো চিত্ৰৰ সাধাৰণ ভূমিৰ বিপৰীতে থকা শীৰ্ষকেইটা ভূমিৰ সমান্তৰাল ৰেখা এডালত থাকে।
5. একে ভূমি (সমান ভূমি) আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা সামান্তৰিকবোৰৰ কালি সমান।
6. সামান্তৰিকৰ কালি হ'ল ভূমি আৰু সামান্তৰিকটোৰ উচ্চতাৰ পূৰণফল।
7. একে ভূমি (বা সমান ভূমি) বিশিষ্ট আৰু একে কালি বিশিষ্ট সামান্তৰিকবোৰ একে সমান্তৰালৰ মাজত অৱস্থিত।
8. যদি সামান্তৰিক আৰু এটা ত্ৰিভুজ একে ভূমি আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থাকে, তেন্তে ত্ৰিভুজৰ কালি সামান্তৰিকৰ কালিৰ আধা।
9. একে ভূমি (বা সমান ভূমি) আৰু একে সমান্তৰালৰ মাজত থকা ত্ৰিভুজবোৰৰ কালি সমান।
10. এটা ত্ৰিভুজৰ কালি ইয়াৰ ভূমি আৰু অনুৰূপ উচ্চতাৰ পূৰণফলৰ সমান।
11. একে কালি বিশিষ্ট আৰু একে ভূমি (বা সমান ভূমি) বিশিষ্ট ত্ৰিভুজবোৰ একে সমান্তৰালৰ মাজত থাকে।
12. এটা ত্ৰিভুজৰ মধ্যমাই ত্ৰিভুজটোক দুটা সমান কালিৰ ত্ৰিভুজত ভাগ কৰে।