# अध्याय 16 परिमाप और क्षेत्रफल

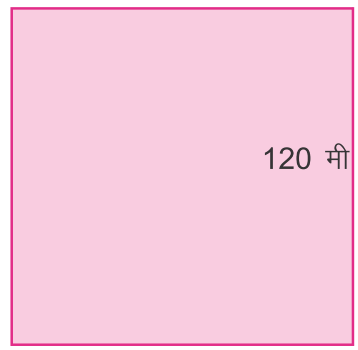
**16.1** नीलम तथा राकेश ने अपने अपने खेत के चारों तरफ कंटीले तार की बाड़ बनाई।

60 मी.

180 मी.

नीलम का खेत

**आकृति (i)**




120 मी.

राकेश का खेत

**आकृति (ii)**

यदि बाड़ बनाने का खर्चा 12 रूपये प्रति मीटर हो तो किसके खेत पर बाड़ बनवाने का खर्चा ज्यादा आएगा ?

100 रूपये प्रति वर्ग मीटर की दर से खेत जुतवाने पर किस खेत में खर्चा अधिक होगा ?

बाड़ बनवाने के लिए कुल किया गया खर्च ज्ञात करने के लिए परिमाप ज्ञात करके बाड़ बनाने की दर से गुणा करते हैं।

इसी प्रकार खेत जोतने का खर्च ज्ञात करने के लिए क्षेत्रफल वर्गमीटर में ज्ञात करके खेत जोतने की दर से गुणा करते हैं।

चूंकि नीलम का खेत आयताकार है।

अतः नीलम के खेत का परिमाप = 2 x (ल. + चौ.) = 2 x (180 + 60)

= 2 x (240) = 480 मी.

जबकि राकेश का खेत वर्गाकार है।

अतः राकेश के खेत का परिमाप = 4 x भुजा

= 4 x 120 = 480 मी.

चूंकि दोनों का परिमाप समान है अतः बाड़ लगाने का खर्चा समान आएगा।

पुनः नीलम के खेत का क्षेत्रफल = ल. x चौ.

= 180 x 60

= 10,800 वर्गमीटर

राकेश के खेत का क्षेत्रफल = $\text{भुजा}^2$

= $(120)^2$

= 120 x 120

= 14,400 वर्गमीटर

चूंकि राकेश के खेत का क्षेत्रफल अधिक है। अतः जुताई का खर्च भी अधिक होगा।

**करो और सीखो**

1. नीचे पंजीकरण संख्या दर्शाती पट्टियों के चित्र दिए गए है। अपने आसपास बस, टैक्सी एवं निजी वाहनों के आगे लगी पट्टियों की लम्बाई तथा चौड़ाई नापकर परिमाप की गणना कीजिए।

| बस | टैक्सी | निजी वाहन |
|---|---|---|
| RJ19 PA 3807 | RJ51 TA 1051 | RJ271CO706 |

2. निम्नलिखित परिस्थितियों में बताइए कि कब परिमाप तथा कब क्षेत्रफल ज्ञात करना पड़ेगा ?
   (i) दुपट्टे के किनारों पर लेस (कोर/गोटा) लगाना हो।
   (ii) हॉकी के मैदान में काली मिट्टी डलवानी हो।
   (iii) कमरे की छत भरवानी हो।
   (iv) खेत के चारों ओर मेड़ लगवानी हो।

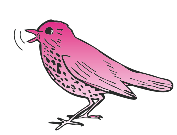
## प्रश्नावली 16.1

1. राधा प्रतिदिन सुबह 60 मीटर भुजा वाले वर्गाकार पार्क के चारों ओर किनारे किनारे 2 चक्कर लगाती है तो प्रतिदिन वह कितनी दूरी तय करती है ज्ञात कीजिए।
2. सुरेश के पास 78 सेमी लम्बा रिबन है वह 26 सेमी लम्बाई की आयताकार फोटो फ्रेम के किनारे पर लगाना चाहता है तो फ्रेम की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
3. रानू अपने बैठक के हाल में कालीन बिछाना चाहता है जिसकी लम्बाई 50 मी. है। यदि चौडाई लम्बाई की आधी है तो कालीन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. गुरमीत ने अपने खेत के 4200 वर्गमीटर भाग में मूंग की फसल बोई। इस हेतु खेत के चारों और तार बंदी करवाना चाहता है। यदि खेत की चौड़ाई 30 मीटर हो तो कितना लम्बा तार लगाना पड़ेगा ?
5. विद्यालय के खेल के मैदान का क्षेत्रफल 38400 वर्गमीटर है। यदि मैदान की लम्बाई व चौड़ाई का अनुपात 3 : 2 है, तो मैदान का परिमाप ज्ञात कीजिए।
6. एक आयत व वर्ग का परिमाप समान है, आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 25 सेमी और 15 सेमी है। किस आकृति का क्षेत्रफल अधिक है ।
7. निम्न आकृतियों का परिमाप ज्ञात कीजिए।
   (i) त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 2 सेमी, 3 सेमी और 4 सेमी हो।
   (ii) समबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा 8 सेमी हो ।
   (iii) समद्विबाहु त्रिभुज, समान भुजाएँ 10 सेमी. और तीसरी भुजा 7 सेमी हो।

## 16.2 समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

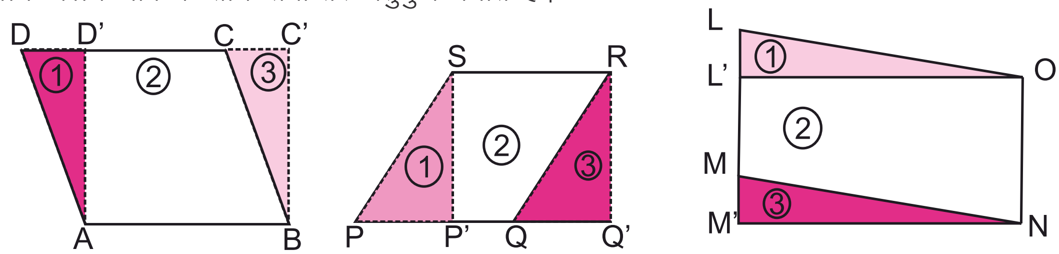
हमें आस–पास के परिवेश में वर्ग व आयत के अतिरिक्त दूसरे आकार भी देखने को मिलते हैं। आप ऐसे भूखण्ड का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे जो समान्तर चतुर्भुज जैसे आकार का है ?

समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर एवं समान्तर होती हैं।



**आओ प्रयास करते है**

अलग अलग नाप के तीन समान्तर चतुर्भुज बनाते हैं।




समान्तर चतुर्भुज की आधार भुजा के सामने की भुजा के एक शीर्ष से आधार पर लम्ब डाला। शीर्ष लम्ब से काटकर एक त्रिभुज (1) अलग करके सम्मुख समान्तर भुजा के साथ जोड़ देते हैं जो त्रिभुज (3) के रूप में दिखाया है। $\Delta$ (1) तथा $\Delta$ (3) में समकोण त्रिभुज के कर्ण भुजा नियम से दोनों त्रिभुज सर्वागसम हैं।

अतः $\Delta$ (1) का क्षेत्रफल = $\Delta$ (3) का क्षेत्रफल

| समान्तर चतुर्भुज | आधार भुजा | आधार के सामने की भुजा के शीर्ष से आधार पर लम्ब | काटकर अलग किया त्रिभुज आकृति (1) | सम्मुख भुजा पर जोड़ा गया त्रिभुज आकृति (3) | नई स्थिति में बनी आकृति (2) + (3) | समान्तर चतुर्भुज एवं आयत के क्षेत्रफल में सम्बन्ध (1) + (2) = (2) + (3) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ABCD | CD | AD' | ΔAD'D | ΔBC'C | ABC'D' | ABCD = ABC'D' |
| PQRS | PQ | SP' | ΔSP'P | ΔRQ'Q | P'Q'RS | PQRS= P'Q'RS |
| LMNO | LM | OL' | ΔOL'L | ΔNM'M | L'M'NO | LMNO = L'M'NO |

तालिका से स्पष्ट है किः

{ (आकृति (1) + आकृति (2)} का क्षेत्रफल = { (आकृति (2) + आकृति (3)} का क्षेत्रफल

(क्योंकि आकृति (1) तथा आकृति (3) का क्षेत्रफल समकोण त्रिभुज के कर्ण भुजा नियम से बराबर है)

अतः समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

= लम्बाई x चौड़ाई

या = आधार x सम्मुख भुजा के शीर्ष से आधार पर लम्ब

या समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = (आधार x ऊँचाई) वर्ग इकाई

**गतिविधि –**

- पारदर्शी कागज/शीट लेवें।
- इस पर अलग–अलग नाप के समान्तर चतुर्भुज काटें।
- वर्गाकार खानों वाली शीट या ग्राफ पेपर पर रखकर इनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

- समान्तर चतुर्भुज के आधार के सामने की भुजा के शीर्ष से लम्बवत काटकर एक त्रिभुजाकार आकृति अलग करें।
- अलग की गई आकृति को दूसरी तरफ रखकर एक आयत बनाएँ।
- इस प्रकार बने आयत का क्षेत्रफल ग्राफ पेपर/वर्गाकार खाने वाली शीट से ज्ञात करें।
- समान्तर चतुर्भुज एवं आयत के क्षेत्रफलों की तुलना करें।
- यहाँ दोनों के क्षेत्रफल समान प्राप्त होते हैं।

**उदाहरण 1** एक समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा और संगत ऊँचाई क्रमशः 5 सेमी और 4 सेमी है। समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**हल** आधार की लम्बाई = 5 सेमी

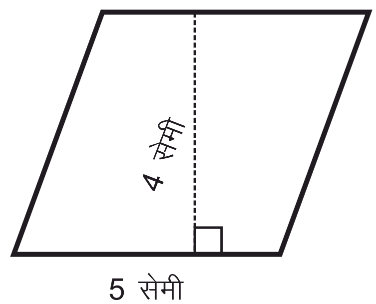
ऊँचाई = 4 सेमी

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= b x h

= 5 x 4 वर्ग सेमी

= 20 वर्ग सेमी




**उदाहरण 2** यदि एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 56 वर्ग सेमी और उसका आधार 7 सेमी हो तो ऊँचाई ($x$) ज्ञात कीजिए ?

**हल** समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

= आधार x ऊँचाई

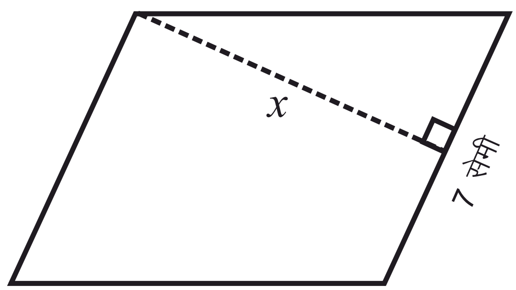
56 = 7 x $x$

या 7 x $x$ = 56

या $x = \frac{56}{7}$

$x$ = 8 सेमी

या इस प्रकार समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई 8 सेमी है।




**उदाहरण 3** समान्तर चतुर्भुज PQRS की दो भुजाओं की लंबाईयाँ 8 सेमी और 5 सेमी है। आधार QR की संगत ऊँचाई 4 सेमी है ज्ञात कीजिए।

(i) समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल (ii) आधार PQ की संगत ऊँचाई

**हल** (i) समान्तर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई

= 8 सेमी. x 4 सेमी

= 32 वर्ग सेमी

(ii) आधार = 5 सेमी

ऊँचाई (SU) = y सेमी

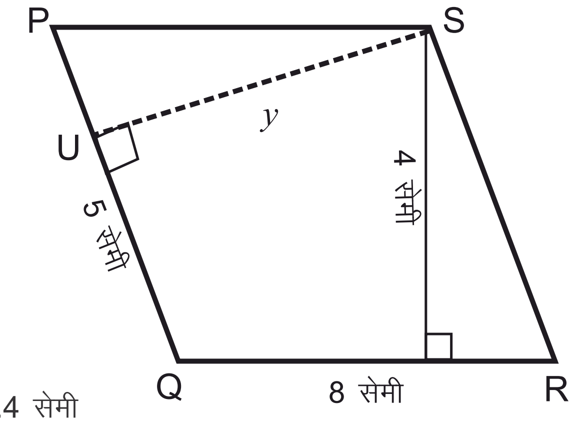
क्षेत्रफल = 32 वर्ग सेमी

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्र. = आधार x ऊँचाई

या 32 = 5 x y

या 5 x y = 32

$$y = \frac{32}{5} = 6.4 \text{ सेमी}$$



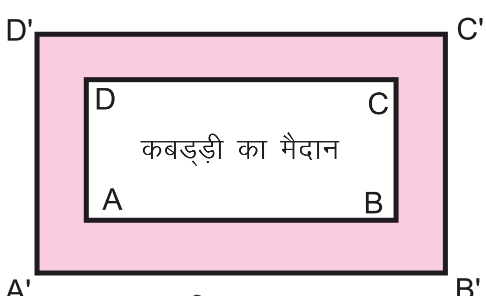

इस प्रकार आधार PQ की संगत ऊँचाई = 6.4 सेमी

### 6.2.1 पथमार्ग

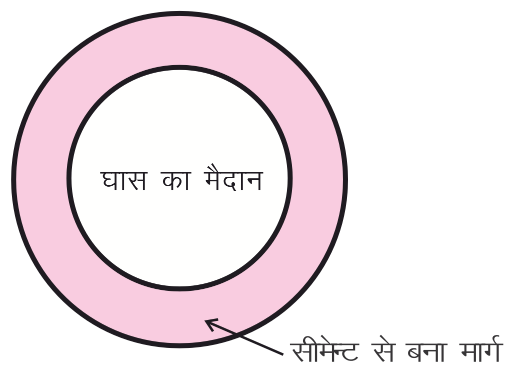
अपने दैनिक जीवन में कई बार ऐसी स्थितियाँ भी देखने में आती है, जिसमें आयताकार, वर्गाकार या वृत्ताकार पार्क, मैदान के चारों तरफ अन्दर या बाहर मार्ग बना होता है लम्बाई तथा चौड़ाई के समान्तर मार्ग बना होता है।

पथ का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करे

1. दिए गए आयताकार, वर्गाकार अथवा वृत्ताकार भाग के चारों तरफ बने मार्ग का क्षेत्रफल।
 = (मार्ग सहित दिए गए भाग का क्षेत्रफल) – (मार्ग रहित दिए गए भाग का क्षेत्रफल)

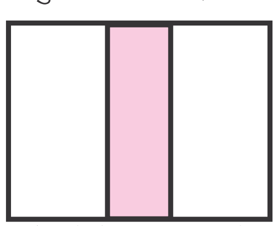



चित्र (i)

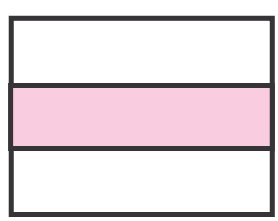



चित्र (ii)

2. लम्बाई / चौड़ाई के समान्तर बीचों–बीच अथवा किनारे पर बने मार्ग का क्षेत्रफल
 = (समान्तर भुजा की लम्बाई x मार्ग की चौड़ाई)

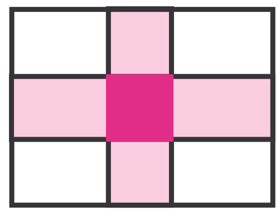


चौड़ाई के समान्तर मार्ग



लम्बाई के समान्तर मार्ग

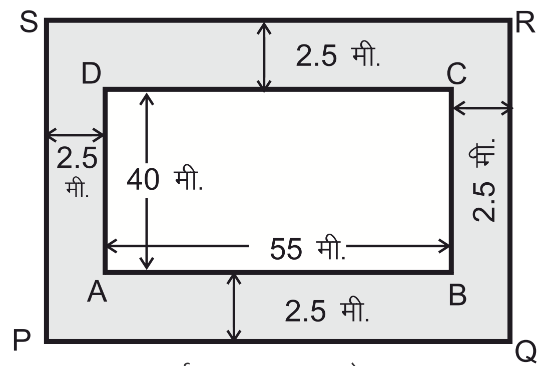
3. लम्बाई एवं चौड़ाई के समान्तर परस्पर काटने वाले मार्गों का क्षेत्रफल
= मार्गों का क्षेत्रफल – उभयनिष्ठ भाग का क्षेत्रफल



लम्बाई व चौड़ाई के समान्तर मार्ग

**उदाहरण 4** एक आयताकार पार्क 55 मीटर लम्बा और 40 मीटर चौड़ा है। पार्क के बाहर चारों ओर 2.5 मीटर चौड़ा मार्ग बनाया गया है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

**हल** आकृति में ABCD एक आयताकार पार्क है, और छायांकित क्षेत्र 2.5 मी. चौड़े मार्ग को दर्शाता है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें




मार्ग सहित आयताकार क्षेत्र PQRS का क्षेत्रफल – आयताकार पार्क ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा।

मार्ग सहित पार्क की लम्बाई (PQ) = पार्क की लम्बाई (AB) + 2 x मार्ग की चौड़ाई
= 55 मी. + 2 x 2.5 मी.
= 55 मी. + 5.0 मी. = 60 मी.

मार्ग सहित पार्क की चौड़ाई (PS) = पार्क की चौड़ाई (AD) + 2 x मार्ग की चौड़ाई
= 40 मी. + 2 x 2.5 मी.
= 40 + 5.0 मी.
= 45 मी.

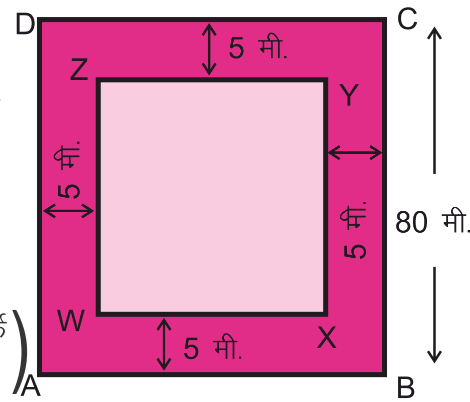
मार्ग सहित आयताकार पार्क (PQRS) का क्षेत्रफल = ल. x चौ.
= 60 मी. x 45 मी.
= 2700 वर्ग मी.

आयताकार पार्क ABCD का क्षे. = ल. x चौ.
= 55 मी. x 40 मी.
= 2200 वर्ग मी.

अतः मार्ग का क्षेत्रफल = मार्ग सहित आयताकार पार्क PQRS का क्षे. – आयताकार पार्क ABCD का क्षे.
= 2700 वर्ग मी. – 2200 वर्ग मी. = 500 वर्ग मी.

**उदाहरण 5** 80 मी. भुजा वाले एक वर्गाकार पार्क की परिसीमा के साथ लगा हुआ भीतर की 5 मीटर चौड़ा मार्ग बना हुआ है। इस मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 180 रू. प्रति वर्ग मीटर की दर से लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा ज्ञात कीजिए।

**हल** आकृति में ABCD एक 80 मी. भुजा वाले वर्गाकार पार्क को दर्शाता है तथा पार्क के अन्दर की तरफ छायांकित भाग 5 मी. चौड़े मार्ग को दर्शाता है।




मार्ग का क्षेत्रफल

$= \begin{pmatrix}\text{वर्गाकार पार्क} \\ \text{ABCD का क्षे.}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{मार्ग रहित वर्गाकार पार्क} \\ \text{WXYZ का क्षेत्रफल}\end{pmatrix}$

मार्ग रहित पार्क की भुजा WX = पार्क की भुजा AB - 2 x मार्ग की चौड़ाई

= 80 मी. – 2 x 5 मी.

= 80 मी. – 10 मी.

= 70 मी.

वर्गाकार पार्क ABCD का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$ = $(80 \text{ मी.})^2$ = 6400 वर्ग मीटर

वर्गाकार पार्क WXYZ का क्षेत्रफल – $(\text{भुजा})^2$ = $(70 \text{ मी.})^2$ = 4900 वर्ग मीटर

मार्ग का क्षेत्रफल = वर्गाकार पार्क ABCD का क्षे. – वर्गाकार पार्क WXYZ का क्षेत्र

= 6400 वर्ग मी. – 4900 वर्ग मी. = 1500 वर्ग मी.

यदि 1 वर्ग मी. में लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा = 180 रू. है

1500 वर्ग मी. में लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा = 180 x 1500 रू.

= 2,70,000 रू.

**उदाहरण 6** एक आयताकार घास के मैदान की लम्बाई 75 मीटर और चौड़ाई 55 मीटर है। मैदान के मध्य लम्बाई व चौड़ाई के समान्तर 3 मीटर चौड़े दो मार्ग इस प्रकार स्थित है कि प्रत्येक एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं। सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**हल** लम्बाई के समान्तर मार्ग (WXYZ) का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

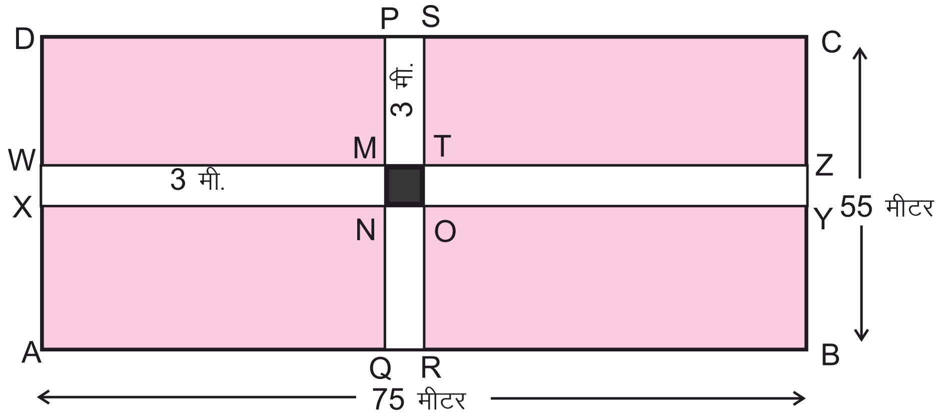
= 75 मी. x 3 मी.

= 225 वर्ग मीटर

चौड़ाई के समान्तर ( PQRS) का क्षेत्रफल = ल. x चौ.

= 55 मी. x 3 मी.

= 165 वर्ग मी.




उभयनिष्ठ मार्ग वर्ग MNOT (दोनों मार्गों पर स्थित) का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा

= 3 मी. x 3 मी.

= 9 वर्ग मी.

वर्ग MNOT का क्षेत्रफल 9 वर्ग मी. दोनों भागों में सम्मिलित है।

अतः सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल = WXYZ का क्षे. + PQRS का क्षे. – वर्ग MNOT का क्षे.

= (225 + 165 – 9) वर्ग मी.

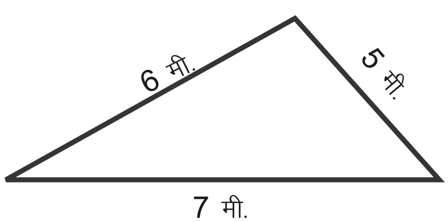
= (390 – 9) वर्ग मी.

= 381 वर्ग मी.

उपर्युक्त उदाहरण के चित्र में हमने देखा कि छायांकित भाग दोनों मार्गों पर स्थित है। अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल घटाते हैं।

## 16.3 त्रिभुज का क्षेत्रफल

किसी त्रिभुजाकार पार्क पर घास लगवाने का खर्चा ज्ञात करना है। त्रिभुजाकार पार्क का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करें ?



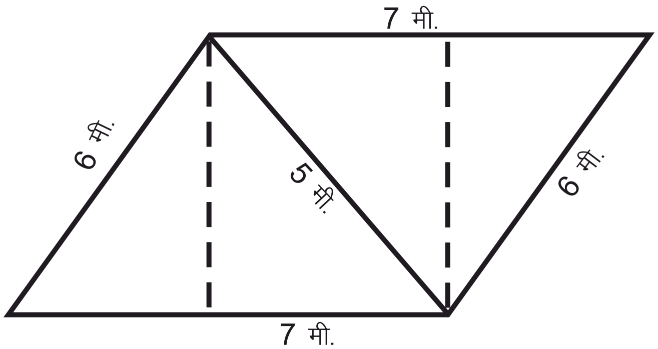
- **आओ सोचे**

  त्रिभुजाकार पार्क की नाप मीटर में दी गई है इसे पैमाना 1 मीटर = 1 सेमी लेकर कार्ड शीट पर दो सर्वांगसम त्रिभुज 6 सेमी, 7 सेमी तथा 5 सेमी भुजा वाले बनावे।

  दोनों त्रिभुजों को एक साथ इस प्रकार जोड़ें की दोनों के समान नाप वाली भुजा परस्पर पास आ जावें तथा समातर चतुर्भुज बना ले।

$\because$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

**$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधार x ऊँचाई) वर्ग इकाई**



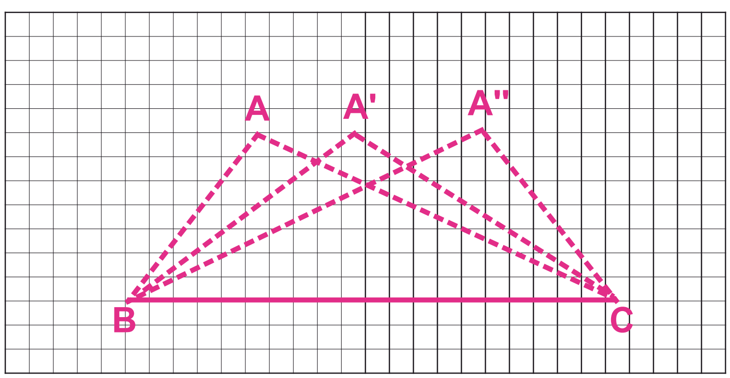

**करो और सीखो**

अलग अलग नाप के समान्तर चतुर्भुज बनाओ किसी एक विकर्ण के अनुदिश काटकर दो त्रिभुज बनाइए।

- क्या प्रत्येक स्थिति में दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं ?
- क्या दो सर्वांगसम त्रिभुजों का क्षेत्रफल सदैव समान होता है ?
- क्या इसका विलोम भी सदैव सत्य होगा ?

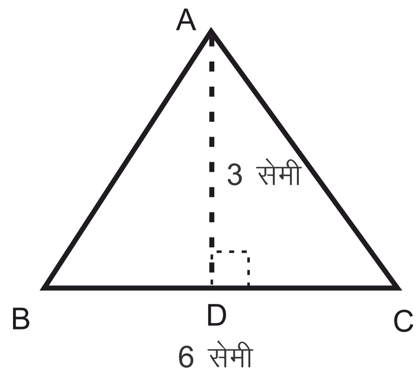
**आओं करके देखें –**

एक ग्राफ पेपर पर एक ही नाप का आधार तथा ऊंचाई लेकर अलग–अलग त्रिभुज बनाओं जैसे –

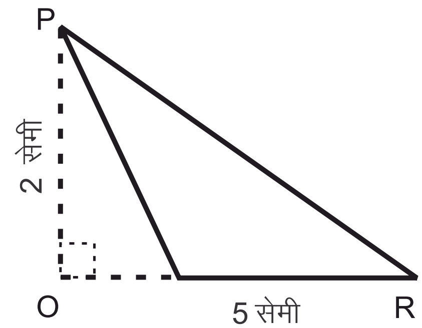



- $\Delta ABC$, $\Delta A'BC$ तथा $\Delta A''BC$ नाप के तीन त्रिभुज लेकर देखिए –
- तीनों त्रिभुजों द्वारा घेरे गये खानों की संख्या समान है, अर्थात तीनों का क्षेत्रफल समान हैं।
- क्या वे एक दूसरे को कभी पूरा–पूरा ढ़क सकते हैं ? काट करके देखिए ?

**उदाहरण 7** चित्र में दर्शाए गए त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




(i)




(ii)

**हल** आकृति (i) त्रिभुज (ABC) का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

$= \frac{1}{2}$ x BC x AD

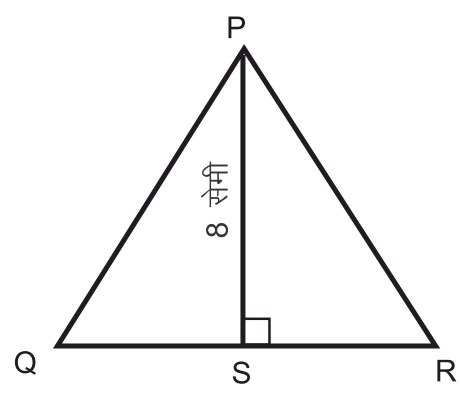
$= \frac{1}{2}$ x 6 सेमी x 3 सेमी = 9 वर्ग सेमी

आकृति (ii) त्रिभुज (PQR) का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

$= \frac{1}{2}$ x QR x PO

$= \frac{1}{2}$ x 5 सेमी x 2 सेमी = 5 वर्ग सेमी

**उदाहरण 8** यदि त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल 52 वर्ग सेमी और ऊँचाई PS = 8 सेमी है तो आधार QR की ज्ञात कीजिए ?




**हल** दी गई आकृति में ऊँचाई PS = 8 सेमी

त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल = 52 वर्ग सेमी

त्रिभुज PQR का आधार QR = ?

त्रिभुज (PQR) का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

$= \frac{1}{2}$ x QR x PS

52 वर्ग सेमी. $= \frac{1}{2}$ x QR x 8 सेमी

$$QR = \frac{52 \times 2 \text{ सेमी}^2}{8 \text{ सेमी}}$$

= 13 सेमी.

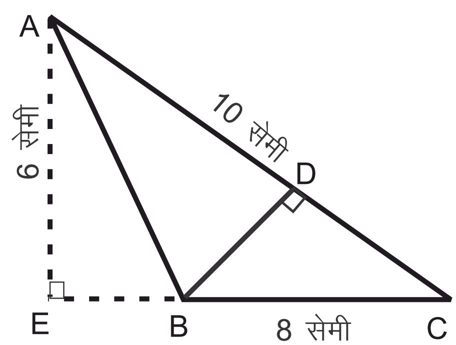
आधार QR = 13 सेमी.

**उदाहरण 9** त्रिभुज ABC में AC =10 सेमी, BC = 8 सेमी और AE = 6 सेमी है तो ज्ञात कीजिए।

(i) त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल (ii) BD की लम्बाई

**हल** (i) त्रिभुज ABC में आधार BC = 8 सेमी

ऊँचाई AE = 6 सेमी




त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आधार x ऊंचाई

= $\frac{1}{2}$ x BC x AE

= $\frac{1}{2}$ x 8 सेमी x 6 सेमी

= 24 वर्ग सेमी

(ii) आधार AC = 10 सेमी. ऊँचाई (BD) = ? क्षेत्रफल = 24 वर्ग सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

= $\frac{1}{2}$ x AC x BD

24 वर्ग सेमी = $\frac{1}{2}$ x 10 x BD

BD = $\frac{24 \times 2 \text{ सेमी}}{10}$ = 4.8 सेमी

**उदाहरण 10** त्रिभुज PQR के आधार और ऊँचाई का अनुपात 3 : 2 है यदि उसका क्षेत्रफल 108 वर्ग सेमी तो आधार व ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

**हल** चित्रानुसार त्रिभुज PQR में आधार QR व ऊँचाई PQ का अनुपात 3 : 2

माना कि त्रिभुज का आधार QR = 3 x $x$

त्रिभुज की ऊँचाई PQ = 2 x $x$

क्षेत्रफल = 108 वर्ग सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ x आ. x ऊ. = $\frac{1}{2}$ x QR x PQ

108 वर्ग सेमी. = $\frac{1}{2}$ x $3x$ x $2x$

108 वर्ग सेमी. = $3x^2$

या $3x^2 = 108$

या $x^2 = 36$

या $x = 6$ सेमी

त्रिभुज का आधार QR = 3 x $x$

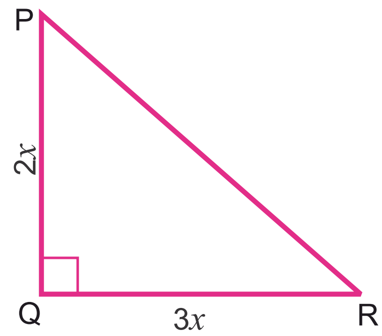
= 3 x 6

= 18 सेमी

त्रिभुज की ऊँचाई PQ = 2 x $x$

= 2 x 6

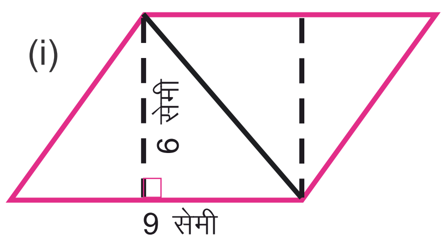
= 12 सेमी




## प्रश्नावली 16.2

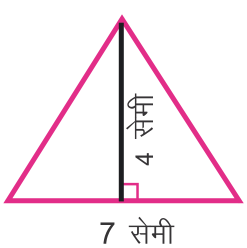
1. निम्न आकृतियों को देख कर समान्तर चतुर्भुज व त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i)

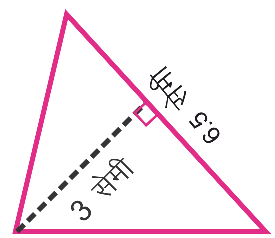



(ii)

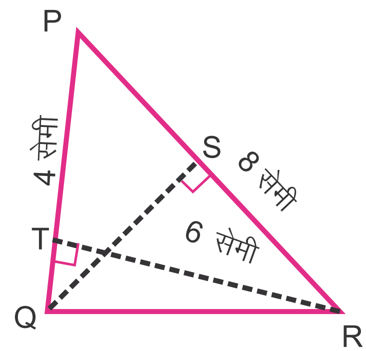
(ii)




(iv)

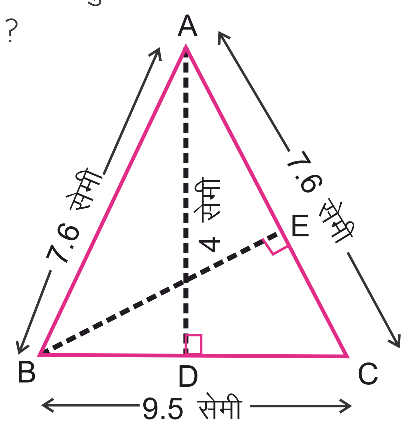



2. एक समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई उसके आधार की एक चौथाई है यदि उसका क्षेत्रफल 144 वर्ग सेमी हो उसका आधार और ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. काली के त्रिभुजाकार खेत व हमीदा के आयताकार खेत के क्षेत्रफल समान है। हमीदा के खेत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 20 सेमी और 15 सेमी है। काली के खेत के आधार की लम्बाई 25 सेमी है तो ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
4. त्रिभुज PQR में (संलग्न चित्र) PQ = 4 सेमी, PR = 8 सेमी, RT = 6 सेमी है तो ज्ञात कीजिए।
   (1) त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल
   (2) QS की लम्बाई




5. एक त्रिभुज का आधार 8 सेमी है। यदि त्रिभुज की ऊँचाई, आधार से दुगुनी है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. ABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC = 7.6 सेमी और BC = 9.5 सेमी (संलग्न चित्र) A से भुजा BC पर लम्ब AD, 4 सेमी है त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा B से AC पर लम्ब अर्थात् BE ज्ञात कीजिए ?




7. एक समान्तर चतुर्भुज के आधार और ऊँचाई का अनुपात 5 : 2 है उसका क्षेत्रफल 640 वर्ग सेमी हो तो आधार और ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

8. श्याम अपने आयताकार उपवन जिसकी लम्बाई 95 मीटर और चौड़ाई 80 मी. है। वह बाहर की ओर चारों तरफ 5 मीटर चौड़े क्षेत्र की मिट्टी खुदवाकर पौधे लगाना चाहता है । ज्ञात कीजिए कि कितने क्षेत्रफल में पौधे लगाएगा ?

9. 60 मीटर भुजा वाले वर्गाकार मैदान के चारों तरफ भीतर की ओर 2 मीटर चौड़ा पथ बना हुआ है ज्ञात कीजिए।
(1) पथ का क्षेत्रफल (2) 270 रू. प्रति वर्गमीटर की दर से पथ पर सीमेंट कराने का व्यय।

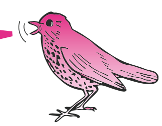
10. 125 मीटर लम्बाई और 95 मीटर चौड़ाई वाले एक आयताकार पार्क के मध्य में लम्बाई व चौडाई के समान्तर मध्य में दो मार्ग बनाए गए हैं प्रत्येक मार्ग की चौड़ाई 10 मीटर हो तो ज्ञात कीजिए।
(1) मार्ग में 80 रू. प्रति वर्गमीटर की दर से लाल मिट्टी डलवाने पर व्यय।
(2) पार्क में मार्ग को छोड़कर शेष भाग में घास लगाने का क्षेत्रफल।

### 16.4.1 वृत्त की परिधि

ममता अपनी बैठक में रखी टी टेबल जो दोनों किनारों पर अर्द्धवृत्ताकार हैं, के किनारे पर प्लास्टिक की मॉल्डिंग फ्रेम लगवाना चाहती है।

ममता ने अपनी बहिन मीना से इस हेतु फ्रेम लाने को कहा मीना टेबल के किनारे की लम्बाई नापना चाहती है, परन्तु किनारे वाले भाग को मापने में दिक्कत आ रही है। ममता उसे समझाती है कि वक्र किनारे वाले भाग को मापने के लिए हम वृत्ताकार भाग के किनारे को मापने की विधि ज्ञात करते हैं। आओ वक्राकार / मुड़ी हुई आकृति की लम्बाई मापना सीखें। ''ममता ने वृत्ताकार चूड़ी लेकर उसके चारों तरफ किनारे – किनारे धागा लपेटकर दूरी को मापा । यही वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी 'परिधि' है।

वृत्ताकार चकती, पहिए, चूड़ी इत्यादि की परिधि पर एक निशान लगाकर उसे समतल धरातल पर घुमाकर पूरे एक चक्कर में तय की गई दूरी से भी परिधि ज्ञात कर सकते हैं।



मीना इन सभी स्थितियों में वृत्ताकार भाग की परिधि को सही–सही मापने में समस्या है। चलो हम इसके लिए एक सूत्र का पता करते हैं।

ममता–हाँ, मैंने देखा था कि गड़रिया लोहार लकड़ी के पहिएँ पर लोहे का पट्टा चढ़ाने के लिए वह व्यास की लम्बाई के आधार पर लोहे के पट्टे की लम्बाई का ठीक से अनुमान लगाकर पट्टा चढ़ाता है। आओ, व्यास तथा परिधि के मध्य सम्बन्ध का पता लगाते हैं। ममता एवं मीना ने अलग–अलग त्रिज्या की 7 वृत्ताकार वस्तुएँ ली तथा धागे की सहायता, से मापकर निम्न तालिका में मापों को भरकर परिधि तथा व्यास के अनुपात का पता लगाया हैं।

| वृत | त्रिज्या | व्यास | परिधि | परिधि ÷ व्यास |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.5 सेमी | 7.0 सेमी | 22.0 सेमी | $\frac{22}{7} = 3.14$ |
| 2 | 7.0 सेमी | 14.0 सेमी | 44.0 सेमी | $\frac{44}{14} = 3.14$ |
| 3 | 10.5 सेमी | 21.0 सेमी | 66.0 सेमी | $\frac{66}{21} = 3.14$ |
| 4 | 14.0 सेमी | 28.0 सेमी | 88.0 सेमी | $\frac{88}{28} = 3.14$ |
| 5 | 17.5 सेमी | 35.0 सेमी | 110.0 सेमी | $\frac{110}{35} = 3.14$ |

उपर बनी तालिका से स्पष्ट होता है कि अलग अलग त्रिज्या वाली आकृतियों में परिधि/व्यास का मान लगभग समान रहता है। यह मान लगभग 3.14 रहता है। इस स्थिरांक को "$\pi$" पाई से प्रदर्शित करते हैं।

$$\text{अतः } \frac{\text{परिधि (c)}}{\text{व्यास (d)}} = \pi \text{ या } \frac{\text{परिधि (c)}}{2 \times \text{त्रिज्या}} = \frac{c}{2r}$$

या $c = \pi d$

$c = 2\pi r$

परिधि $c = 2\pi r$ अतः वृत्ताकार वस्तुओं की परिधि $= \pi d = 2\pi r$

**उदाहरण 11** मोहन अपनी माँ की चूड़ियों पर सोने की पत्तियाँ चढवाना चाहता है वह कितनी लम्बी पत्ती चढ़ाएगा जबकि चूड़ी की त्रिज्या 3.5 सेमी है। (बिना अतिव्यापन किए हुए)

**हल** वृत्ताकार चूड़ी की त्रिज्या (r) = 3.5 सेमी

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10}$ सेमी $\quad\Big|\quad \pi = \frac{22}{7}$

= 22 सेमी

**उदाहरण 12** एक वृत्ताकार पहिए का व्यास 11.2 सेमी है तो पहिए की परिधि ज्ञात कीजिए।

**हल** पहिए का व्यास (d) = 11.2 सेमी

अतः त्रिज्या (r) = 11.2 ÷ 2 सेमी = 5.6 सेमी

वृत्ताकार पहिए की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.6$ सेमी

= 35.2 सेमी

**उदाहरण 13** बनवारी 42 मीटर त्रिज्या वाले पहिए को 2 चक्कर घुमाने में कितनी दूरी तय करेगा ?

**हल** वृत्ताकार पहिए की त्रिज्या (r) = 42 मीटर

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 42$ मीटर

= 264 मीटर

$\because$ 1 चक्कर लगाने में पहिया दूरी तय करता है = 264 मीटर

$\therefore$ 2 चक्कर लगाने में पहिया दूरी तय करेगा = 264 x 2 मीटर

= 528 मीटर

**उदाहरण 14** खुशबू 14 सेमी त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार कागज की तश्तरी को दो बराबर भागों में विभाजित करती है। प्रत्येक अर्ध वृत्ताकार तश्तरी का परिमाप ज्ञात कीजिए।
($\pi = \frac{22}{7}$ प्रयोग कीजिए।)

**हल** तश्तरी की त्रिज्या (r) = 14 सेमी

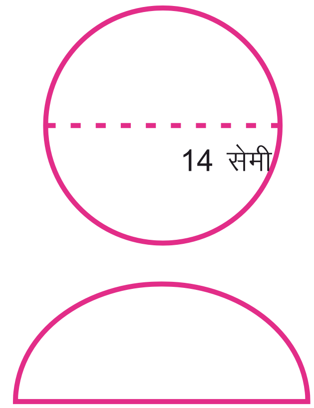
वृत्त की परिधि = $2\pi r$

अतः अर्धवृत्त की परिधि = $\frac{1}{2} \times 2\pi r$

$= \pi r$

$= \frac{22}{7} \times 14$ सेमी

= 44 सेमी




वृत्त का व्यास (d) = 2 x त्रिज्या

= 2 x 14 सेमी

= 28 सेमी

अतः प्रत्येक अर्धवृत्ताकार तश्तरी का परिमाप = अर्धवृत्त की परिधि + व्यास

= 44 सेमी + 28 सेमी

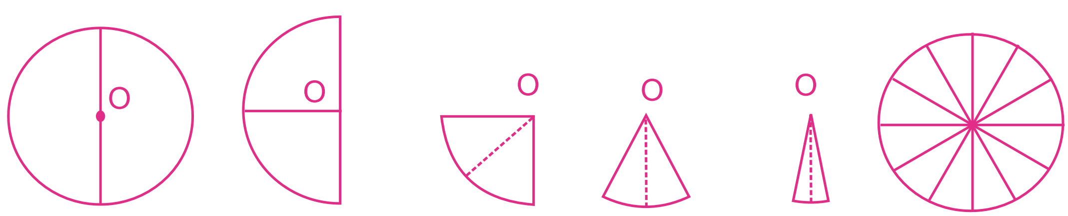
= 72 सेमी

### 16.4.2 वृत्त का क्षेत्रफल

मीना 28 मीटर त्रिज्या वाले वृत्ताकार मैदान पर लाल मिट्टी डलवाना चाहती है। यदि 1 वर्ग मीटर क्षेत्रफल पर मिट्टी डलवाने का खर्चा 10 रूपये है तो इस मैदान पर लाल मिट्टी डलवाने का खर्चा कितना होगा इसका हिसाब लगा रही है। मीना की बहिन ममता ने बताया इसमें हमें परिधि (परिमाप) नहीं बल्कि वृत्ताकार भाग द्वारा घेरे गये क्षेत्र का क्षेत्रफल पता लगाना है।

दोनों ने पारदर्शी कागज पर वृत्ताकार भाग के दर्शाने हेतु 10 मीटर = 1 सेमी पैमाना लेकर 2.8 सेमी त्रिज्या की वृत्ताकार शीट काटी तथा ग्राफ पेपर पर रखकर, वर्गों को गिनते हुए क्षेत्रफल का पता लगाने लगी। किनारे सीधे नहीं होने से वृत्त के क्षेत्रफल का एक कच्चा सतही अनुमान ही प्राप्त हुआ। अब एक अन्य विधि से वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने की सोची –

मीना वृत्त को लगातार चित्रानुसार मोड़ती गई तथा उसे सलवटो से काटा




(i) (ii) (iii) (iv) (iv) (iv)

**ममता** – हमने एक वृत्त के दो, दो से चार, चार से आठ, आठ से सोलह टुकड़े प्राप्त किए हैं।

**मीना** – यदि इस प्रकार आगे से आगे मोड़ते जाएँ तो लगातार दुगुने टुकड़े प्राप्त होंगे।

**ममता** – एक स्थिति ऐसी होगी कि प्राप्त टुकड़ा लगभग एक त्रिभुजाकार होगा जिसकी ऊँचाई त्रिज्या के बराबर तथा आधार बहुत छोटा होगा।

**मीना** – यदि हमें n टुकड़े प्राप्त हों तो सभी n टुकड़ों का कुल क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल के समान होगा।

**ममता** – हाँ, इस स्थिति में।

वृत्त का क्षेत्रफल ={त्रिभुज 1 + त्रिभुज 2 + त्रिभुज 3 + त्रिभुज 4 + ..........+ ..........+ त्रिभुज n} का क्षेत्रफल

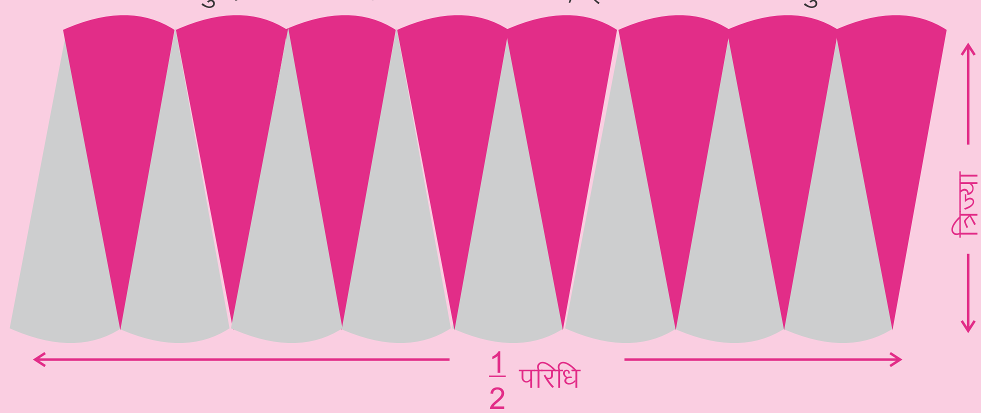
$= \left[\frac{1}{2}b_1 r + \frac{1}{2}b_2 r + \frac{1}{2}b_3 r + \frac{1}{2}b_4 r + .....+..........+\frac{1}{2}b_n r\right]$

$= \frac{1}{2} r\left[b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + .............+b_n\right]$ ($b_1, b_2, ....b_n$ = सभी त्रिभुज के आधार)

$= \frac{1}{2} r\left[b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + .....+..........+ b_n\right] = \frac{1}{2} r[2\pi r]$ वर्ग इकाई $\because$ (परिधि $= 2\pi r$)

$= \frac{1}{2} (2\pi r^2)$ वर्ग इकाइ $= \pi r^2$ वर्ग इकाई

**गतिविधि**– एक वृत्त के अर्द्धभाग को छायांकित कीजिए तथा इसे लगातार 6 बार उतरोत्तर मोड़िए तथा सलवटों के अनुदिश काटकर 64 खण्ड प्राप्त करें, इन खण्डों को चित्रानुसार व्यवस्थित कीजिए।




क्या आप इससे वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र बतला सकते है ? आप देखेंगे कि यह आयत के समान आकृति बन रही है इसकी लम्बाई परिधि तथा चौड़ाई त्रिज्या के बराबर है, यदि वृत्त की त्रिज्या 'r' है तो–

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$

अतः अभीष्ट वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

**उदाहरण 15** 25 सेमी त्रिज्या वाले वृत्ताकार डिस्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

**हल** डिस्क की त्रिज्या (r) = 25 सेमी

वृत्ताकार डिस्क का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= 3.14 \times (25)^2$

$= 3.14 \times 25 \times 25$

$= 1962.50$ वर्ग सेमी

**उदाहरण 16** एक वृत्ताकार बगीचे का व्यास 11.2 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**हल** व्यास d = 11.2 मीटर, अतः त्रिज्या (r) = 11.2 ÷ 2 मीटर

= 5.6 मीटर

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times (5.6)^2$ वर्ग मीटर

$= \frac{22}{7} \times 5.6 \times 5.6$ वर्ग मीटर

= 98.56 वर्गमीटर

**उदाहरण 17** एक वृत्ताकार तश्तरी का क्षेत्रफल 2826 वर्ग सेमी. है तो वृत्ताकार तश्तरी की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$ लीजिए)

**हल** वृत्त का (तश्तरी) क्षेत्रफल = 2826 वर्ग सेमी

$\pi r^2 = 2826$ वर्ग सेमी

$3.14 \times r^2 = 2826$ वर्ग सेमी

$r^2 = \frac{2826}{3.14}$ वर्ग सेमी

$r^2 = 900$ वर्ग सेमी

$r = 30$ सेमी

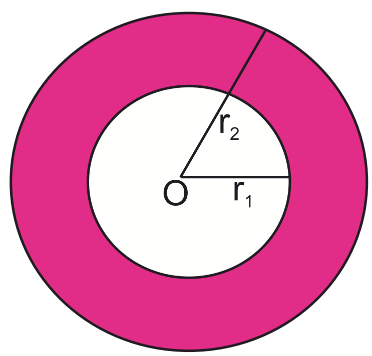
**उदाहरण 18** संलग्न आकृति दो वृत्तों को दर्शाती है जिनका केन्द्र समान है। बड़े वृत्त की त्रिज्या 12 सेमी और छोटे वृत्त की त्रिज्या 8 सेमी है। निम्न ज्ञात कीजिए। यदि $\pi = 3.14$ है।

(1) बड़े वृत्त का क्षेत्रफल

(2) छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

(3) दोनों वृत्तों के बीच

छायांकित भाग का क्षेत्रफल ($\pi = 3.14$)




**हल** (1) बड़े वृत्त की त्रिज्या $r_2 = 12$ सेमी

अतः बड़े वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r_2^2$

$= 3.14 \times (12)^2$ वर्ग सेमी

$= 3.14 \times 12 \times 12$ वर्ग सेमी

= 452.16 वर्ग सेमी

(2) छोटे वृत्त की त्रिज्या $r_1 = 8$ सेमी

अतः छोटे वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r_1^2$

$= 3.14 \times (8)^2$ वर्ग सेमी

$= 3.14 \times 8 \times 8$ वर्ग सेमी

= 200.96 वर्ग सेमी

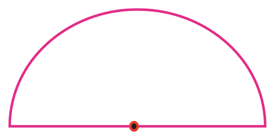
(3) छायांकित भाग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल − छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

= 452.16 वर्ग सेमी − 200.96 वर्ग सेमी

= 251.20 वर्ग सेमी

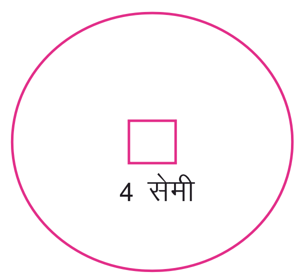
## प्रश्नावली 16.3

1. निम्न त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए ( $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
   (i) 21 सेमी (ii) 28 मिमी (iii) 10.5 सेमी
2. निम्न वृत्तों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। दिया गया है –
   (i) त्रिज्या = 5 सेमी (ii) व्यास = 42 मीटर (iii) त्रिज्या = 5.6 सेमी
3. यदि एक वृत्ताकार शीट की परिधि 132 मीटर हो तो इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए। शीट का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ( $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
4. एक वृत्त की परिधि 44 सेमी. है। वृत्त की त्रिज्या और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ( $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
5. दी गई आकृति, 12 सेमी व्यास के साथ एक अर्धवृत्त है। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।



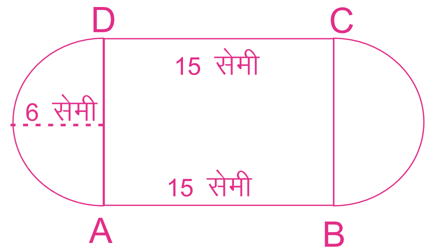
12 सेमी

6. एक वृत्ताकार तालाब की त्रिज्या 28 मीटर है। इसके बाहर चारों ओर 1.4 मीटर चौड़ाई का तट (मार्ग) बना हुआ है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
7. एक वृत्त का क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी है। इस वृत्त के बाहर 2 मीटर चौड़ाई का मार्ग है। उस मार्ग का क्षेत्रफल कितना होगा ?
8. 5 सेमी त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार शीट में से 4 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त को निकाल दिया जाता है। शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । ( $\pi = 3.14$ लीजिए)
9. 14 सेमी. त्रिज्या वाली एक गत्ते की शीट में से 4 सेमी भुजा वाले एक वर्ग को निकाल दिया जाता है। (जैसा कि आकृति में दिखाया गया है) शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ( $\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)



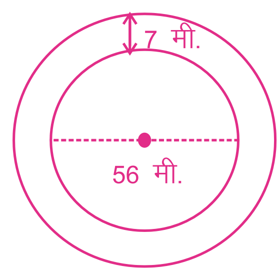

10. यदि दो वृत्तों के व्यास का अनुपात 4 : 5 है तो दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
11. दुर्गा अपनी वृत्ताकार टेबल की सतह पर पॉलिश कराना चाहती है जबकि टेबल का व्यास 2.8 मीटर है तथा 25 रू. प्रति वर्गमीटर की दर से खर्चा ज्ञात कीजिए।
12. गोपी अपने घोड़े को 12 मीटर लम्बी रस्सी से एक खूंटे द्वारा बांध देता है तो घोड़ा कितने क्षेत्रफल की घास खा पाता है ?

13. दी गई आकृति में ABCD एक आयताकार भाग के दोनों सिरों पर अर्धवृत्ताकार भाग जोड़े गए जिसका व्यास 12 सेमी है लम्बाई 15 सेमी है तो क्षेत्रफल ज्ञात करों।




14. 35 मीटर त्रिज्या वाले एक पहिए को 880 मीटर दूरी तय करने के लिए पहिए को कितनी बार घूमना पड़ेगा ? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

15. पर्वत अपने वृत्ताकार उपवन के चारों ओर 7 मीटर चौड़े मार्ग में 11 रू. प्रति वर्गमीटर की दर से मिट्टी डलवाने में कितना व्यय करता है, ज्ञात कीजिए ? जबकि उपवन का व्यास 56 मीटर है। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)




16. वृत्ताकार घड़ी के मिनट की सुई की लम्बाई 20 सेमी. है। मिनट की सुई की नोंक 1 घण्टे में कितनी दूरी तय करती है। $\pi = 3.14$ लीजिए।

**करो और सीखो**

यातायात चिन्हों को दर्शाने हेतु लोहे की चद्दर काटकर निम्नलिखित 5 वृत्ताकार चकती तैयार की गई सभी की त्रिज्या 21 सेमी है।

इन सभी चिन्हों का अर्थ अपने अध्यापक जी की सहायता से पता कीजिए तथा चकतियों की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

## हमने सीखा

1. परिमाप एक बन्द आकृति के चारों ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल एक बन्द आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग या क्षेत्र को दर्शाता हैं।
2. एक वर्ग और आयत का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्र जैसे –
   (1) एक वर्ग का परिमाप = 4 x भुजा
   (2) एक आयत का परिमाप = 2 x (लम्बाई + चौड़ाई)
   (3) एक वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा x भुजा
   (4) एक आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई
3. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार x ऊँचाई
4. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (इससे प्राप्त समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

   = $\frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई
5. एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती हैं। एक वृत्त की परिधि = $2\pi r$ या परिधि = $\pi d$ जहाँ d वृत्त का व्यास और $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 (लगभग) है।
6. एक वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2$, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।