

Chapter – 8

வெக்டர் இயற்கணிதம் – 1

Ex 8.1

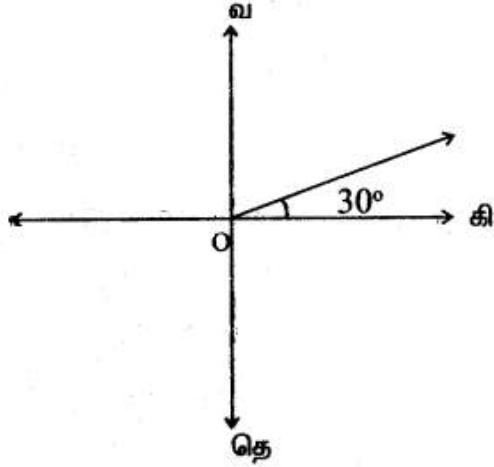
Question 1.

கீழ்க்காணும் இடப்பெயர்ச்சிகளை வரைபடம் மூலம் விவரிக்க.

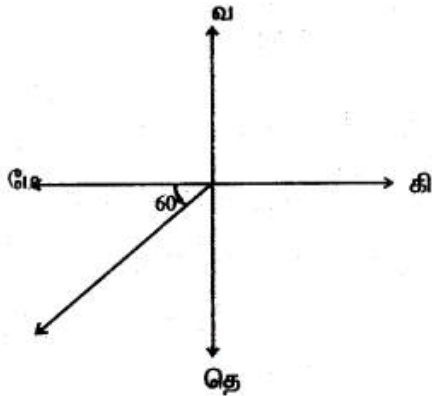
- (i) 45 செ.மீ., 30° கிழக்கிலிருந்து வடக்காக
- (ii) 80 கி.மீ., 60° மேற்கிலிருந்து தெற்காக

தீர்வு :

செ.மீ., 30° கிழக்கிலிருந்து வடக்காக



கி.மீ., 60° மேற்கிலிருந்து தெற்காக



Question 2.

தொடர்பு R ஆனது V என்ற வெக்டர்களின் கணத்தின் மீது " $\vec{a}R\vec{b}$ என்பது $\vec{a} = \vec{b}$ " என வரையறுக்கப்பட்டால் அது V பன் மீது ஒரு சமானத் தொடர்பு என நிறுவுக.

தீர்வு :

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$, V என்பது வெக்டர்களின் கணம் என்க., $-\vec{a}R\vec{b}$ என்பது $\vec{a} = \vec{b}$ என்ற தொடர்பு

(i) $\vec{a} = \vec{a}$

(ii) $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \vec{a}$

$\therefore \vec{a}R\vec{b} \Rightarrow \vec{b}R\vec{a}$

(iii) $\vec{a} = \vec{b}, \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$

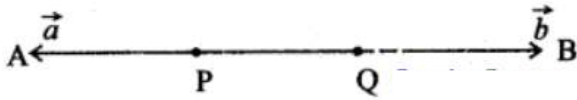
$\therefore \vec{a}R\vec{b}, \vec{b}R\vec{c} = \vec{a}R\vec{c}.$

$\therefore R$ ஆனது V -ன் மீது ஒரு சமானத் தொடர்பு ஆகும்.

Question 3.

A மற்றும் B ஆகியவை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -ன் நிலைவெக்டர்கள் எனில் AB என்ற கோட்டுத்துண்டை மூன்று சம பாகங்களாக பிரிக்கும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ மற்றும் $\frac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :



$\vec{a}, \vec{b}$ என்பது A, B எனும் புள்ளிகளைப் பொறுத்த நிலை வெக்டர்கள் என்க.

$$\Rightarrow \vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$$

P எனும் புள்ளி AB ஐ $1 : 2$ என்ற விகிதத்திலும்

Q எனும் புள்ளி AB ஐ $2:1$ என்ற விகிதத்திலும் பிரிக்கும் புள்ளிகள்.

$$\therefore \vec{OA} = \frac{1 \cdot (\vec{OB}) + 2(\vec{OA})}{1+2} = \frac{\vec{b} + 2\vec{a}}{3}$$

$$\vec{OA} = \frac{2(\vec{OB}) + \vec{OA}}{2+1} = \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3}$$

$\therefore$ தேவையான நிலை வெக்டர்கள் = $\frac{\vec{b} + 2\vec{a}}{3}, \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{3}$ ஆகும் என்பது நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 4.

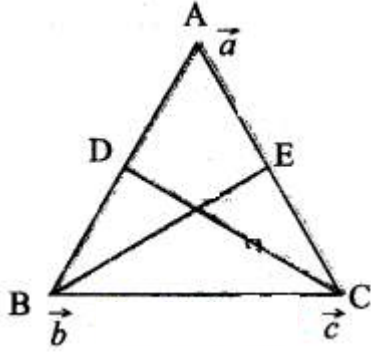
மூக்கோணம் ABC-ல் AB மற்றும் AC-ன் மையப்புள்ளிகள் முறையே D மற்றும் E எனில் $\vec{BE} + \vec{DC} = \frac{3}{2}\vec{BC}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

ΔABC -ன் முனைப்புள்ளிகள் A,B,C -ன் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்க.

D ஆனது AB -ன் நடுப்புள்ளி.

E ஆனது AC-ன் நடுப்புள்ளி.



$$\therefore \vec{OD} = \frac{\vec{OB} + \vec{OA}}{2}, \vec{OE} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2}$$

$$= \frac{\vec{b} + \vec{a}}{2} \dots (1) = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} \dots (2)$$

$$\therefore \vec{BE} = \vec{OE} - \vec{OB}$$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} - \vec{b} = \frac{\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}}{2}$$

$$\vec{DC} = \vec{OC} - \vec{OD}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{c} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}}{2} \\
\therefore \vec{BE} + \vec{DC} &= \frac{\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}}{2} + \frac{2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}}{2} \\
&= \frac{\cancel{\vec{a}} + \vec{c} - 2\vec{b} + 2\vec{c} - \cancel{\vec{a}} - \vec{b}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3\vec{c} - 3\vec{b}}{2} = \frac{3(\vec{c} - \vec{b})}{2} \\
&= \frac{3}{2} (\vec{OC} - \vec{OB}) \\
&= \frac{3}{2} \vec{BC}
\end{aligned}$$

எனவே நிருபிக்கப்பட்டது.

Question 5.

ஒருமுக்கோணத்தின் இருபக்கங்களின் நடுப்பு சேர்க்கும் நேர்க்கோடு அதன் மூன்றாவது : இணை எனவும், அதன் நீளத்தில் 1 வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

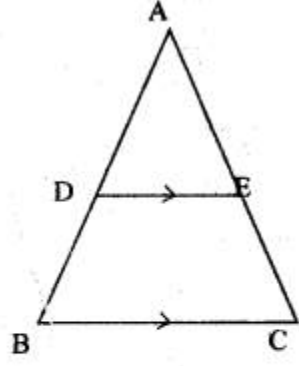
தீர்வு :

$\triangle ABC$ -யின் உச்சிப்புள்ளிகள் A, B, C வெக்டர்கள் முறையே $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$.

$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$$

D, E என்பன பக்கம் AB, AC-யின் நடும்

D, E என்பன பக்கம் AB, AC-யின் நடும்



$$\vec{OD} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \vec{OE} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$$

$$\begin{aligned} \vec{DE} &= \vec{OE} - \vec{OD} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} \\ &= \frac{\cancel{\vec{a}} + \vec{c} - \cancel{\vec{a}} - \vec{b}}{2} = \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{OC} - \vec{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{BC})$$

$$\vec{DE} = \lambda(\vec{BC}), \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \vec{DE} \parallel \vec{BC} \text{ and } \vec{DE} = \frac{1}{2}(\vec{BC})$$

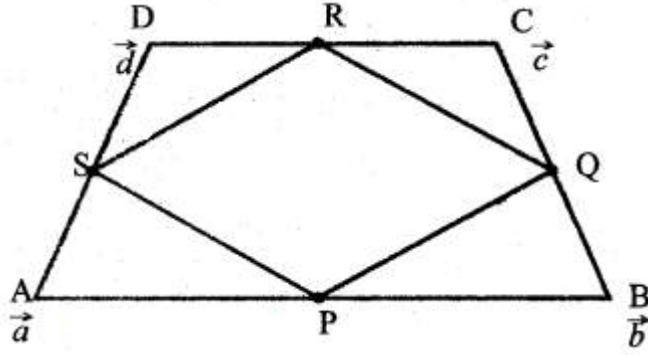
எனவே $\vec{DE}$ மூன்றாவது பக்கம் $\vec{BC}$

மற்றும் அதன் நீளத்தில் பாதி எனவும் நின்று

Question 6.

ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடுகள் ஒரு இணைகரத்தை அமைக்கும் என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

தீர்வு :



நாற்கரம் ABCD- யின் முனைகள் A,B,C,D-யின் நிலைவெக்டர்கள்

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OD} = \vec{d}$ என்க.

P, Q, R, S - என்பன நான்கு அடுத்தடுத்த பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள்.

$$\vec{OP} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \vec{OQ} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \vec{OR} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2},$$

$$\vec{OS} = \frac{\vec{a} + \vec{d}}{2}$$

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= \vec{OQ} - \vec{OP} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \\ &= \frac{\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}}{2} = \frac{\vec{c} - \vec{a}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{RS} &= \vec{OS} - \vec{OR} = \frac{\vec{a} + \vec{d}}{2} - \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2} \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{d} - \vec{c} - \vec{d}}{2} = \frac{\vec{a} - \vec{c}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{SR} = \frac{\vec{c} - \vec{a}}{2} = \vec{PQ}$$

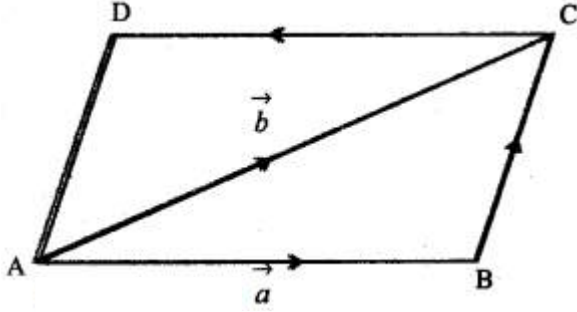
$$\vec{PQ} = 1 \vec{SR} \Rightarrow \vec{PQ} \parallel \vec{SR}$$

$\therefore$ PQRS ஓர் இணைகரம் என்பது நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 7.

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ம் ஆகியவை இணைகரத்தின் ஒரு பக்கத்தையும் ஒரு மூலைவிட்டத்தையும் குறித்தால் அதன் பிற பக்கங்களையும் மற்றொரு மூலை விட்டத்தினையும் காண்க.

தீர்வு :



ABCD ஓர் இணைகரம் $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

ΔABC -ல் $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$$\Rightarrow \vec{b} = \vec{a} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$$

ABCD ஓர் இணைகரம் என்பதால்,

$$\overrightarrow{CD} \parallel -\overrightarrow{AB}$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DA} = -(\overrightarrow{BC}) = -(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DA} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\Delta BCD\text{-யில் } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{b} - 2\vec{a}.$$

$\therefore$ இணைகரத்தின் மற்ற மூன்று பக்கங்கள்

$\vec{b} - \vec{a}$; $-\vec{a}$, $\vec{a} - \vec{b}$ மற்றும் மூலைவிட்டம் $\vec{b} - 2\vec{a}$.

Question 8.

$\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$ எனில், P, Q, R ஆகியவை ஒரே கோடமைப்புள்ளிகள் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR} \text{ [முக்கோண கூட்டல் விதியின்படி]}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR}$$

(முக்கோண கூட்டல் விதியின்படி).

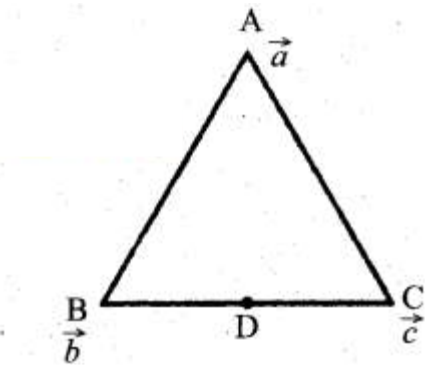
$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR} \text{ -ல் நடுப்புள்ளி, பொதுப்புள்ளி}$$

$\therefore$ P, Q, R ஒரே கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள்.

Question 9.

முக்கோணம் ABC-ல் பக்கம் BC-ன் மையப்புள்ளி D எனில், $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ என நிறுவுக. தீர்வு:

முக்கோணம் ABC-யின் உச்சிப்புள்ளிகள் A,B,C- யின் நிலைவெக்டர்கள் $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ முறையே $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்க.



BC -யின் நடுப்புள்ளி D.

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \dots\dots\dots(1)$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} \text{ என நிரூபிக்க.}$$

$$\text{LHS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a} \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{R.H.S.} = 2\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})$$

$$= 2\left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \vec{a}\right)$$

$$(1) = (2) \text{ லிருந்து}$$

$$= 2\left(\frac{\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a}}{2}\right) = \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a} \dots\dots\dots(2)$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} \text{ என்பது நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

Question 10.

ABC என்ற முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டுச் சந்தி G எனில், $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

ΔABC -யின் முனைப்புள்ளிகள் A,B,C-யின் நிலை

வெக்டர்கள் $\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}$ முறையே $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ என்க.

G என்பது ΔABC -யின் நடுக்கோட்டுச் சந்தி என்க.

$$\begin{aligned}\vec{OG} &= \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} \\ \Rightarrow \vec{OG} &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\end{aligned}$$

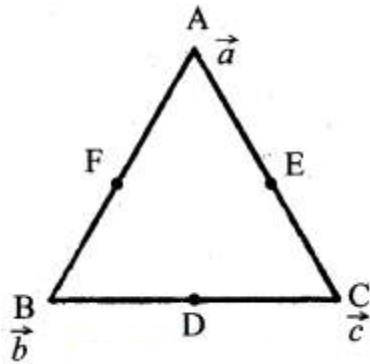
$$\begin{aligned}\therefore \text{L.H.S} &= \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} \\ &= \vec{OA} - \vec{OG} + \vec{OB} - \vec{OG} + \vec{OC} - \vec{OG} \\ &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 3\vec{OG} \\ &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - [\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}] \\ &= \vec{0} = \text{RHS}\end{aligned}$$

11.

A, B, C ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் மற்றும் D, E, F என்பவை BC, CA, AB ஆகியவற்றின் மையப்புள்ளிகள் எனில், $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{0}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$\triangle ABC$ -யின் முனைப்புள்ளிகள் A, B, C-யின் நிலை வெக்டர்கள் a, b, c என்க.



D, E, F என்பன $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ நடுப்புள்ளிகள்.

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0 \text{ என நிரூபிக்க}$$

$$\text{LHS} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$$

$$= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC}$$

$$= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} = \vec{a} + \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} - \vec{b} + \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} - \vec{c}$$

=

$$\frac{\cancel{\vec{b}} + \cancel{\vec{c}} - 2\cancel{\vec{a}} + \vec{a} + \cancel{\vec{c}} - 2\cancel{\vec{b}} + \vec{a} + \cancel{\vec{b}} - 2\cancel{\vec{c}}}{2}$$

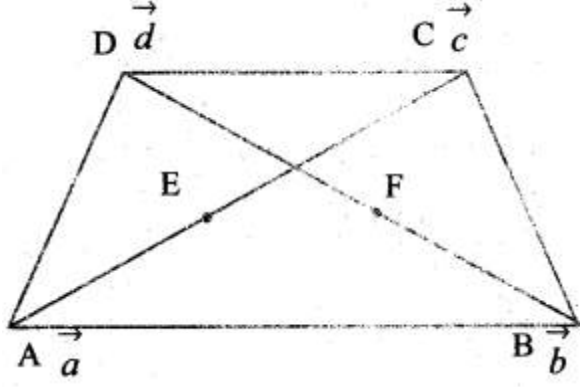
$$= \frac{\vec{0}}{2} = \vec{0} = \text{RHS. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

Question 11.

ABCD என்ற நாற்கரத்தில் AC, BD-ன் நடுப்புள்ளிகள் E மற்றும் F ஆக இருப்பின் $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

நாற்கரம் ABCD-யின் முனைப்புள்ளிகள் A, B, C, D-யின் நிலைவெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ என்க. E, F என்பன AC, BD-யின் நடுப்புள்ளிகள்.



$$\overrightarrow{OE} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2},$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$$

நிருபிக்க வேண்டியது :

$$\text{LHS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$$

$$= \vec{b} - \vec{a} + \vec{d} - \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} - \vec{c}$$

$$= -2\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c} + 2\vec{d}$$

$$= 2(\vec{b} + \vec{d}) - 2(\vec{a} + \vec{c})$$

$$= 2[(2\overrightarrow{OF}) - (2\overrightarrow{OE})]$$

$$= 2 \times 2 (\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE})$$

$$= 4.\overrightarrow{EF} = \text{RHS எனவே நிருபிக்கப்பட்டது.}$$

Ex 8.2

Question 1.

கீழ்க்காணும் விகிதங்களை திசைக் கொசைன்களாக கொண்டு ஒரு வெக்டர் அமையுமா என சரிபார்க்க.

$$(i) \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

$$(ii) \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$(iii) \frac{4}{3}, 0, \frac{3}{4}$$

தீர்வு :

(i) கொடுக்கப்பட்டுள்ள விகிதங்கள் $-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

$$l = \frac{1}{5}, m = \frac{3}{5}, n = \frac{4}{5}$$

$$\therefore l^2 + m^2 + n^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= \frac{1}{25} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{1+9+16}{25}$$

$$= \frac{26}{25} \neq 1$$

திசைக்கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 1 ஆக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட விகிதங்களை திசைக் கொசைன்களாகக் கொண்டு ஒரு வெக்டர் அமையாது.

$$(ii) l = \frac{1}{\sqrt{2}}, m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட விகிதங்களை திசைக் கொசைன்களாகக் கொண்டு ஒரு வெக்டர் அமையும்.

$$(iii) l = \frac{4}{3}, m = 0, n = \frac{3}{4}$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 0 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{16}{9} + 0 + \frac{9}{16}$$

$$= \frac{256+81}{144} = \frac{337}{144} \neq 0$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட விகிதங்களை திசைக்கொசைன் களாகக் கொண்டு ஒரு வெக்டர் அமையாது.

Question 2.

கொடுக்கப்பட்ட திசை விகிதங்களைக் கொண்ட ஒரு வெக்டரின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

(i) 1, 2, 3 (ii) 3, -1, 3 (iii) 0, 0, 7

தீர்வு :

(i) $x = 1, y = 2, z = 3$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \\ = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\therefore \text{திசைக் கொசைன்கள்} = \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$$

(ii) $x = 3, y = -1, z = 3$

$$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 3^2} \\ = \sqrt{9 + 1 + 9} = \sqrt{19}$$

$$\therefore \text{திசைக் கொசைன்கள்} = \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{-1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}$$

(iii) 0, 0, 7

$$x = 0, y = 0, z = 7$$

(ii) 0, 0, 7

$$x = 0, y = 0, z = 7$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 0 + 7^2} \\ = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{திசைக் கொசைன்கள்} = \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$$

$$= \frac{0}{7}, \frac{0}{7}, \frac{7}{7} = 0, 0, 1$$

Question 3.

கீழ்க்காணும் வெக்டர்களுக்குத் திசைக்கொசைன்கள், மற்றும் திசை விகிதங்களைக் காண்க.

(1) $3\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$

(ii) $3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

(iii) $\hat{j}$

(iv) $5\hat{i} - 3\hat{j} - 48\hat{k}$

(v) $3\hat{i} - 3\hat{k} + 4\hat{j}$

(vi) $\hat{i} - \hat{k}$

தீர்வு :

(i) $3\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ திசை விகிதங்கள் 3, -4, 8.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 8^2} \\ = \sqrt{9 + 16 + 64} = \sqrt{89}$$

திசைக்கொசைன்கள் $\frac{3}{\sqrt{89}}, \frac{-4}{\sqrt{89}}, \frac{8}{\sqrt{89}}$

(ii) $3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ திசைவிகிதங்கள் 3, 1, 1

$x = 3, y = 1, z = 1$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

திசைக்கொசைன்கள் $= \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}$

(iii) $\vec{j} = 0\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}$

திசைவிகிதங்கள் = 0, 1, 0.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

திசைக்கொசைன்கள் $= \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1} = 0, 1, 0$

(iv) $5\hat{i} - 3\hat{j} - 48\hat{k}$

திசை விகிதங்கள் 5, -3, -48,

$$r = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-48)^2} = \sqrt{25 + 9 + 2304} = \sqrt{2338}$$

திசைக்கொசைன்கள் $\frac{5}{\sqrt{2338}}, \frac{-3}{\sqrt{2338}}, \frac{-48}{\sqrt{2338}}$

(v) கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர் $\hat{k} - 3\hat{k} + 4\hat{j} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$

திசை விகிதங்கள் 3, 4, -3

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 9} = \sqrt{34}$$

திசைக்கொசைன்கள் $= \frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{4}{\sqrt{34}}, \frac{-3}{\sqrt{34}}$

(vi) கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர் $\hat{i} - \hat{k} = \hat{i} + 0\hat{j} - \hat{k}$

திசை விகிதங்கள் 1, 0, -1.

$$r = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

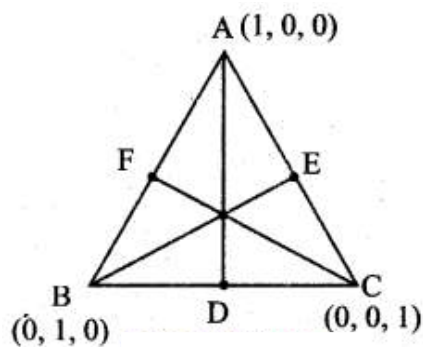
திசைக்கொசைன்கள் $= \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}$

Question 4.

புள்ளிகள் (1,0,0), (0,1,0) மற்றும் (0, 0,1) ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளின் திசைக்கொசைன்களைக் காண்க,

தீர்வு :

A, B, C என்பன $\triangle ABC$ -யின் மூன்று முனைப்புள்ளிகள் D, E, F என்பன மூன்று பக்கங்கள் BC, CA, AC-யின் நடுப்புள்ளிகள்.



$$\therefore D = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{0+0}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{0+1}{2} \right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$E = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

$$F = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

நடுக்கோடு $\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA}$

$$= \left(0\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k} \right) - \left(\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} \right) = -\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}$$

நடுக்கோடு $\vec{BE} = \vec{OE} - \vec{OB}$

$$= \left(\frac{1}{2}\hat{i} - 0\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k} \right) - \left(0\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k} \right) = \frac{1}{2}\hat{i} - \hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}$$

நடுக்கோடு $\vec{CF} = \vec{OF} - \vec{OC}$

$$= \left(\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 0\hat{k} \right) - \left(0\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k} \right) = \left(\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} - \hat{k} \right)$$

நடுக்கோடு AD-யின் திசைக்கொசைன்கள் $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4+1+1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ AD-யின் திசைக்கொசைன்கள்

$$= \frac{-1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$$

நடுக்கோடு BE-ன் திசைக்கொசைன்கள்

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{திசைக்கொசைன்கள் } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}, \frac{-1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$$

நடுக்கோடு CF

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{திசைக்கொசைன்கள் } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}, \frac{-1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

Question 5.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, a$ ஆகியவை ஒரு வெக்டரின் திசைக்கொசைன் களாயின் a -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்பது வெக்டர் என்க.

திசைக்கொசைன்கள் $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} = \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, a$

$\Rightarrow l = \frac{x}{r}, m = \frac{y}{r}, n = \frac{z}{r}$ என்க

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + a^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + a^2 = 1$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4-1-2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a = \pm \frac{1}{2}$$

Question 6.

$(a, a + b, a + b + c)$ என்பது $(1, 0, 0)$ மற்றும் $(0, 1, 0)$, ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் திசைவிகிதங்கள் எனில், a, b, c -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

(கொடுக்கப்பட்ட கோட்டை AB எனக் கொண்டால்)

$$= (0\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}) - (\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k})$$

$$= -\hat{i} + \hat{j} \text{ இங்கு } x = -1, y = 1, z = 0$$

$$\therefore \text{ திசை விகிதங்கள் } (-1, 1, 0) = (a, a + b, a + b + c)$$

$$a = -1, a + b = 1$$

$$\Rightarrow -1 + b = 1,$$

$$\Rightarrow b = 1 + 1 = 2$$

$$a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow -1 + 2 + c = 0$$

$$\Rightarrow c = 1 - 2 = -1$$

$\therefore (a, b, c) = (-1, 2, -1)$ கொடுக்கப்பட்ட கோடு BA என எடுத்துக் கொண்டால்

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

$$= (\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) - (0\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k})$$

$$= \hat{i} - \hat{j} \text{ இங்கு } x = 1, y = -1, z = 0$$

$$\therefore \text{திசை விகிதங்கள் } (1, -1, 0) = (a, a + b, a + b + c)$$

$$a = 1, a + b = -1, 1 + b = -1$$

$$\Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow 1 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore a = 1, b = -2, c = 1$$

$$\therefore \text{திசைவிகிதங்கள் } (a, b, c) = (1, -2, 1)$$

Question 7.

$2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

Δ -ன் பக்கங்கள்

$$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k},$$

$$\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16 + 16} = \sqrt{41}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

$$|\vec{b}|^2 = (\sqrt{41})^2 = 41$$

$$|\vec{a}|^2 = (\sqrt{6})^2 = 6$$

$$|\vec{c}|^2 = (\sqrt{35})^2 = 35$$

∴, பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$$41 = 35 + 6 = 41$$

∴, கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

Question 8.

$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் இணை எனில், λ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$$

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ எனில்,

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

$$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k} = 3(\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + 3\hat{k}) \dots\dots\dots(1)$$

$$\vec{a} = 3(\hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{a} = 3\vec{b}$$

$$(1), (2) \text{ ஐ ஒப்பிட்டு } \lambda = \frac{2}{3}$$

Question 9.

கீழ்க்காணும் வெக்டர்கள் ஒரு தள வெக்டர்கள் எனக் காட்டுக.

(i) $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $-\hat{j} + 2\hat{k}$

(ii) $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - \hat{j}$, $7\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$.

தீர்வு:

$$(i) \vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}, \vec{c} = -\hat{j} + 2\hat{k}$$

$\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c}$ என எழுதலாம்.

$$\Rightarrow \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} = s(-2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) + t(0\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$
 கூறுகளை சமப்படுத்த

$$1 = -2s \Rightarrow -2s = 1 \dots\dots\dots(1)$$

$$-2 = 3s - t \Rightarrow 3s - t = -2 \dots\dots\dots(2)$$

$$3 = -4s + 2t \Rightarrow -4s + 2t = 3 \dots\dots\dots(3)$$

$$(1) \text{ லிருந்து, } s = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ லிருந்து } 3 \times -\frac{1}{2} - t = -2$$

$$-t = -2 + \frac{3}{2} = \frac{-4+3}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$s = -\frac{1}{2}, t = \frac{1}{2} \text{ என (3) ல் பிரதியிட,}$$

$$-4(-\frac{1}{2}) + 2(\frac{1}{2}) = 2 + 1 = 3 = \text{RHS}$$

∴ ஒரு வெக்டரை மற்ற இரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக எழுதலாம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரு தளத்தில் அமையும் வெக்டர்களாகும்.

$$(ii) \text{ Let } \vec{a} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} - \hat{j}$$

$$\vec{c} = 7\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c} \text{ என்க.}$$

இங்கு மற்றும் t திசையிலிகள்

$$\Rightarrow 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} = s(\hat{i} - \hat{j}) + t(7\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\Rightarrow 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} = \hat{i}(s + 7t) + \hat{j}(-s + 3t) + \hat{k}(2t)$$

ஒத்த உறுப்புகளை ஒப்பிட கிடைப்பது

$$2 = s + 7t \dots\dots\dots(1)$$

$$3 = -s + 3t \dots\dots\dots(2)$$

$$1 = 2t \dots\dots\dots(3)$$

S மற்றும் t - ன் மதிப்புகளை காண, (2) மற்றும் (3) ஐ தீர்க்க

3) லிருந்து, $t = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{2}$ (2)- ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$$3 = -s + 3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 3 = -s + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow s = \frac{3}{2} - 3 = \frac{3-6}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}, s = -\frac{3}{2}$$

$t = \frac{1}{2}$ மற்றும் $s = -\frac{3}{2}$ என (1)ல் பிரதியிட கிடைப்பது

$$\Rightarrow 2 = -\frac{3}{2} + 7\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2 = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{-3+7}{2}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{4}{2} \Rightarrow 2 = 2$$

$\therefore$ S மற்றும் 1-ன் மதிப்புகள் சமன்பாடு (1) ஐ நிறைவு செய்கிறது.

$\therefore$ ஒரு வெக்டரானது மற்ற இரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச்

சேர்க்கையாக எழுதலாம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள்

ஒரு தள

வெக்டர்களாகும்.

Question 10.

$4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$, $-\vec{j} - \vec{k}$, $3\vec{i} + 9\vec{j} + 4\vec{k}$ மற்றும் $-4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ ஆகியவற்றை

நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரு தள

அமைவன் எனக்காட்டுக.

நீர்வு :

$$\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = -\hat{j} - \hat{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\overrightarrow{OD} = -4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k} \text{ எனக்}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (-\hat{j} - \hat{k}) - (4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k})$$

$$= -\hat{j} - \hat{k} - 4\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{a} = -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

$$= 3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k} - 4\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$$

$$= -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$$

$$= -4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k} - (4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k})$$

$$= -8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c} \text{ எனக்}$$

இருபுறமும் கூறுகளை சமப்படுத்த

$$-4 = -s - 8t \dots\dots\dots(1)$$

$$-6 = 4s - t \dots\dots\dots(2)$$

$$-2 = 3s + 3t \dots\dots\dots(3)$$

$$(1) \times 4 \Rightarrow -4s - 32t = -16$$

$$(2) \Rightarrow \underline{4s - t = -6}$$

$$\swarrow 33t = \swarrow 22$$

$$t = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$$

$$t = \frac{2}{3} \text{ என (1)-ல் பிரதியிட}$$

$$-s - 8 \times \frac{2}{3} = -4$$

$$-s - \frac{16}{3} = -4$$

$$s = 4 - \frac{16}{3} = \frac{12-16}{3} \Rightarrow s = -\frac{4}{3}$$

$$t = \frac{2}{3}, s = -\frac{4}{3} \text{ என (3) ல் பிரதியிட,}$$

$$38 + 3t = 3 \times -\frac{4}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = -4 + 2 = -2$$

∴ மூன்றாம் சமன்பாடு நிறைவு பெறுகிறது. ஆகவே ஒரு வெக்டரை மற்ற இரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்கையாக எழுதலாம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரு தள அமைவன ஆகும்.

Question 11.

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}, \vec{c} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

எனில், கீழ்க்காணும் வெக்டர், களில் எண்ணளவையும் திசைக் கொசைன்களையும் காண்க.

$$(i) \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad (ii) 3\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}$$

தீர்வு :

$$(i) \vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$$

$$\vec{c} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) + (3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}) + (-3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 1 + 36}$$

$$\text{எண்ண எவு} = \sqrt{41}$$

$$\text{திசைக்கொசைன்கள்} = \frac{2}{\sqrt{41}}, \frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{-6}{\sqrt{41}}$$

$$(ii) 3\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c} = 3(2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) - 2(3\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}) + 5(-3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 6\hat{i} + 9\hat{j} - 12\hat{k} - 6\hat{i} + 8\hat{j} + 10\hat{k} - 15\hat{i} + 10\hat{j} + 15\hat{k} = -15\hat{i} + 27\hat{j} + 13\hat{k}$$

$$|3\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}| = \sqrt{(-15)^2 + 27^2 + 13^2}$$

$$= \sqrt{225 + 729 + 169}$$

$$\text{எண்ண எவு} = \sqrt{1123}$$

$$\text{திசைக்கொசைன்கள்} = \frac{-15}{\sqrt{1123}}, \frac{27}{\sqrt{1123}}, \frac{13}{\sqrt{1123}}$$

Question 12.

$\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ மற்றும் $-2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}$ ஆகியவை ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் எனில், அந்த முக்கோணத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{OB} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\vec{OC} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$= (3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{4 + 36 + 4} = \sqrt{44}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\
&= (-2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}) - (3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}) = -5\hat{i} + 7\hat{j} - 12\hat{k} \\
|\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{(-5)^2 + 7^2 + (-12)^2} \\
&= \sqrt{25 + 49 + 144} = \sqrt{218}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} \\
&= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} - (-2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}) \\
&= 3\hat{i} - \hat{j} + 10\hat{k} \\
|\overrightarrow{CA}| &= \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (10)^2} \\
&= \sqrt{9 + 1 + 100} = \sqrt{110} \\
\Delta\text{-யின் சுற்றளவு} &= |AB| + |BC| + |CA| \\
&= (\sqrt{44} + \sqrt{218} + \sqrt{110}) \text{ அலகுகள்}
\end{aligned}$$

Question 13.

$\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$, மற்றும் $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ எனில், $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான அலகு வெக்டரைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = 3(3\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}) - 2(-2\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) + 4(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$= 9\hat{i} - 3\hat{j} - 12\hat{k} + 4\hat{i} - 8\hat{j} + 6\hat{k} + 4\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$= 17\hat{i} - 3\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$|3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}| = \sqrt{17^2 + (-3)^2 + (-10)^2}$$

$$= \sqrt{289 + 9 + 100} = \sqrt{398}$$

$$\therefore 3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} \text{ என்ற வெக்டருக்கு இணையான அலகு வெக்டர் } \frac{1}{\sqrt{398}} (17\hat{i} - 3\hat{j} - 10\hat{k})$$

Question 14.

மூன்று புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

ஆகியவை $2\vec{a} - 7\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$ என்ற நிபந்தனையை நிறைவு செய்தால் அப்புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையுமா எனக் கூறுக.

தீர்வு :

மூன்று புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

என்க.

$$2\vec{a} - 7\vec{b} + 5\vec{c} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2\vec{a} + 5\vec{c} = 7\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{b} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{b} = s\vec{a} + t\vec{c}$$

$$b = sa + tc$$

$\therefore \vec{b}$ ஆனது இரு வேறு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக எழுத முடியும் என்பதால் அவை ஒரே கோட்டில் அமையும்.

Question 15.

P, Q, R, S என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$, $(2\hat{i} + 5\hat{j})$, $(3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$, மற்றும் $(\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k})$ எனில், PQ மற்றும் RS ஆகியவை இணை எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

$$\vec{OP} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{OQ} = 2\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\vec{OR} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{OS} = \hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

$$= 2\hat{i} + 5\hat{j} - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = \hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} \\
&= \hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k} - (3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \\
&= -2\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k} \\
&= -2(\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}) \\
&= -2\overrightarrow{PQ} \\
\therefore \overrightarrow{PQ} &\parallel \overrightarrow{RS} \\
\therefore \overrightarrow{RS} &= \lambda \overrightarrow{PQ} \\
\lambda &= -2
\end{aligned}$$

Question 16.

$m(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ ஓர் அலகு வெக்டராயின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= m(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \text{ என்க.} \\
|\vec{a}| &= m\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = m\sqrt{3} \\
\vec{a} \text{ ஓர் அலகு வெக்டராயின் } |\vec{a}| &= \pm 1 \\
m\sqrt{3} &= \pm 1 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Question 17.

A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) மற்றும் C(2, -1, 1) ஆகிய புள்ளிகள் ஓர் இரு சமபக்க முக்கோலத்தின் முனைப்புள்ளிகள் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$A(1, 1, 1) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$B(1, 2, 3) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$C(2, -1, 1) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

$$= \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$= (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

$$= (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$= -\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|AB| = |CA| = \sqrt{5}$$

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஓர் இருசமபக்க Δ -ன் முனைப்புள்ளிகள் ஆகும்.

Ex 8.3

Question 1.

கீழ்க்காணும் $\vec{a}, \vec{b}$ க்கு $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ஐக் காண்க.

(i) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

தீர்வு :

(i) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{b} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= 1 \times 3 + (-2 \times -4) + 1(-2)$$

$$= 3 + 8 - 2 = 9$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 9$$

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$$\vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 2 \times 6 + 2 \times -3 + (-1) \times 2$$

$$= 12 - 6 - 2$$

Question 2.

கீழ்க்காணும் வெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவை செங்குத்து எனில், λ ன் மதிப்பைக்

காண்க. (i) $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$

தீர்வு :

(i) $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 2 \times 1 + \lambda \times -2 + 1 \times -3$$

$$= 2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$= 2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$\vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவை செங்குத்து வெக்டர்கள் எனில் $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\therefore 5 - 2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -2\lambda = -5$$

$$\lambda = \frac{5}{2}$$

$$(ii) \vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k})$$

$$= 2 \times 3 + 4 \times -2 + (-1) \times \lambda$$

$$= 6 - 8 - 1 = -2 - \lambda$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ எனில்

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow -2 - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda = 2$$

$$\Rightarrow \lambda = -2$$

Question 3.

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 15$, மற்றும் $\vec{a} \cdot \vec{b} = 75\sqrt{2}$ எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ நாக்கு இடைப் பட்டக் கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$$|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 15$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 75\sqrt{2}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம்.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

=

$$\frac{7\sqrt{2}}{10 \cdot 10}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

Question 4.

கீழ்க்காணும் வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க

(i) $2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ மற்றும் $6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

(ii) $\hat{i} - \hat{j}$ மற்றும் $\hat{j} - \hat{k}$

தீர்வு :

(i) $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ என்க.

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\vec{b} = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7 \text{ என்க.}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 2 \times 6 + 3 \times -3 + (-6) \times 2$$

$$= 12 - 9 - 12 = -9$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-9}{7 \times 7} = \frac{-9}{49}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-9}{49} \right)$$

$$(ii) \vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{b} = \hat{j} - \hat{k}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\hat{i} - \hat{j}) \cdot (\hat{j} - \hat{k})$$

$$= (1 \times 0) + (-1 \times 1) + (0 \times -1) = -1$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

Question 5.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ எனும் மூன்று வெக்டர்களுக்கு $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ மற்றும் $|\vec{c}| = 7$ எனில், $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ மக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ மூன்று வெக்டர்கள்

$$\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 7$$

$\vec{a}, \vec{b}$ வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$\vec{a} + 2\vec{b} = -\vec{c}$$

$$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |-\vec{c}|^2$$

$$|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4(\vec{a} \cdot 2\vec{b}) = |\vec{c}|^2$$

$$3^2 + 4 \times 4^2 + 4(\vec{a} \cdot 2\vec{b}) = 49$$

$$9 + 64 + 4(\vec{a} \cdot 2\vec{b}) = 49$$

$$4(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 49 - 73$$

$$4(\vec{a} \cdot \vec{b}) = -24$$

$$4 |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = -24$$

$$4 \times 3 \times 4 \cos \theta = -24$$

$$\cos \theta = \frac{\cancel{2} \cancel{6} \cancel{24}}{\cancel{4} (\cancel{3}) (\cancel{4})^2}$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta = \cos(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$\cos \theta = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

Question 6.

$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{b} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$\vec{b} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{c} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \cdot (6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

$$= 2 \times 6 + 3 \times 2 + 6 \times -3$$

$$= 12 + 6 - 18 = 0 \therefore \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= 6 \times 3 + 2 \times -6 + (-3 \times 2)$$

$$= 18 - 12 - 6$$

$$= 18 - 18 = 0 \therefore \vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

$$= 3 \times 2 + (-6 \times 3) + 2 \times 6$$

$$= 6 - 18 + 12$$

$$= 18 - 18 = 0 \therefore \vec{c} \perp \vec{a}$$

$\therefore \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து ஆகும்.

Question 7.

$-\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$, $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ மற்றும் $-\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக. தீர்வு :

$$\vec{a} = -\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} \\ = \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}$$

$$\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\vec{c} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

$$41 = 14 + 27$$

$$41 = 14 + 27$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும்.

Question 8.

$|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $|\vec{c}| = 7$ மற்றும் $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ எனில், $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ ஐக் காண்க .
தீர்வு :

$$|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, |\vec{c}| = 7$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 2(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 2(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$= 25 + 36 + 49 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$\Rightarrow 110 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$\Rightarrow 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = -110$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -55$$

Question 9.

(2, -1, 3), (4, 3, 1) மற்றும் (3, 1, 2) ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே கோடமைப்புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

A(2, -1, 3), B(4, 3, 1), C(3, 1, 2) என்க.

$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$= (3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) - (4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$

$$= -\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

$$= (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= -\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{CA} = -2 \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB} = -2 \overrightarrow{BC}$$

∴ A, B, C ஒரே கோடமைப்புள்ளிகள் ஆகும்.

Question 10.

$\vec{a}, \vec{b}$ ஆகியவை அலகு வெக்டர்கள் மற்றும் 6 என்பது இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில்,

(i) $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a} - \vec{b}|$

(ii) $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a} + \vec{b}|$

(iii) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{|\vec{a}+\vec{b}|}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a} - \vec{b}|$$

$\vec{a}, \vec{b}$ என்பன அலகு வெக்டர்கள் அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

$$|\vec{a} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{a}| \cos \theta$$

$$= 1 + 1 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$$

$$= 2 - 2 \cos \theta = 2(1 - \cos \theta)$$

$$= 2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a} - \vec{b}|$$

(ii) $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a} + \vec{b}|$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$$

$$= 2 + 2 \cos \theta = 2(1 + \cos \theta)$$

$$= 2(2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} |\vec{a} + \vec{b}|$$

(iii) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{|\vec{a}+\vec{b}|}$

$$\text{LHS} = \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{1}{2} |\vec{a}-\vec{b}|}{\frac{1}{2} |\vec{a}+\vec{b}|}$$

$$= \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \text{RHS.}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 11.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்ற மூன்று வெக்டர்கள் $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$ மற்றும் ஒவ்வொரு வெக்டரும் மற்ற இரு வெக்டர்களின் கூடுதலுக்குச் செங்குத்தாகவும் அமைத்தால் $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$$

($\therefore$ அவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

அவற்றை கூட்ட,

$$2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$= 9 + 16 + 25 + 2(0) = 50$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

Question 12.

$2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ -ன் மீது $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ -ன் விழலைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= 2 + 18 + 21 = 41$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

$$\vec{b} \text{ -யின் மீது } \vec{a} \text{ -ன் வீழல்} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{41}{7}$$

Question 13.

$\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$ -ன் மீது $\vec{a} = \lambda\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ -ன் வீழல் 4 அலகுகள் எனில், λ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = \lambda\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{b} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\lambda + 6 + 12 = 2\lambda + 18$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

$\vec{b}$ -ஐன் மீது $\vec{b}$ -என் வீழல் = 4 எனில்

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = 4$$

$$\frac{18+2\lambda}{7} = 4$$

$$\Rightarrow 18 + 2\lambda = 28$$

$$2\lambda = 28 - 18 = 10$$

$$\lambda = 5$$

Question 14.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ மற்றும் 3 ஆகியவை $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 4$ மற்றும் $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ எனுமாறு அமைந்தால் $4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{b} \cdot \vec{c} + 3\vec{c} \cdot \vec{a}$ -ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 4$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{c}|^2 \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{b}) + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{c}|^2$$

$$\Rightarrow 2^2 + 3^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 16$$

$$\Rightarrow 13 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 16$$

$$\Rightarrow 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 16 - 13 = 3$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 4 \times \frac{3}{2} = 6 \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{இதைப் போலவே } |\vec{b} + \vec{c}|^2 = |-\vec{a}|^2$$

$$|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{b} \cdot \vec{c}) = |\vec{a}|^2$$

$$9 + 16 + 2(\vec{b} \cdot \vec{c}) = 4$$

$$25 + 2(\vec{b} \cdot \vec{c}) = 4$$

$$2(\vec{b} \cdot \vec{c}) = 4 - 25 = -21$$

$$(\vec{b} \cdot \vec{c}) = -\frac{21}{2}$$

$$3(\vec{b} \cdot \vec{c}) = 3\left(-\frac{21}{2}\right) = -\frac{63}{2} \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{இதைப் போலவே } \vec{c} \cdot \vec{a} = -\vec{b}$$

$$|\vec{c} + \vec{a}| = |-\vec{b}|$$

$$|\vec{c} + \vec{a}|^2 = |-\vec{b}|^2$$

$$|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + 2(\vec{c} \cdot \vec{a}) = |\vec{b}|^2$$

$$16 + 4 + 2(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 9$$

$$20 + 2(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 9$$

$$2(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 9 - 20 = -11$$

$$(\vec{c} \cdot \vec{a}) = \frac{-11}{2}$$

$$\therefore 3(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 3\left(\frac{-11}{2}\right) = \frac{-33}{2} \dots\dots\dots(3)$$

$$(1) + (2) + (3)$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{b} \cdot \vec{c} + 3\vec{c} \cdot \vec{a} = 6 - \frac{63}{2} - \frac{33}{2}$$

$$= \frac{12-63-33}{2} = \frac{12-96}{2} = \frac{-84}{2} = -42$$

Ex 8.4

Question 1.

$\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ எனில் $\vec{a} \times \vec{b}$ - ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) \times (3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-2 - 15) - \hat{j}(-4 - 9) + \hat{k}(10 - 3)$$

$$= -17\hat{i} + 13\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-17)^2 + 13^2 + 7^2}$$

$$= \sqrt{289 + 169 + 49} = \sqrt{507}$$

Question 2.

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = 0$ எனக் காட்டுக.

தாவு:

$$\text{LHS} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$$

=

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c} = 0$$

= RHS : எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 3.

$\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ என்ற வெக்டர்கள் உள்ள தளத்திற்கு செங்குத்தாகவும் எண்ணளவு $10\sqrt{3}$ உடைய அலகு

வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ வெக்டர் தளத்திற்கு செங்குத்தாக உள்ள அலகு

$$\text{வெக்டர்} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(8 - 3) - \hat{j}(4 - 1) + \hat{k}(3 - 2)$$

$$= 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{25 + 9 + 1} = \sqrt{35}$$

$\therefore 10\sqrt{3}$ எண்ணளவு கொண்ட அலகு வெக்டர்

$$= \pm 10\sqrt{3} \left(\frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{35}} \right)$$

Question 4.

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ எனில், $\vec{a} + \vec{b}$ மற்றும் $\vec{a} - \vec{b}$, ஆகியவற்றிற்கு தனித்தனியாக

செங்குத்தாக உள்ள வெக்டர்களைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\therefore \vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = -\hat{j} - 2\hat{k}$$

$(\vec{a} + \vec{b}), (\vec{a} - \vec{b})$ இவற்றிற்கு செங்குத்தான அலகு வெக்டர் காண

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-6 + 4) - \hat{j}(-4 + 0) + \hat{k}(-2 + 0)$$

$$= \hat{i}(-2) + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$= -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\text{இதன் எண்ணளவு} = (\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-2)^2})$$

$$= \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24}$$

$$= \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore \text{செங்குத்து அலகு வெக்டர்} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})}{|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|}$$

$$\text{செங்குத்து அலகு வெக்டர்} = \pm \frac{1}{2\sqrt{6}} (-2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k})$$

$$= \pm \frac{2(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})}{2\sqrt{6}} = \pm \frac{(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})}{\sqrt{6}}$$

Question 5.

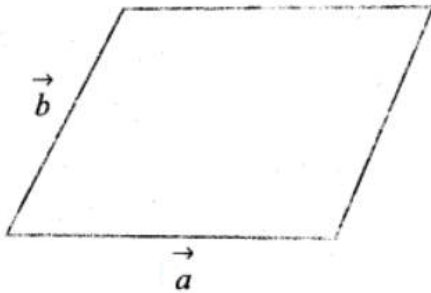
$\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ மற்றும் $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ஆகியவற்றை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
&= \hat{i}(2 + 6) - \hat{j}(1 - 9) + \hat{k}(-2 - 6) \\
&= \hat{i}(8) - \hat{j}(-8) + \hat{k}(-8) \\
&= 8\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k} \\
&= 8(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \\
|\vec{a} \times \vec{b}| &= 8\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = 8\sqrt{3}
\end{aligned}$$

இணைகரத்தின் பரப்பு = $|\vec{a} \times \vec{b}| = 8\sqrt{3}$ ச.அலகுகள்.

Question 6.

A(3, -1, 2), B(1, -1, -3) மற்றும் C(4, -3, 1) ஆகியவற்றை உச்சிப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு :

A(3, -1, 2), B(1, -1, -3), C(4, -3, 1) என்பன ΔABC -யின் மூன்று உச்சிகள்

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\begin{aligned}
&= (\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) - (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \\
&= -2\hat{i} - 5\hat{k}
\end{aligned}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$$

$$\begin{aligned}
&= (4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) - (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \\
&= \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}
\end{aligned}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-10) - \hat{j}(2 + 5) + \hat{k}(4)$$

$$= -10\hat{i} - 7\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-10)^2 + (-7)^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{100 + 49 + 16} = \sqrt{165}$$

$$\therefore \text{தேவையான பரப்பு} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{165} \text{ ச. அலகுகள்.}$$

Question 7.

முக்கோணம் ABC ன் உச்சிப்புள்ளிகள் A, B, C -ன் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ எனில், முக்கோணம் ABC-ன் பரப்பளவு $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}|$ நிரூபித்து, இதிலிருந்து A, B, C ஆகியவை ஒரே நேர்க்கோட்டிலமைய நிபந்தனையைக் காண்க.

தீர்வு :

$\triangle ABC$ யின் உச்சிகளின் நிலைவெக்டர்கள் $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$\therefore \vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AB} \times \vec{AC} &= (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{a} \\ &= \vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{0} \end{aligned}$$

$$(\because \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}, \vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}), \vec{a} \times \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}))$$

$$\begin{aligned} |\vec{AB} \times \vec{AC}| &= \\ |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC \text{ -யின் பரப்பு} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ &= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}| \end{aligned}$$

A, B, C ஒரு கோடமைப்புள்ளிகளாக இருக்க நிபந்தனை Δ -ன் பரப்பு = 0
 $\therefore \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}| = 0$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}| = 0$ இதுவே A, B, C ஒரே கோட்டிலமையதற்கான நிபந்தனை ஆகும்.

Question 8.

எந்த ஒரு வெக்டர் 4-க்கும்

$|\vec{a} \times \hat{i}|^2 |\vec{a} \times \hat{j}|^2 |\vec{a} \times \hat{k}|^2 = 2|\vec{a}|^2$ என நிரூபிக்க
கீர்வு :

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \hat{i} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times \hat{i}$$

$$= a_2(\hat{j} \times \hat{i}) + a_3(\hat{k} \times \hat{i})$$

$$= a_2(-\hat{k}) + a_3\hat{j} = a_3\hat{j} - a_2\hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \hat{i}| = \sqrt{a_3^2 + (-a_2)^2} = \sqrt{a_3^2 + a_2^2}$$

$$= \sqrt{a_3^2 + (-a_2)^2} = \sqrt{a_3^2 + a_2^2}$$

$$\therefore |\vec{a} \times \hat{i}|^2 = a_3^2 + a_2^2 \dots\dots\dots(1)$$

$$\vec{a} \times \hat{j} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times \hat{j}$$

$$= a_1(\hat{i} \times \hat{j}) + a_2(\hat{j} \times \hat{j}) + a_3(\hat{k} \times \hat{j})$$

$$= a_1\hat{k} + a_2(0) + a_3(-\hat{i})$$

$$= a_1\hat{k} - a_3\hat{i}$$

$$|\vec{a} \times \hat{j}| = \sqrt{a_1^2 + a_3^2}$$

$$\therefore |\vec{a} \times \hat{j}|^2 = a_1^2 + a_3^2 \dots\dots\dots(2)$$

$$\vec{a} \times \hat{k} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times \hat{k}$$

$$= a_1(\hat{i} \times \hat{k}) + a_2(\hat{j} \times \hat{k}) + a_3(\hat{k} \times \hat{k})$$

$$= -a_1\hat{j} + a_2\hat{i} + a_3(0)$$

$$|\vec{a} \times \hat{k}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\therefore |\vec{a} \times \hat{k}|^2 = a_1^2 + a_2^2 \dots\dots\dots(3)$$

$$\begin{aligned}
(1), (2), (3) & |\vec{a} \times \hat{i}|^2 |\vec{a} \times \hat{j}|^2 |\vec{a} \times \hat{k}|^2 \\
&= a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_3^2 + a_1^2 + a_2^2 \\
&= 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \\
&= 2(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}) = 2|\vec{a}|^2 \\
&= \text{RHS. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
\end{aligned}$$

Question 9.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்ற அலகுவெக்டர்களுக்கு $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ மற்றும் ந $\vec{b}$ -க்கும் $\vec{c}$ -க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{3}$ எனில், $\vec{a} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}(\vec{b} \times \vec{c})$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன அலகு வெக்டர்கள்.

$$\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

மற்றும் $\vec{b}, \vec{c}$ வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{3}$ எனில்

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}$ ஆனது $\vec{b}$ நக்கும் (க்கும் செங்குத்து

$\vec{a}$ ஆனது $\vec{b} \times \vec{c}$ க்கு செங்குத்து எனில்

$$\Rightarrow \vec{a} = \lambda (\vec{b} \times \vec{c}) \quad (\because \lambda \text{ ஒரு எண்ணை ளவு})$$

$$\therefore |\vec{a}|^2 = \lambda^2 |\vec{b} \times \vec{c}|^2$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b} \times \vec{c} \dots\dots\dots(1)$$

$$\Rightarrow 1 = \lambda^2 [|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2]$$

$$[\because |\vec{a}| = 1, |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2]$$

$$\Rightarrow 1 = \lambda^2 [(1)(1) - |\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 \cos^2 \frac{\pi}{3}]$$

$$[\because \vec{b}, \vec{c} \text{ க்கு இடைப்பட்ட கோணம் } \frac{\pi}{3}]$$

$$\Rightarrow 1 = \lambda^2[1 - \cos^2 \frac{\pi}{3}]$$

$$\Rightarrow 1 = \lambda^2(1 - (\frac{1}{2})^2)$$

$$\Rightarrow 1 = \lambda^2(\frac{3}{4})$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ என (1)-ல் பிரதியிட}$$

$$\vec{a} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} (\vec{b} \times \vec{c})$$

எனவே நிருபிக்கப்பட்டது.

Question 10.

$2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ஆகிய வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தை வெக்டர் பெருக்கத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு :

$$\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ வெக்டர்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ வைக் காண

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(1 + 2) - \hat{j}(2 + 1) + \hat{k}(4 - 1)$$

$$= 3\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k} = 3(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\sin \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

Ex 8.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

Question 1.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$ என்பது

(1) $\overrightarrow{AB}$

(2) $\overrightarrow{CA}$

(3) $\vec{0}$

(4) $-\overrightarrow{AD}$

குறிப்பு :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

விடை:

(3) $\vec{0}$

Question 2.

$\vec{a} + 2\vec{b}$ மற்றும் $3\vec{a} + m\vec{b}$ ஆகியவை இணை எனில், m -ன் மதிப்பு

(1) 3

(2) $\frac{1}{3}$

3) 6

(4) $\frac{1}{6}$

குறிப்பு :

$$\vec{a} + 2\vec{b} = 3(\vec{a} + 2\vec{b}) \quad (\because \text{அவை இணை})$$

$$= 3\vec{a} + 6\vec{b} \dots\dots\dots(1)$$

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \parallel 3\vec{a} + m\vec{b} \dots\dots\dots(2)$$

(1), (2) ஐ ஒப்பிட $m = 6$

விடை :

(3) 6

Question 3.

$\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ மற்றும் $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்களின் கூடுதலுக்கு இணையாக உள்ள அலகு வெக்டர்

(1) $\frac{\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{5}}$

(2) $\frac{2\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{5}}$

(3) $\frac{2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{5}}$

(4) $\frac{2\hat{i} - \hat{j}}{\sqrt{5}}$

குறிப்பு:

$$(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + (\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) = 2\hat{i} - \hat{j}$$

$$\text{எண்ணளவு} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \text{தேவையான அலகு வெக்டர்} = \frac{2\hat{i} - \hat{j}}{\sqrt{5}}$$

விடை :

(4) $\frac{2\hat{i} - \hat{j}}{\sqrt{5}}$

Question 4.

ஒரு வெக்டர் $\vec{OP}$ ஆனது x மற்றும் y அச்சுகளின் மிகைத் திசையில் முறையே 60° மற்றும் 45° -ஐ ஏற்படுத்துகின்றது. $\vec{OP}$ ஆனது -அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம்.

(1) 45°

(2) 60°

(3) 90°

(4) 30°

குறிப்பு :

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ \text{ என்க.}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \gamma = \frac{4-1-2}{4} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos^2 \gamma = \cos^2 60^\circ$$

$$\therefore \gamma = 60$$

விடை :

(2) 60°

Question 5.

$\vec{BA} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ மற்றும் B-ன் நிலை வெக்டர் $\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ எனில் A-ன் நிலைவெக்டர்.

(1) $4\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

(2) $4\hat{i} + 5\hat{j}$

(3) $4\hat{i}$

(4) $-4\hat{i}$

குறிப்பு :

$$\vec{BA} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{OA} - \vec{OB} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{OA} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \vec{OB}$$

$$= (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + (\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$$

$$= 4\hat{i} + 5\hat{j}$$

விடை :

(2) $4\hat{i} + 5\hat{j}$

Question 6.

ஒரு வெக்டர் ஆய அச்சகளுடன் சமகோணத்தை ஏற்படுத்தினால் அக்கோணம்

(1) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

(2) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

(3) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$(4) \cos^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

குறிப்பு :

$$\alpha = \beta = \gamma$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow 3 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

விடை:

$$(3) \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Question 7.

$\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ ஆகிய வெக்டர்கள்

(1) ஒன்றுக்கொன்று இணையானது

(2) அலகு வெக்டர்கள்

(3) செங்குத்தான வெக்டர்கள்

(4) ஒருதள வெக்டர்கள்

குறிப்பு :

கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியம்.

(விடை :

(4) ஒருதள வெக்டர்கள்

Question 8.

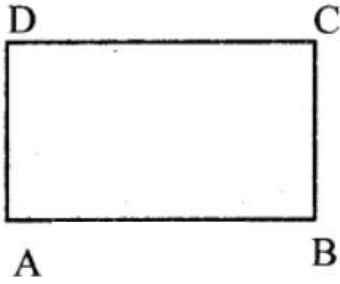
ABCD ஓர் இணைகரம் எனில், என்பது $-\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD}$

(1) $2(\vec{AB} + \vec{AD})$

(2) $4\vec{AC}$

(3) $4\vec{BD}$

(4) $\vec{0}$



குறிப்பு :

$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AD} - \vec{AB} = \vec{0}$$

விடை :

(4) $\vec{0}$

Question 9.

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -ஐ அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரம் ABCD-ன் ஒரு மூலைவிட்டம் $\vec{a} + \vec{b}$ எனில் மற்றொரு மூலைவிட்டம் $\vec{BD}$ ஆனது.

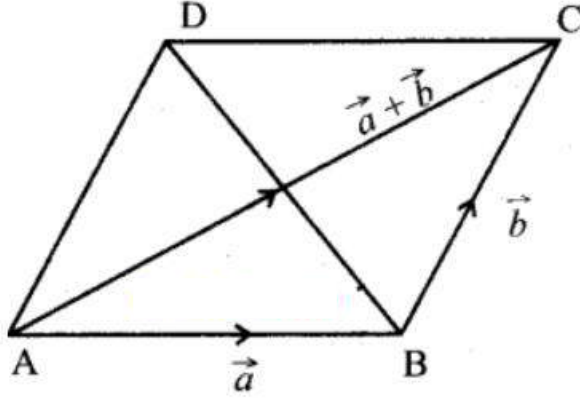
(1) $\vec{a} - \vec{b}$

(2) $\vec{b} - \vec{a}$

(3) $\vec{a} + \vec{b}$

(4) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

குறிப்பு :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \vec{b} + (-\vec{a}) \\ &= \vec{b} - \vec{a}\end{aligned}$$

விடை :

(2) $\vec{b} - \vec{a}$

Question 10.

A, B-ன் நிலை வெக்டர்கள் $\vec{a}, \vec{b}$ எனில், கீழ்க்காணும் நிலை வெக்டர்களில் எந்த நிலை வெக்டரின் புள்ளி A B, என்ற கோட்டின் மீது அமையும்.

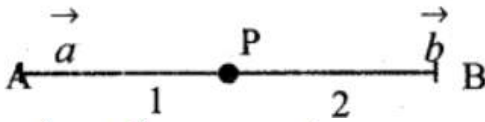
(1) $\vec{a} + \vec{b}$

(2) $\frac{2\vec{a}-\vec{b}}{2}$

(3) $\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

(4) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{3}$

குறிப்பு :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1(\vec{b})+2(\vec{a})}{1+2} = \frac{\vec{b}+2\vec{a}}{3} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OP} &= \frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\end{aligned}$$

விடை :

(3) $\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

Question 11.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ஆகியவை ஒரே கோட்டிலமைந்த மூன்று புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் எனில் கீழ்க்காண்பவைகளுள் எது சரியானது?

(1) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

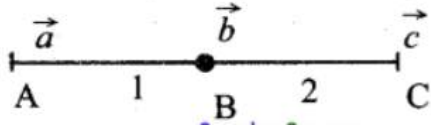
(2) $2\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

(3) $\vec{b} = \vec{c} + \vec{a}$

(4) $4\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

குறிப்பு :

மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டிலமைவன என்பதால்



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{a} - \vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{b} + \vec{c} = 2\vec{a}$$

(விடை :

(2) $2\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

Question 12.

P என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\vec{r} = \frac{9\vec{a}+7\vec{b}}{16}$ என்க P ஆனது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -ஐ நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டைப் பிரிக்கும் விகிதம்

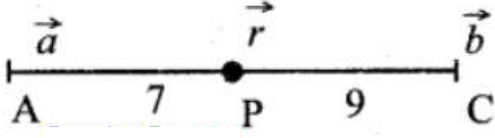
(1) 7 : 9 உட்புறமாக

(2) 9 : 7 உட்புறமாக

(3) 9 : 7 வெளிப்புறமாக

(4) 7 : 9 வெளிப்புறமாக

குறிப்பு:



$$\vec{r} = \frac{9\vec{a}+7\vec{b}}{9+7}$$

$$\vec{r} = \frac{9\vec{a}+7\vec{b}}{16}$$

விடை :

(1) 7 : 9 உட்புறமாக்

Question 13.

$\lambda\hat{i} + 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}$ என்பது ஓரலகு வெக்டர் எனில், λ -ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{1}{4}$

(3) $\frac{1}{9}$

(4) $\frac{1}{2}$

குறிப்பு :

$$|\lambda\hat{i} + 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}| = 1$$

$$\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda)^2 + (2\lambda)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{9\lambda^2} = 1$$

$$\Rightarrow 3\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

விடை :

(1) $\frac{1}{3}$

Question 14.

ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு முனைப்புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ மற்றும் $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$. மையக்கோடு சந்தியின் நிலை வெக்டர் $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ எனில், மூன்றாவது முனைப்புள்ளியின் நிலை வெக்டர்.

- (1) $-2\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$
- (2) $-2\hat{i} - \hat{j} - 6\hat{k}$
- (3) $2\hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}$
- (4) $-2\hat{i} + \hat{j} + 6\hat{k}$

குறிப்பு :

$$\vec{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\vec{OB} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

$$\Rightarrow 3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

$$\Rightarrow 3(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = (3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}) + (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$\Rightarrow \vec{OC} = 3(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (5\hat{i} - 7\hat{j})$$

$$= -2\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$$

விடை :

$$(1) -2\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$$

Question 15.

$|\vec{a} + \vec{b}| = 60$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 40$ மற்றும் $|\vec{b}| = 46$, எனில், $|\vec{a}|$ -ன் மதிப்பு

$$(1) 42$$

$$(2) 12$$

$$(3) 22$$

$$(4) 32$$

குறிப்பு :

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2[|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2]$$

$$60^2 + 40^2 = 2[|\vec{a}|^2 + 46^2]$$

$$3600 + 1600 = 2[|\vec{a}|^2 + 2116]$$

$$|\vec{a}|^2 + 2116 = \frac{5200}{2} = 2600$$

$$|\vec{a}|^2 = 2600 - 2116$$

$$|\vec{a}|^2 = 484$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{484} = 22$$

விடை :

(3) 22

Question 16.

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஒரே எண்ணளவைக் கொண்டுள்ளது. இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் 60° மற்றும் இவற்றின் திசையிலிப் பெருக்கம் $\frac{1}{2}$ எனில் $|\vec{a}|$ -என் மதிப்பு

(1) 2

(2) 3

(3) 7

(4) 1

குறிப்பு :

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|, \theta = 60^\circ, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\frac{1}{2} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 60$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = |\vec{a}|^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 = |\vec{a}|^2$$

$$\therefore |\vec{a}| = 1$$

விடை :

(4) 1

Question 17.

$\vec{a} = (\sin \theta)\hat{i} + (\cos \theta)\hat{j}$ மற்றும் $\vec{b} = \hat{i} - \sqrt{3}\hat{j} + 2\hat{k}$ ஆகியவை செங்குத்தாக அமைத்து $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ எனில், θ -ன் மதிப்பு

(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) $\frac{\pi}{6}$

(3) $\frac{\pi}{4}$

(4) $\frac{\pi}{2}$

குறிப்பு :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$[\sin \theta \hat{i} + (\cos \theta) \hat{j}] \cdot [\hat{i} - \sqrt{3} \hat{j} + 2 \hat{k}] = 0$$

$$\Rightarrow 1(\sin \theta) - \sqrt{3} \cos \theta + 2(0) = 0$$

$$\sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

விடை:

(1) $\frac{\pi}{3}$

Question 18.

$|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 5$ மற்றும் $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ$ எனில், $|\vec{a} \times \vec{b}|$ -ன் மதிப்பு

(1) 15

(2) 35

(3) 45

(4) 25

குறிப்பு :

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + 60^2 = 13^2 \times 5^2$$

$$|\vec{a} \vec{a}|^2 = 13 \times 13 \times 5 \times 5 - 3600$$

$$|\vec{a} \vec{a}|^2 = 169 \times 25 - 3600$$

$$= 4225 - 3600 = 625$$

$$|\vec{a} \vec{a}| = \sqrt{625} = 25$$

விடை :

(4) 25

Question 19.

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ந-க்கு இடைப்பட்ட கோணம் 120° $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ எனில், $[(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})]^2$ ன் மதிப்பு

(1) 225

(2) 275

(3) 325

(4) 300

குறிப்பு :

$$[(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})]^2$$

$$= [\vec{a} \times 3\vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + 3\vec{b} \times 3\vec{a} - 3\vec{b} \times \vec{b}]^2$$

$$= [0 - \vec{a} \times \vec{b} - 9\vec{a} \times \vec{b} - 0]^2$$

$$= [-10 \vec{a} \times \vec{b}]^2$$

$$= 100 |\vec{a} \times \vec{b}|^2$$

$$= 100 |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta$$

$$= 100 \times (1)^2 (2)^2 \sin^2 \theta$$

$$= 400 \sin(180 - 60)^2 = 400 (\sin 60)^2$$

$$= 400 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 400 \times \frac{3}{4} = 300$$

விடை :

(4) 300

Question 20.

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவற்றின் எண்ணளவு 2, மேலும் இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் 60° , எனில், மற்றும் $\vec{a} + \vec{b}$ க்கு இடைப்பட்ட கோணம்.

(1) 30°

(2) 60°

(3) 45°

(4) 90°

குறிப்பு :

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= 2^2 + 2^2 + 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ$$

$$= 4 + 4 + 2 \times 2 \times 2 \cos 60^\circ$$

$$= 8 + 8 \times \frac{1}{2} = 8 + 4 = 12$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் – எனில்

$\therefore$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b}}{2(2\sqrt{3})} \\ &= \frac{|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}}{4\sqrt{3}} = \frac{2^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta}{4\sqrt{3}} \\ &= \frac{4 + 2 \times 2 \times \frac{1}{2}}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$= \frac{4+2}{4\sqrt{3}} = \frac{6}{4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

விடை :

(1) 30°

Question 21.

$\hat{i} + 3\hat{j} + \lambda\hat{k}$ ன் மீது $5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ ன் விழலும் $5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ -ன் மீது $\hat{i} + 3\hat{j} + \lambda\hat{k}$ வீழலும் சமம் எனில், λ -ன் மதிப்பு

(1) ± 4

(2) ± 3

(3) ± 5

(4) ± 1

குறிப்பு :

$$\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + \lambda\hat{k}$$

$$\vec{c} = \hat{i} + 3\hat{j} + \lambda\hat{k}$$

$$\vec{d} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$$

$\vec{b}$ நான் மீது $\vec{a}$ -என் வீழலும், $\vec{d}$ -என் மீது $\vec{c}$ -என் வீழலும் சமம்

$$\Rightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} \Rightarrow \frac{(5 \times 1) + (-1 \times 3) + (-3 \times \lambda)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + \lambda^2}}$$

$$= \frac{(1 \times 5) + (3 \times -1) + (\lambda \times -3)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + (3^2)}}$$

$$\Rightarrow \frac{5 - 3 - 3\lambda}{\sqrt{1 + 9 + \lambda^2}} = \frac{5 - 3 - 3\lambda}{\sqrt{25 + 1 + 9}}$$

$$\Rightarrow \frac{2 - 3\lambda}{\sqrt{10 + \lambda^2}} = \frac{2 - 3\lambda}{\sqrt{35}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{10+\lambda^2} = \sqrt{35} \text{ [இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த]}$$

$$10 + \lambda^2 = 35 \Rightarrow \lambda^2 = 35 - 10 = 25$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 5$$

விடை :

(3) ± 5

Question 22.

$\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$ என்ற வெக்டரின் ஆரம்ப மற்றும் இறுதிப் புள்ளிகள் (1, 2, 4) மற்றும் $(2, -3\lambda, -3)$ எனில், λ -ன் மதிப்பு

(1) $\frac{7}{3}$

(2) $-\frac{7}{3}$

(3) $-\frac{5}{3}$

(4) $\frac{5}{3}$

குறிப்பு :

$$\vec{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{OB} = 2\hat{i} - 3\lambda\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{AB} = \hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k} = (2\hat{i} - 3\lambda\hat{j} - 3\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k} = \hat{i} + (-3\lambda - 2)\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$-(3\lambda + 2) = 5$$

$$3\lambda + 2 = -5$$

$$3\lambda = -5 - 2 = -7$$

$$\lambda = -\frac{7}{3}$$

விடை :

$$(2) -\frac{7}{3}$$

Question 23.

$10\hat{i} + 3\hat{j}$, $12\hat{i} - 5\hat{j}$ மற்றும் $a\hat{i} + 11\hat{j}$ ஆகிய நிலை வெக்டர்களின் புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைத்தால் 'வான் மதிப்பு

(1) 6

(2) 3

(3) 5

(4) 8

குறிப்பு :

$$\overrightarrow{OA} = 10\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = 12\hat{i} - 5\hat{j}$$

$$\overrightarrow{OC} = a\hat{i} + 11\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (12\hat{i} - 5\hat{j}) - (10\hat{i} + 3\hat{j}) = 2\hat{i} - 8\hat{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$= a\hat{i} + 11\hat{j} - (-12\hat{i} - 5\hat{j})$$

$$= (a + 12)\hat{i} + 16\hat{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$= a\hat{i} + 11\hat{j} - (-12\hat{i} - 5\hat{j})$$

$$= (a + 12)\hat{i} + 16\hat{j}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} \\
&= (10\hat{i} + 3\hat{j}) - (a\hat{i} + 11\hat{j}) = (10 - a)\hat{i} + (-8)\hat{j} \\
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CA} \\
\Rightarrow 2\hat{i} - 8\hat{j} &= (10 - a)\hat{i} + (-8)\hat{j} \\
(10 - a) &= 2 \\
\Rightarrow -a &= -10 + 2 = -8 \\
a &= 8
\end{aligned}$$

விடை :

(4) 8

Question 24.

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + x\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ மற்றும் $a \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = 70$ எனில், x-ன் மதிப்பு

(1) 5

(2) 7

(3) 26

(4) 10

குறிப்பு :

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = 2\hat{i} + x\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & x & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(4x + 1) - \hat{j}(8 - 1) + \hat{k}(-2 - x)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 70$$

$$(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i}(4x + 1) - \hat{j}(8 - 1) + \hat{k}(-2 - x)) = 70$$

$$(4x + 1) - 7 - 2 - x = 70$$

$$3x - 8 = 70$$

$$3x = 70 + 8 = 78$$

$$x = 26$$

விடை :

(3) 26

Question 25.

$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $|\vec{b}| = 5$ மேலும் $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ நாக்கு இடைப்பட்ட கோணம் – எனில், இவ்விரு வெக்டர்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு

(1) $\frac{7}{4}$

(2) $\frac{15}{4}$

(3) $\frac{3}{4}$

(4) $\frac{17}{4}$

குறிப்பு :

$$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}, |\vec{b}| = 5$$

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\Delta\text{-பின் பரப்பு} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{15}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4}$$

வடை:

(2) $\frac{15}{4}$